3. ESEMPI

Sia assegnata su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1): per provare che lo spazio di coomologia $H^3_{\Gamma^2}$ (isomorfo a $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$) é un sovraspazio, in generale proprio, dello spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reali e quindi dello spazio H^1 di coomologia 1-dimensionale di De Rham, si osservi che, per (2.1), una funzione differenziabile ha differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo se in ogni carta locale (U,ϕ) la sua immagine f in tale carta é tale che:

$$(3.1) \qquad \partial_{ijh}f + C^{pq}_{ij,h}\,\partial_{pq}f + D^{p}_{ij,h}\,\partial_{p}f = 0.$$

Le condizioni d'integrabilità del sistema (3.1), tenuto conto del teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, sono :

$$(3.2) \qquad (C^{pq}_{ij,h}C^{rs}_{pq,l} - \partial_{l}C^{rs}_{ij,h} - \delta^{s}_{l}\,D^{r}_{ij,h} - C^{pq}_{ij,l}\,C^{rs}_{pq,h} + \partial_{h}C^{rs}_{ij,l} +$$
$$+ \delta^{s}_{h}\,D^{r}_{ij,l})\,\partial_{rs}f + (C^{pq}_{ij,h}\,D^{r}_{pq,l} - \partial_{l}D^{r}_{ij,h} - C^{pq}_{ij,l}\,D^{r}_{pq,h} +$$
$$+ \partial_{h}D^{r}_{ij,l})\,\partial_{r}f = 0 .$$

E' immediato che il sistema (3.1), qualunque sia Γ^2, é soddisfatto dalle funzioni localmente costanti; se esso é soddisfatto soltanto dalle funzioni localmente costanti, $H^3_{\Gamma^2}$ é isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reli e quindi ad H^1.

Se il sistema (3.1) é soddisfatto anche da altre funzioni, $H^3_{\Gamma^2}$ é un sovraspazio proprio di H^1: ciò si verifica in alcuni esempi che saranno ora illustrati.

E' noto che se Γ è una connessione lineare simmetrica localmente piatta, esiste un atlante in ogni carta del quale le componenti di Γ sono identicamente nulle e viceversa. Da ciò e dalle (1.9) e (1.10) segue facilmente la seguente:

Prop. 1.- <u>Se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie (0,1) dedotta da una connessione lineare simmetrica Γ, allora Γ è localmente piatta se e solo se esiste un atlante in ogni carta del quale le componenti $(C^{pq}_{ij,h}, D^{p}_{ij,h})$ di Γ^2</u>

nulle.

Sia Γ^2 una connessione del secondo ordine dedotta da una connessione lineare localmente piatta, per la proposizione precedente esiste un atlante $(U_a,\phi_a)_{a\in\mathcal{A}}$ - che non è restrittivo supporre numerabile e costituito da sferoidi - in ogni carta del quale le componenti $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^{p}_{ij,h}$ di Γ^2 sono identicamente nulle. Perciò in tale atlante i cambiamenti di coordinate sono lineari e il sistema (3.1) diventa:

$$(3.3) \qquad \partial_{ijh} f = 0 \qquad \text{in} \quad (U_a, \phi_a).$$

Ne segue che le funzioni aventi differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo, sono le funzioni di 2° grado a coefficienti costanti delle coordinate x^i relative alla carta (U_a, ϕ_a) e pertanto lo spazio vettoriale P_{U_a} del fascio P_{Γ^2} relativo ad U_a è isomorfo a $R^{\frac{n(n+3)}{2}+1}$.

Inoltre per ogni $(a,b) \in \mathcal{A}^2$ tale che $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, ogni funzione f tale che $\delta^3 f = 0$ in $U_a \cap U_b$ è una funzione di 2° grado a coefficienti localmente costanti delle coordinate di un punto di $U_a \cap U_b$ in una qualunque delle due carte (U_a, ϕ_a) o (U_b,ϕ_b). Quindi lo spazio vettoriale $P_{U_a \cap U_b}$ è isomorfo a $(\mathbb{R}^{\frac{n(n+3)}{2}+1})^v$, dove si è indicato con v il numero delle componenti connesse di $U_a \cap U_b$. Essendo lo spazio vettoriale delle funzioni localmente costanti relativo ad $U_a \cap U_b$ isomorfo a $\mathbb{R}^v$, ne segue facilmente che $H^3_{\Gamma^2}$ è isomorfo alla potenza $(\frac{n(n+3)}{2} + 1)$-esima dello spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reali, quindi:

$$\dim H^3_{\Gamma^2} = \left(\frac{n(n+3)}{2} + 1\right) \cdot \dim H^1.$$

Sia ora V_n una varietà differenziabile che ammetta un atlante $\{(U_a,\phi_a)\}_{a\in\{1,2,3\}}$ tale che per ogni $(a,b) \in \{1,2,3\}^2$ $U_a \cap U_b$ sia connesso e dette x^i_a le coordinate dei punti di V_n nella carta (U_a,ϕ_a), i cambiamenti di coordinate siano dati da:

$$\frac{\partial x^i_2}{\partial x^j_1} = \frac{\partial x^i_1}{\partial x^j_2} = -\delta^i_j \; ; \qquad \frac{\partial x^i_3}{\partial x^j_1} = \frac{\partial x^i_1}{\partial x^j_3} = -\delta^i_j \; ; \qquad \frac{\partial x^i_2}{\partial x^j_3} = \frac{\partial x^i_3}{\partial x^j_2} = \delta^i_j$$

Su tale varietà si consideri una connessione lineare Γ avente in ogni (U_a, ϕ_a) componenti tutte nulle ad eccezione di $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = = h \in \mathbb{R} - \{0\}$ e sia Γ^2 la connessione del 2° ordine dedotta da tale connessione lineare.

Tenendo conto di (1.8) e (1.9), i sistemi (3.1) e (3.2) diventano rispettivamente

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \partial_{121} f - 2\,h\,\partial_{11} f = 0 \\ \partial_{122} f - 2\,h\,\partial_{12} f + h^2\,\partial_1 f = 0 \\ \partial_{ijh} f = 0 \qquad \forall (ij,h) \neq \begin{matrix} (1,2,1) \\ (1,2,2) \end{matrix} \end{cases}$$

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \partial_{11} f = 0 \\ -3\partial_{12} f + 2h\partial_1 f = 0 \end{cases}$$

Derivando ulteriormente l'ultima equazione del sistema (3.5) e tenendo conto dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni si ottiene

$$\partial_1 f = 0$$

che è l'unica condizione d'integrabilità. Ne segue che il sistema (3.4) e (3.5) equivale al sistema:

$$\partial_{ijh} f = 0 \qquad \forall (i,j,h)$$

$$\partial_1 f = 0$$

le cui soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo:

$$f(x_1,\dots,x_n) = c_{22}\, x_2^2 + \dots + c_{nn}\, x_n^2 + c_{23} x_2 x_3 + \dots + c_{n-1n}\, x_{n-1} x_n + c_{o2}\, x_2 + \dots + c_{on}\, x_n + c_{oo}$$

con c_{ij} costanti reali e (x^i) coordinate nella carta (U_a, ϕ_a).

Ne segue che lo spazio vettoriale P_{U_a} del fascio P_Γ relativo ad U_a è isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e quindi, come è facile verificare, lo spazio $H^3_{\Gamma^2}$ è isomorfo alla potenza $(\frac{n(n+1)}{2})$-esima dello spazio di coomologia 1-dimensionale $\mathcal{H}^1$ a coefficienti reali e quindi

$$\dim H^3_{\Gamma^2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \dim H^1 .$$