C A P I T O L O IV

Equazioni canoniche.

1. Premesse. Sia $\ell(q\dot{q}t)$ la funzione lagrangiana di un sistema meccanico. Le equazioni di Lagrange

$$(1.1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} = 0 \qquad (i = 1...n)$$

se si esegue la derivazione rispetto a t, si scrivono esplicitamente:

$$(1.2) \qquad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 \ell}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} = 0$$

Questo sistema può essere posto in forma normale se e solo se la sua matrice non è singolare:

$$(1.3) \qquad \Delta \equiv \left\| \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}^J \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0$$

Se si definiscono i momenti p_i, coniugati delle coordinate q^i:

$$(1.4) \qquad p_i = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}$$

la (3) equivale alla:

$$(1.3') \qquad \left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \right| \neq 0$$

Come è noto (v. [6]) nel caso dei sistemi meccanici ordinari la relazione (3) è soddisfatta. Il sistema algebrico (2) nelle incognite $\ddot{q}$ ha allora soluzione

$$(1.5) \qquad \ddot{q}^i = \Delta^{-1}\left[- \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 \ell}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial \ell}{\partial q^i}\right].$$

Il sistema (5) è equivalente al sistema (1).

Il sistema (5) è poi equivalente a infiniti diversi sistemi di $2n$ equazioni del primo ordine.

Fra tutti questi sistemi è particolarmente importante, quello che si ottiene assumendo come incognite supplementari le quantità p_i definite dalle (4).

Si può osservare che le p_i hanno le seguenti proprietà:

1) sono invertibili rispetto alle $\dot{q}^i$ per la (3')

2) invertendo le (4) rispetto alle $\dot{q}^i$ si hanno le relazioni

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(qpt) \tag{1.6}$$

che forniscono parte delle equazioni del moto

3) le (1) forniscono

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \ell(q\dot{q}t)}{\partial q^i} \tag{1.7}$$

nelle quali, mediante le (6) i secondi membri si esprimono in funzione delle qpt. Le (7) forniscono allora le rimanenti equazioni del moto. Resta quindi soltanto da esplicitare i secondi membri delle (6).

Per ottenere direttamente le (6) e le (7) nelle variabili qpt conviene introdurre in generale un tipo di trasformazioni che coinvolgano variabili del tipo (4): queste variabili hanno un preciso significato geometrico. A tale significato viene dedicato il n° successivo.

2. La trasformazione di Legendre.

E' conveniente limitarsi per motivi di evidenza geometrica al caso di R^3.

Sia S una superficie di equazione

$$z = f(xy) \quad . \tag{2.1}$$

In certi casi è possibile descrivere la (1), anziché mediante l'equazione cartesiana, mediante l'inviluppo dei suoi piani tangenti.

E' evidente che una condizione necessaria perché ciò si possa fare è che dai piani tangenti si possa risalire univocamente ai punti della superficie data: nel seguito si vedrà quali siano le condizioni che occorrono.

E' chiaro innanzitutto che i piani che hanno come inviluppo la superficie data debbono costituire una famiglia due parametri, se si vuole che ogni piano tangente individui uno e un sol punto della superficie.

Un piano di coordinate correnti xyz ha equazione

$$z - p_1 x - p_2 y + h = 0$$

I parametri del piano sono tre: p_1, p_2, h.
La superficie è individuata come inviluppo di una famiglia a due parametri di piani se uno dei tre parametri del piano si può esprimere in funzione degli altri due, per es. $h(p_1\ p_2)$.

Al fine di descrivere la superficie (1) mediante i parametri p_1 e p_2 non è sufficiente però esprimere semplicemente $f(x,y)$ come $f[x(p_1,p_2),y(p_1,p_2)]$ ossia ridursi ad esprimere le coordinate di ogni punto della superficie in funzione dei parametri direttori della normale alla superficie nello stesso punto.

Infatti la funzione $f[x(p_1,p_2),y(p_1,p_2)]$ pur individuando (sotto l'ipotesi $f_{xx} f_{yy} - f^2_{xy} \neq 0$: v. oltre) la forma della superficie, individua la superficie stessa a meno di una traslazione parallela al piano xy (1) .

---

(1) Per semplicità conviene dare un esempio nel caso di una curva. Sia $y = \text{sen}\, x$, $y' = \cos x = p$. Risulta $x = \arcos p$ e $y = \text{sen arcos}\, p = \sqrt{1-p^2}$. Se si trasla la curva parallelamente all'asse x : $y = \text{sen}(x+a)$ si ha $y' = p = \cos(x+a)$; $x+a = \arcos p$ e $y = \text{sen arcos}\, p = \sqrt{1-p^2}$. Sicché esprimendo la y mediante la sua derivata rispetto a x, si perde una traslazione parallela all'asse x.

Per evitare ciò basta assegnare, in funzione di p_1 e p_2, cioé in funzione della giacitura del piano tangente, l'intersezione del piano con l'asse z. Tale intersezione in generale si sposta lungo l'asse z quando la superficie viene traslata parallelamente al piano xy e quindi è atta, assieme alla funzione $f[x(p_1p_2),y(p_1p_2)]$ a individuare la superficie. La condizione è, come si è accennato in precedenza, che ad ogni coppia di valori di p_1 e p_2 si risalga ad un unico punto della superficie.

Sia $P_o = (x_o y_o z_o)$ un punto di S. Il piano tangente ad S in P_o ha equazione:

$$z - z_o - (x - x_o)f_x - (y - y_o)f_y = 0 \quad .$$

Le coordinate del piano sono:

$$p_1 - f_x \;;\; p_2 = f_y \;;\; h = x_o f_x + y_o f_y - z_o \quad . \tag{2.3}$$

Per esprimere h in funzione di p_1 e p_2 basta risolvere le prime due delle (3) rispetto a x_o e y_o e sostituirle nella terza

$$h(p_1p_2) = x_o p_1 + y_o p_2 - z_o \; . \tag{2.4}$$

Viceversa per determinare le coordinate del punto delle coordinate del piano tangente basta derivare la (4) rispetto a p_1 e a p_2

$$\begin{cases} h_{p_1} = x_o + p_1 \dfrac{\partial x_o}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial y_o}{\partial p_1} - z_{ox} \dfrac{\partial x_o}{\partial p_1} - z_{oy} \dfrac{\partial y_o}{\partial p_1} = x_o \\ h_{p_2} = y_o \end{cases}$$

si hanno infine le relazioni simmetriche

$$\begin{cases} h(p_1p_2) = x_o p_1 + y_o p_2 - z_o(x_o y_o) & \\ p_1 = z_{oxo} & p_2 = z_{oyo} \\ x_o = h_{p_1} & y_o = h_{p_2} \end{cases} \tag{2.5}$$

La trasformazione (5), che fa passare dai punti della superficie alle coordinate del piano (e viceversa) è detta trasformazione di Legendre.

Va notato che essa è una trasformazione più generale di una trasformazione puntuale, perché coinvolge, oltre a punti, elementi superficiali: infatti essa è una trasformazione di contatto, come si riconosce facilmente.

Le prime due delle (3) sono invertibili rispetto a x_0 e a y_0 se e solo se sulla supericie risulta

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} = 0 \ . \tag{2.6}$$

L'inversione non può quindi essere effettuata per superfici sviluppabili, come del resto è evidente dal punto di vista geometrico.

Nel caso di R^n le analoghe delle (5) sono (omettendo per convenienza l'indicie 0)

$$\begin{aligned} &h(p_1 \dots p_n) = \Sigma\, x^i p_i - z(x^1 \dots x^n) \\ &z_{x^i} = p_i \qquad\qquad h_{p_i} = x^i \end{aligned} \tag{2.5'}$$

con ovvio significato dei simboli. E' pure ovvio il significato geometrico della trasformazione.

L'analoga della (6) è

$$\frac{\partial(z_{x^1} \dots z_{x^n})}{\partial(x^1 \dots x^n)} \neq 0 \quad . \tag{2.6'}$$

Infine è chiaro che la trasformazione di Legendre può essere effettuata rispetto a parte soltanto delle variabili.

3. Equazioni di Hamilton.

L'ultima osservazione del n° precedente può essere applicata al caso della funzione $L(q\dot{q}t)$. Effettuando la trasformazione di Legendre rispetto alle sole $\dot{q}^i$ si hanno le relazione (2.5') nella forma:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \ell(q\dot{q}t) = \Sigma\, \dot{q}^i p_i - h(qpt) \\[2ex] \dfrac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} = p_i \qquad\qquad \dfrac{\partial h}{\partial p_i} = \dot{q}^i \ . \end{cases}$$

Le ultime forniscono direttamente le (1.6) in forma esplicita. Quanto alle (1.7) si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial q^i} = \Sigma\, p_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i} - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \Sigma \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i} = - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} = - \dot{p}_i \ .$$

In definitiva si ottiene il sistema di equazioni

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = - \dfrac{\partial h}{\partial q^i} \end{cases}$$

Questo sistema ha forma canonica (cfr. I(5.3)) e le equazioni che lo costituiscono sono dette equazioni canoniche o di Hamilton. La funzione h è detta funzione hamiltoniana del sistema meccanico.

Introducendo le PP, si possono scrivere le (2) nella forma:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \dot{q}^i = (h, q^i) \\ \dot{p}_i = (h, p_i) \end{cases}$$

o, nella notazione compatta

$$(3.4)\qquad \dot{\omega}^i = (h, \omega^i) \ .$$

4. Trasformazioni canoniche.

Se una trasformazione invertibile

$$(4.1)\qquad \omega^i = \phi^i(\Omega t)$$

lascia invariata la forma canonica delle equazioni del moto essa è una TC.

In altri termini, se, qualunque sia h, si può trovare una funzione H: tale che il sistema

$$\dot{\omega}^{\gamma} = (h,\omega^{\gamma}) \tag{4.2}$$

si trasforma, per effetti della (1), nel sistema

$$\dot{\Omega}^{\mu} = (H,\Omega^{\mu}) \tag{4.3}$$

la trasformazione (1) è una TC.

Si applichi infatti al sistema (2) la trasformazione (1). Si ha

$$\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\mu}}\,\dot{\Omega}^{\mu} + \frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial t} = \varepsilon^{\mu\lambda}\,\frac{\partial\bar{h}}{\partial\Omega^{\rho}}\,\frac{\partial\Omega^{\rho}}{\partial\omega^{\mu}}\,\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\sigma}}\,\frac{\partial\Omega^{\sigma}}{\partial\omega^{\lambda}}$$

dove $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$. La precedente si può scrivere

$$\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\mu}}\,\dot{\Omega}^{\mu}\;\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial t} = (\partial^{\rho}\Omega^{\sigma})_{\omega}\,\frac{\partial\bar{h}}{\partial\Omega^{\rho}}\,\frac{\partial\phi^{i}}{\partial\Omega^{\sigma}}$$

Poiché si vuole che sia conservata la forma canonica delle equazioni, le $\dot{\Omega}$ debbono essere date dalle (3)

$$\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\mu}}\,\varepsilon^{\kappa\mu}\,\frac{\partial H}{\partial\Omega^{\kappa}} + \frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial t} = (\Omega^{\rho}\Omega^{\sigma})\,\frac{\partial\bar{h}}{\partial\Omega^{\rho}}\,\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\sigma}}$$

e infine

$$\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial\Omega^{\mu}}\left[(\Omega^{\rho}\Omega^{\mu})\,\frac{\partial\bar{h}}{\partial\Omega^{\rho}} - \varepsilon^{\kappa\mu}\,\frac{\partial H}{\partial\Omega^{\kappa}}\right] = \frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial t}\quad . \tag{4.4}$$

Poiché la matrice $J = \left\|\frac{\partial\phi^{i}}{\partial\Omega^{\mu}}\right\|$ non è singolare perché la (1) è invertibile, il sistema (4) si può risolvere con la regola di Cramer. Indicando con J^{α} la matrice J nella quale la colonna α^{ma} è stata sostituita con la colonna delle $\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial t}$, si ha

$$(\Omega^{\rho}\Omega^{\mu})_{\omega}\,\frac{\partial\bar{h}}{\partial\Omega^{\rho}} - \varepsilon^{\rho\mu}\,\frac{\partial H}{\partial\Omega^{\rho}} = J^{-1}\,J^{\mu}$$

Il membro destro dipende esclusivamente dalla trasformazione (1) e non dagli hamiltoniani h e H.

Quindi il primo membro, per ogni scelta di h (e per ogni trasformato H) deve essere indipendente da questa funzione. Poiché si ha

$$(\Omega^\rho \Omega^\mu)_\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda} \frac{\partial \Omega^\rho}{\partial \Omega^\kappa} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Omega^\lambda} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda} \frac{\partial h}{\partial \omega^\kappa} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Omega^\lambda} = (h\Omega^\mu)_\omega$$

e inoltre

$$\varepsilon^{\rho\mu} \frac{\partial H}{\partial \Omega^\rho} = (H\,\Omega^\mu)_\Omega$$

si ha infine che la quantità

$$(h\,\Omega^\mu)_\omega - (H\,\Omega^\mu)_\Omega$$

deve essere indipendente da h e H e cioé deve dipendere solo dalla trasformazione.

Posto $$H(\Omega t) = \bar{h}(\Omega t) + \mathcal{U}(\Omega t)$$

dove, come prima $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$, si ha che

$$(h\,\Omega^\mu)_\omega - (\bar{h},\Omega^\mu)_\Omega - (\mathcal{U},\Omega^\mu)_\Omega$$

è indipendente da h. Si deve dunque avere (1)

$$(h\Omega^\mu)_\omega - (\bar{h}\;\;\Omega^\mu)_\Omega = 0$$

o, esplicitamente

$$\varepsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial h}{\partial \omega^\rho} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial \omega^\rho} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha} \quad \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}$$

ossia

$$\frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \omega^\rho} (\varepsilon^{\rho\sigma} - \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\sigma} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}) \right] = 0$$

Poiché la trasformazione è invertibile si ha

$$\left\| \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \right\| \neq 0$$

e quindi sono nulle le quantità nelle parentesi quadra

---

(1) Per una dimostrazione più rigorosa, anche se più macchinosa v. [5]

$$\frac{\partial h}{\partial \omega^\rho}\left(\varepsilon^{\rho\sigma} - \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha}\frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}\right) = 0 \quad .$$

Se h è arbitraria, queste relazioni sono vere se e solo se

$$\varepsilon^{\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha}\frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}$$

o

$$(\omega^\rho \omega^\sigma)_\Omega = \varepsilon^{\rho\sigma}$$

cioé se la (1) è una trasformazione canonica.

Si possono allora utilizzare i risultati del n° 3 Cap. III,in particolare le (24) e (25). Detta F la generatrice della (1) del presente numero si ha

$$\mathcal{U} = \frac{\partial F}{\partial t}$$

e quindi

$$\text{(4.5)} \qquad H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial F}{\partial t}(qQt)$$

5. Osservazioni sulle TC.

Osservazione 1.Si indichino con $\ell(q\dot{q}t)$, $L(Q\dot{Q}t)$ le funzioni lagrangiane relative ai due hamiltoniani h e H rispett. La derivata totale di F è

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Utilizzando le (7.8) Cap. II e la (4.5) del presente capitolo, si ha:

$$\frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}^i - P_i\dot{Q}^i + H - h = L(Q\dot{Q}t) - \ell(q\dot{q}t) \quad .$$

(Notare che nel caso di una trasformazione puntuale, cioé del tipo $Q^i = Q^i(qt)$ l'ultimo membro è nullo).

Si ha quindi nella notazione del Cap. II n° 7:

$$F = \int L(Q\dot{Q}t)dt - \int \ell(q\dot{q}t)dt = Q^{n+1} - q^{n+1} = \phi^{n+1}$$

Le quantità q^{n+1} e Q^{n+1} sono l'azione (v. Cap. VI n. 1) e la sua trasformata ed F è la loro differenza (a questo proposito vedere Cap. V n. 1).

Osservazione 2. Nel Cap. II n° 8 si è trovata la forma più generale di TC infinitesima (v. II(8.7).

$$(5.1)\quad \delta q^{n+1} = (p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - F)\delta t, \delta q^i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta t \; ; \; \delta p_i = -\frac{\partial F}{\partial q^i}\delta t$$

con F arbitraria.

Se si sceglie F coincidente con h si vede che le relazioni precedenti, eccetto la prima, coincidono con le equazioni hamiltoniane. L'hamiltoniana è quindi la funzione generatrice delle trasformazioni che fanno passare dai valori delle variabili canoniche calcolati in un istante generico, ai valori delle stesse variabili calcolate in un istante infinitamente vicino. Il moto si svolge perciò come una successione di TC infinitesime. D'altra parte, poiché le TC formano gruppo e quindi la successiva applicazione di TC è ancora una TC, anche i valori delle variabili canoniche in istanti separati da un intervallo di tempo finito, sono legate da una TC. A questo problema sono dedicati il n° successivo e il Capitolo VI (v. anche Cap. V n. 3).

Quanto alla prima delle relazioni (1), per $F = h$ essa diventa

$$(5.2)\qquad \delta q^{n+1} = p_\alpha \frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - h = \ell(q\dot{q}t)$$

dove ℓ è il lagrangiano. La (2) esprime la variazione dell'azione (v. Cap. VI).

Osservazione 3. Si torni alla relazione che esprime la canonicità della trasformazione $qp \rightarrow QP$:

$$(5.3) \qquad P_i dQ^i = p_i dq^i - \frac{\partial F}{\partial t} + dF(qQt)$$

In questa relazione la generatrice F_1 è funzione di qQt: l'indice 1 è stato apposto per convenienza, per distinguere questa generatrice da altre tre funzioni generatrici che verranno ora introdotte. Come conseguenza della (3) si hanno le relazioni usuali:

$$(5.4) \qquad p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i} \; ; \; P_i = \frac{\partial F}{\partial Q^i}$$

Una trasformazione di Legendre che sostituisca le q^i con le p_i, trasforma la relazione pfaffiana (3) in una nuova relazione pfaffiana che si può ottenere semplicemente introducendo nella (3) l'identità $p_i dq^i = d(p_i q^i) - q^i dp_i$ e definendo la funzione $F_2 = F_1 + p_i q^i$

$$(5.3') \qquad P_i dQ^i = - q^i dp_i - \frac{\partial F_2}{\partial t} + dF_2 \quad .$$

SI riconosce facilmente che la (3') è ancora una relazione pfaffiana relativa alla TC: $p_i q^i \to Q^i P_i$. Dalle (3') segue

$$(5.4') \qquad q^i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} \quad ; \quad P_i = \frac{\partial F_2}{\partial Q^i} \quad .$$

Analogamente scegliendo come variabili indipendenti le p, P e definendo $F_3 = F_2 - P_i Q^i$ si ha:

$$(5.3'') \qquad - Q^i dP_i = - q^i dp_i - \frac{\partial F_3}{\partial t} + dF_3$$

da cui segue

$$Q^i = - \frac{\partial F_3}{\partial P_i} \quad ; \quad q^i = \frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

Infine scegliendo come variabili indipendenti le P, q e ponendo $F_4 = F_3 - q^i p_i$ si ha

$$(5.3''') \qquad - Q^i dP_i = p_i dq^i - \frac{\partial F_4}{\partial t} + dF_4$$

dove

$$(5.4") \qquad Q^i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i} \; ; \quad p_i = -\frac{\partial F_4}{\partial q^i}$$

5. Il teorema di Hamilton-Jacobi.

Nel n° precedente si è notato che i valori delle variabili canoniche relativi a due istanti generici sono legati da una TC. In particolare comunque si assegni un istante t appartenente all'intervallo temporale in cui si svolge il moto, i valori delle variabili canoniche $q(t),p(t)$ sono legati ai rispettivi valori q_o,p_o, relativi all'istante iniziale t_o, da una TC.

La conoscenza di questa TC relativa ad ogni stante, e cioé la conoscenza della famiglia ad un parametro di TC che facciano passare dai valori q_o,p_o ai valori $q(t),p(t)$ equivale alla conoscenza completa della soluzione delle equazioni canoniche. Infatti la famiglia di trasformazioni è data da : $q(t) = q(t\, q_o p_o)$; $p(t) = p(t,q_o p_o)$ e cioé rappresenta l'integrale generale delle equazioni canoniche.

Si può osservare che la TC inversa, che fa passare dalle $q(t)$ alle $q_o p_o$, cioé a variabili canoniche che siano tutte costanti del moto riduce le equazioni canoniche alla forma più semplice possibile, cioé alla forma $\dot{q} = 0$, $\dot{p} = 0$(1).

Per determinare la famiglia di TC che connette i valori iniziali $q_o p_o$ con i valori all'istante generati, conviene ricercarne la generatrice.

Poiché le nuove variabili canoniche $Q^i \equiv q^i_o$; $P_i \equiv p_{oi}$ sono tutte costanti del moto, le equazioni canoniche sono

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = 0 \; ; \; \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q^i} = 0$$

---

(1) E' ben noto del resto il metodo di semplificare le equazioni di qualunque tipo con opportuni cambiamenti di variabili.

Il nuovo hamiltoniano H non dipende dalle variabili canoniche QP_i; esso dipende solo dal tempo e quindi può essere posto uguale a zero [1].

La relazione (4.5) diventa (la generatrice è indicata col simbolo S, usuale nella letteratura):

$$h(qpt) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

dove $S = S(q\, q_0 t)$.

Poiché, inoltre, è $p_i = - \frac{\partial S}{\partial q^i}$, si può scrivere

$$h(q, - \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad (5.1)$$

La (I) è l'equazione di Hamilton-Jacobi. Come si è visto nel Cap.I n° 5 questa equazione è equivalente al sistema canonico. Un suo integrale completo permette infatti, come si è visto nel Cap. I di determinare, con procedimento di inversione e di eliminazione, la soluzione generale del sistema canonico. Dalla discussione ora fatta si vede che un integrale completo della (1) è la funzione generatrice di una TC che fa passare dalle variabili canoniche, calcolate all'istante generico t, ad un sistema di costanti iniziali.

---

(2) Sia $H(t)$ il nuovo hamiltoniano. Se S è la generatrice della trasformazione che porta da $h(qpt)$ ad $H(t) = h(qpt) + \frac{\partial S}{\partial t}$, la funzione $\bar{S} = S - \int^t H(t)dt$ genera una TC che porta da h all'hamiltoniano $K = 0$.

Infatti si ha $\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} - H(t)$. Inoltre $K = h + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} =$

$$= H - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = H - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} - H = 0$$

Se si considera la trasformazione inversa:

$$(5.2) \qquad \begin{cases} q^i = q^i(t\ q_o p_o) \\ p_i = p_i(t\ q_o p_o) \end{cases}$$

si hanno complessivamente le relazioni (7.8) del Cap. II nella forma

$$(5.3) \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q^i} \quad ; \quad p_{oi} = \frac{\partial S}{\partial q_o{}^i}$$

Invertendo le seconde delle (3) rispett. alle q^i si ottengono le $q^i(q_o p_o t)$ che, introdotte nelle prime delle (3), danno le $p_i(q_o p_o t)$.

La conoscenza dell'integrale completo F della (1) permette quindi, come si è detto più volte di ricavare le (2) con soli procedimenti di inversione e di eliminazione.