0 INTRODUZIONE

In questo capitolo, continuando il discorso sulla differenziabilità di un'applicazione $f : E \to F$, definiamo la "derivata seconda" di f e, più in generale, la "derivata di ordine k" di f, con $k > 2$.

In termini di vettori applicati, abbiamo allora le "2-applicazioni tangenti e cotangenti" di f; osserviamo che in esse intervengono anche le derivate prime, oltre alle derivate seconde.

L'importanza delle 2-applicazioni tangenti e cotangenti di f è data, anche, dal fatto che serviranno per definire, sui 2-spazi tangenti e cotangenti di uno spazio affine E, dei sistemi di coordinate indotti da quello definito su E.

Osserviamo inoltre che, passando alle varietà differenziabili, continuano ad essere definite solo le 2-applicazioni tangenti e cotangenti di f e non le derivate seconde.

Diamo, poi, la definizione di "equazione differenziale del 2° ordine" (e.d.s.o.) su E, come un campo vettoriale

$$\bar{X} : TE \to TTE$$

su TE, le cui "curve integrali" $I \to TE$ sono la derivata della propria proiezione su E. Ogni campo vettoriale $\bar{X}$ è caratterizzato dalle sue due componenti orizzontale e verticale, essendo $TTE = \nu TTE \oplus o TTE$.

Il teorema 3.3.4. dice, sostanzialmente, che $\bar{X}$ è una e.d.s.o. se e solo se la componente orizzontale è di un certo tipo fissato. Dunque, le e.d.s.o. sono caratterizzate dalla componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$, che può essere scelta arbitrariamente.

1 DERIVATE SECONDE

0 Considerati due spazi affini E ed F, proseguiamo il discorso sulla differenziabilità di un'applicazione $f : E \to F$.

Nel precedente capitolo abbiamo definito la derivata di f come un'applicazione

$$Df : E \to L(\bar{E},\bar{F}) \quad .$$

Essendo E e $L(\bar{E},\bar{F})$ spazi affini, ha senso parlare della differenziabilità di Df.

Ora, supposto che Df sia differenziabile, è naturale precisare la sua derivata: essa è detta "derivata seconda" di f. Iterando il procedimento si dà, più in generale, la nozione di applicazione differenziabile k volte.

Concludiamo tale paragrafo dando le applicazioni tangenti e cotangenti di Tf e T^*f facendo osservare che in queste nozioni entrano in gioco, non solo le derivate seconde ma, anche le derivate prime.

3.1.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Se l'applicazione

$$Df : E \to L(\bar{E},\bar{F}) \approx E^* \otimes \bar{F}$$

è differenziabile, allora l'applicazione

$$D^2f \equiv D(Df) : E \to L(\bar{E},L(\bar{E},\bar{F})) \approx L(\bar{E},\bar{E}^* \otimes \bar{F}) \approx \bar{E}^* \otimes \bar{E}^* \otimes \bar{F} \approx L^2(\bar{E},\bar{F})$$

dicesi DERIVATA SECONDA di f .

Pertanto, tenuto conto degli isomorfismi canonici precedenti, si scrive

$$[\, D^2f(p)(\bar{h})\,](\bar{k}) = D^2f(p)(\bar{h},\bar{k}) = \langle D^2f(p), \bar{h} \otimes \bar{k} \rangle \quad .$$

Abbiamo anche

$$Df(p+\bar{h})(\bar{k}) = Df(p)(\bar{k}) + D^2f(p)(\bar{h},\bar{k}) + \bar{o}(p,\bar{h})(\bar{k}) \qquad \forall\, p \in E, \quad \bar{h},\bar{k} \in \bar{E} \;,$$

dove $\bar{o}(p,\bar{h})$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $||\bar{h}||$.

3.1.2. Del seguente teorema omettiamo la non facile dimostrazione. Il lettore, a tale scopo, può consultare [2] (teorema 5.1.1. pag.65).

TEOREMA Sia $Df : E \to L(\bar{E},\bar{F})$ un'applicazione differenziabile.

Allora, l'applicazione bilineare $D^2f(p)$ è simmetrica, per ogni $p \in E$, ossia è

$$D^2f(p)(\bar{h},\bar{k}) = D^2f(p)(\bar{k},\bar{h}) \qquad \underline{.}$$

3.1.3. Le considerazioni precedenti si estendono, per iterazione, alle derivate di ordine $k > 2$ (se esistono) .

DEFINIZIONE

L'applicazione $f : E \to F$ si dice DIFFERENZIABILE K VOLTE se sono differenziabili le applicazioni

$$f\ ,\ Df,\ D^2f\ ,\ldots,\ D^{k-1}f\ .$$

Inoltre, f si dice "di classe $\mathcal{C}^k$ " se è differenziabile k volte e se D^kf è continua. Conseguentemente, si dice di classe $\mathcal{C}^\infty$ se, per ogni intero positivo k, f è di classe $\mathcal{C}^k$ $\underline{.}$

Le due proposizioni seguenti assicurano la differenziabilità di alcune notevoli derivate nella sola ipotesi che l'applicazione di partenza sia differenziabile almeno due volte.

3.1.4. PROPOSIZIONE Siano E_1 , E_2 spazi affini.
Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile 2 volte.

Allora, le applicazioni

$$D_1 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_1,\bar{F}) \quad , \quad D_2 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_2,\bar{F})$$

sono differenziabili.

D. Infatti $D_1 f$ e $D_2 f$ si ottengono mediante composizione delle seguenti applicazioni differenziabili

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{Df} L(\bar{E}_1 \times \bar{E}_2,\bar{F}) \to L(\bar{E}_1,\bar{F})$$

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{Df} L(\bar{E}_1 \times \bar{E}_2,\bar{F}) \to L(\bar{E}_2,\bar{F}) \qquad \div$$

3.1.5. PROPOSIZIONE Siano F_1 ed F_2 due spazi affini.
Sia $f : E \to F_1 \times F_2$ un'applicazione differenziabile due volte.

Allora, le applicazioni

$$Df^1 : E \to L(\bar{E},\bar{F}_1) \quad , \quad Df^2 : E \to L(\bar{E},\bar{F}_2)$$

sono differenziabili.

D. Infatti Df^1 e Df^2 si ottengono mediante composizione delle applicazioni differenziabili

$$E \overset{Df}{\to} L(\bar{E}, \bar{F}_1 \times \bar{F}_2) \to L(\bar{E},\bar{F}_1)$$

$$E \overset{Df}{\to} L(\bar{E},\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) \to L(\bar{E},\bar{F}_2) \qquad \dot{-}$$

3.1.6. Facciamo vedere ora l'equivalenza esistente, in termini di differenziabilità, tra la derivata di un'applicazione e la sua applica zione tangente.

PROPOSIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti.

a) $Df : E \to L(\bar{E},\bar{F})$ è differenziabile,

b) $Tf : TE \to TF$ è differenziabile.

D. a) Sia Df differenziabile. Allora, Tf è differenziabile.
Infatti

$$\begin{aligned}
Tf\,[(p,\bar{u})+(\bar{v},\bar{w})] &= Tf(p+\bar{v},\bar{u}+\bar{w}) = (f(p+\bar{v}) \,,\, Df(p+\bar{v})(\bar{u}+\bar{w}))= \\
&= (f(p)+Df(p)(\bar{v})+o'(p,\bar{v}), Df(p)(\bar{u}+\bar{w})+D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}+\bar{w})+o''(p,\bar{v})(\bar{u}+\bar{w})) \\
&= (f(p),Df(p)(\bar{u})) + (Df(p)(\bar{v}) \,,\, Df(p)(\bar{w}) + D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}))+ \\
&+ (o'(p,\bar{v}) \,,\, D^2f(p)(\bar{v},\bar{w})) + o''(p,\bar{v})(\bar{u}+\bar{w}) = \\
&= Tf(p,\bar{u}) + (Df(p)(\bar{v}) \,,\, Df(p)(\bar{w})+ D^2f(p)(\bar{v},\bar{u}))+o(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \,,
\end{aligned}$$

dove il secondo termine è lineare rispetto a $(\bar{v},\bar{w})$ ed o è un infinitesimo di ordine superiore a $(\bar{v},\bar{w})$.

b) Sia Tf differenziabile. Allora, Df è differenziabile.

Infatti,

$$Tf(p+\bar{v},\bar{u}) = (Tf)(p,\bar{u}) + D_1(Tf)(p,\bar{u})(\bar{v}) + o(p,\bar{u};\bar{v})$$

dove

$$\begin{cases} Tf(p+\bar{v},\bar{u}) = (f(p+\bar{v}), Df(p+\bar{v})(\bar{u})) = (f(p)+Df(p)(\bar{v}) + o'(p,\bar{v}), Df(p+\bar{v})(\bar{u})) \\ Tf(p,\bar{u}) = (f(p) \ , Df(p)(\bar{u})) \qquad , \end{cases}$$

e dove o è un infinitesimo di ordine superiore a $\bar{v}$.

Quindi

$$Df(p+\bar{v})(\bar{u}) = Df(p)(\bar{u}) + \pi^2(D_1(Tf)(p,\bar{u})) + o(p,\bar{u};\bar{v}) \ ,$$

da cui

$$D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) = \pi^2(D_1Tf)(p,\bar{u})(\bar{v}) \qquad \dot{-}$$

3.1.7. Diamo ora la nozione di "seconda applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte.

Dicesi 2-APPLICAZIONE TANGENTE di f o "applicazione tangente" di Tf l'applicazione

$$TTf : TTE \to TTf$$

data da $\quad TTf : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (Tf(p,\bar{u}) \ , D(Tf)(p,\bar{u})(\bar{v},\bar{w})) \qquad \dot{-}$

3.1.8. PROPOSIZIONE

E'

$$TTf(p,\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = (f(p),Df(p)(\bar{u}); Df(p)(\bar{v}), D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) + Df(p)(\bar{w})) \quad .$$

* D. Infatti, posto $Tf \equiv g$, $TE \equiv M$, $TF \equiv N$, dobbiamo determinare l'applicazione tangente

$$Tg : TM \to TN$$

data da $$Tg : (q,\bar{z}) \mapsto (g(q) \ , Dg(q)(\bar{z}))$$

$\forall\ q \equiv (p,\bar{u}) \in M \quad , \quad \bar{z} \equiv (\bar{v},\bar{w}) \in N$.

Essendo $g(q) \equiv Tf(p,\bar{u}) \equiv (f(p) \ , Df(p)(\bar{u}))$, allora resta da determinare

$$Dg\ (q)\ (\bar{z}) \quad .$$

Per la proposizione 2.4.4., è

$$Dg(q)(\bar{z}) = (Dg^1(q)(\bar{z}) \quad , Dg^2(q)(\bar{z})) \quad ,$$

dove si è posto

$$g^1 \equiv \pi^1 \circ g : M \to F \quad , \quad g^2 \equiv \pi^2 \circ g : M \to F \quad .$$

$$Dg^1(q)(\bar{z}) \equiv \langle Dg^1(q),\bar{z}\rangle \equiv \langle Dg^1(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle D_1g^1(p,\bar{u}),\bar{v}\rangle + \langle D_2g^1(p,\bar{u}),\bar{w}\rangle =$$
$$= \langle Dg^1_{\bar{u}}(p),\bar{v}\rangle + \langle Dg^1_p(\bar{u}),\bar{w}\rangle \overset{1)}{=} \langle Df(p),\bar{v}\rangle + \langle \underline{o}\ , \bar{w}\rangle = \langle Df(p),\bar{v}\rangle \ .$$

1a) $E \xrightarrow{J_{\bar{u}}} E\times\bar{E} \xrightarrow{g^1} F$ $\qquad$ $g^1_{\bar{u}}(p) \equiv (g^1 \circ J_{\bar{u}})(p) \equiv f(p) \Rightarrow Dg^1_{\bar{u}}(p) \equiv Df(p)$

$\quad p \mapsto (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$

1b) $\bar{E} \xrightarrow{J_p} E\times\bar{E} \xrightarrow{g^1} F$ $\qquad$ $g^1_p(\bar{u}) \equiv (g^1 \circ J_p)(\bar{u}) \equiv f(p) = \text{cost} \Rightarrow Dg^1_p(\bar{u}) = o$.

$\quad \bar{u} \mapsto (p,\bar{u}) \mapsto f(p)$

$$Dg^2(q)(\bar{z}) \equiv \langle Dg^2(q),\bar{z}\rangle \equiv \langle Dg^2(p,\bar{u}),(\bar{v},\bar{w})\rangle = \langle D_1 g^2(p,\bar{u}),\bar{v}\rangle + \langle D_2 g^2(p,\bar{u}),\bar{w}\rangle =$$

$$= \langle Dg^2_{\bar{u}}(p),\bar{v}\rangle + \langle Dg^2_p(\bar{u}),\bar{w}\rangle \overset{1)}{=} \langle D^2 f(p)\ ,\ (\bar{u},\bar{v})\rangle + \langle Df(p),\ \bar{w}\rangle \qquad \underline{\cdot}$$

*(Per comodità del lettore è ripetuta più esplicitamente la dim. 3.1.6.

Dunque, l'espressione della seconda applicazione tangente coinvolge la derivata prima, oltre alla derivata seconda. Possiamo "isolare" quest'ultima, componendo la seconda applicazione tangente con la connessione affine.

3.1.8. PROPOSIZIONE Siano $\vee TTE \subset TTE$, $\circ TTE \subset TTE$.

Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile due volte.

Allora, l'espressione di $\Gamma \circ TTf : \circ TTE \to \vee TTF$ è data da

$$\begin{array}{ccccccc}
\circ TTE & \to & TTE & \overset{TTf}{\to} & TTF & \overset{\Gamma}{\to} & \vee TTF \\
(p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) & \mapsto & (p,\bar{u};\bar{v},\bar{o}) & \mapsto & (f(p),Df(p)(\bar{u});Df(p)(\bar{v}),D^2f(p)(\bar{u},\bar{v})) & \mapsto & (f(p),Df(p)(\bar{u});\bar{o},D^2f(p)(\bar{u},\bar{v})).
\end{array}$$

3.1.9. Possiamo ora esprimere la simmetria della derivata seconda, tramite la 2-applicazione tangente e l'involuzione canonica s.

PROPOSIZIONE

Il seguente diagramma

---

1 a) $E \overset{Df}{\to} \bar{E}^* \otimes \bar{F} \overset{\langle\ ,\bar{u}\rangle}{\to} \bar{F}$ $\qquad$ $g^2_{\bar{u}}(p) \equiv \langle Df(p),\bar{u}\rangle \Rightarrow Dg^2_{\bar{u}}(p) = \langle D^2 f(p),\bar{u}\rangle$ essendo

$p \mapsto Df(p) \mapsto \langle Df(p),\bar{u}\rangle$ $\qquad$ $\langle\ ,\ \bar{u}\ \rangle$ un'applicazione lineare.

1 b) $\bar{E} \overset{\langle Df(p),\ \rangle}{\to} \bar{F}$ $\qquad$ $g^2_p(\bar{u}) \equiv \langle Df(p),\bar{u}\rangle \Rightarrow Dg^2_p(\bar{u}) = \langle Df(p),\bar{u}\rangle$ essendo

$\langle Df(p),\ \rangle$ un'applicazione lineare.

$$\begin{tikzcd} TTE \arrow[r, "TTf"] & TTF \arrow[d, "s"] \\ TTE \arrow[u, "s"] \arrow[r, "TTf"'] & TTF \end{tikzcd}$$

dato da

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (f,\bar{v},\bar{u},\bar{w}) \arrow[r, mapsto, "TTf"] & (f(p),Df(p)(\bar{v});\ Df(p)(\bar{u})\ ,\ D^2f(p)(\bar{v},\bar{u})+Df(p)(\bar{w})) \arrow[d, mapsto, "s"] \\ (f,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \arrow[u, mapsto, "s"] \arrow[r, mapsto, "TTf"'] & (f(p),Df(p)(\bar{u});\ Df(p)(\bar{v})\ ,\ D^2f(p)(\bar{u},\bar{v})+Df(p)(\bar{w})) \end{tikzcd}$$

è commutativo, ossia,è

$$TTf = s \circ TTf \circ s \qquad \dot{-}$$

In modo analogo a 3.1.7. si dà l'altra 2-applicazione tangente di f

$$TT^*f : TT^*E \to TT^*F$$

data da
$$TT^*f : (p,\underline{u},\bar{v},\underline{\omega}) \mapsto (T^*f(p,\underline{u})\ ,\ D(T^*f)(p,\underline{u})(\bar{v},\underline{\omega}))\ .$$

3.1.10. Inoltre, se f è invertibile, allora abbiamo anche le nozioni di "2-applicazioni cotangenti" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile almeno due volte ed invertibile .

Dicesi 2-APPLICAZIONE COTANGENTE di f l'applicazione

$$T^*Tf : T^*TE \rightarrow T^*TF$$

data da $$T^*Tf : (p,\bar{u};\underline{\nu},\underline{\omega}) \mapsto (Tf(p,\bar{u}) \; , \; (\underline{\nu},\underline{\omega}) \circ D(Tf)^{-1}(Tf(p,\bar{u}))),$$

o l'applicazione

$$T^*T^*f : T^*T^*E \rightarrow T^*T^*F$$

data da $$T^*T^*f : (p,\underline{u};\underline{\nu},\bar{w}) \mapsto (T^*f(p,\underline{u}),(\underline{\nu},\bar{w}) \circ D(T^*f)^{-1}(T^*f(p,\underline{u}))).$$

Poiché tali nozioni, in questo lavoro, serviranno principalmente per i sistemi di coordinate sui 2- spazi tangenti e cotangenti, faremo uno studio più approfondito e dettagliato di ciò, nel 5° capitolo.

2 CASI PARTICOLARI DI DERIVATE SECONDE

0 Sia E uno spazio affine.

Vediamo ora i casi più interessanti , trattati di solito nell'analisi classica.

Ossia, i casi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to E$, $f : E \to \mathbb{R}$.

3.2.1. CASO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia f un'applicazione differenziabile almeno due volte. Allora, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, la derivata seconda di f

$$D^2f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è data da

$$D^2f(x)(\lambda,\mu) = D^2f(x)\lambda\mu \quad .$$

Possiamo, quindi, considerare il differenziale secondo

$$d^2f : \mathbb{R} \to TT\mathbb{R}$$

dato da $$d^2f : x \mapsto (f(x),Df(x);\ Df(x),D^2f(x)) \quad .$$

Inoltre, la 2-applicazione tangente

$$TTf : TT\mathbb{R} \to TT\mathbb{R}$$

è data da $$TTf : (x,y;\lambda,\mu) \mapsto (f(x),Df(x)y;Df(x)\lambda,D^2f(x)\lambda y+Df(x)\mu) \ .$$

3.2.2. CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

Sia f una curva differenziabile almeno due volte. Allora, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, la derivata seconda di f

$$D^2f : \mathbb{R} \to \bar{E}$$

è data da $$D^2f(x)(\lambda,\mu) = D^2f(x)\lambda\mu \quad .$$

Dunque, il differenziale secondo di f

$$d^2f : \mathbb{R} \to TTE$$

è dato da $$d^2f : x \mapsto (f(x), Df(x) \; ; Df(x) \; , D^2f(x)) \quad .$$

Possiamo comporre, allora, d^2f con la connessione affine $\Gamma : TT\mathbb{R} \to \nu TTE$, ottenendo così l'applicazione

$$\Gamma \circ d^2f : \mathbb{R} \to \nu TTE$$

data da $$\Gamma \circ d^2f : x \mapsto (f(x) \; , Df(x) \; ; \bar{o}, D^2f(x)) \quad .$$

Tale applicazione gioca un ruolo importante nella Meccanica Analitica.

Inoltre, la 2-applicazione tangente

$$TTf : TT\mathbb{R} \to TTE$$

è data da $$TTf : (x,y;\lambda,\mu) \mapsto (f(x), Df(x)y; Df(x)\lambda, D^2f(x)\lambda y + Df(x)\mu) \quad .$$

3.2.3. CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile almeno due volte. Allora, essendo $L(\bar{E},R) \equiv \bar{E}^*$, la derivata seconda di f

$$D^2f : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*$$

è data da

$$D^2f(p)(\bar{u},\bar{v}) = < D^2f(p) \ , \ \bar{u} \otimes \bar{v} > \ .$$

Inoltre, la 2-applicazione tangente di f

$$TTf : TTE \to TT\mathbb{R}$$

è data da

$$TTf(p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \equiv (f(p),<Df(p),\bar{u}> \ ; \ <Df(p),\bar{v}>,<D^2f(p),\bar{u}\otimes\bar{v}> + <Df(p),\bar{w}>).$$

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

0 Sia E uno spazio affine.

Una "equazione differenziale del 2° ordine" (e.d.s.o.) su E è un campo vettoriale $\bar{X} : TE \to TTE$ le "cui curve integrali" $I \to TE$ sono la derivata della propria proiezione su E.

Ogni campo vettoriale $\bar{X}$ e $\sim TE$ è caratterizzata dalle sue due componenti orizzontale e verticale, essendo $TTE = \nu TTE \oplus oTTE$. Allora diamo un teorema il quale, sostanzialmente, dice che $\bar{X}$ è una e.d.s.o. se e solo se la componente orizzontale è di un certo tipo fissato. Dunque, le e.d.s.o. sono caratterizzate dalla componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$, che può essere scelta arbitrariamente.

E' un procedimento che ricostruisce intrinsecamente le definizioni dell'Analisi Classica.

3.3.1. DEFINIZIONE Sia $I \subset R$.

Dicesi CURVA BASICA ogni curva $\mathcal{C}^\infty$

$$c : I \to TE$$

tale che

$$c = d(p_E \circ c).$$

In tal caso la curva $p_E \circ c : I \to E$ è detta la BASE di c .

3.3.2. Caratterizziamo le curve basiche, più esplicitamente.

PROPOSIZIONE Sia $c : I \to TE$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ e sia $\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E$.

Allora c è una curva basica se e solo se

$$c = (\gamma, D\gamma).$$

D. Segue immediatamente dalla definizione 3.3.1. .

3.3.3. Diamo, allora, l'importante nozione di e.d.s.o. .

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE su E ogni campo vettoriale

$$\bar{X} : TE \to TTE$$

le cui curve integrali sono curve basiche, ossia tale che $\bar{X}$ soddisfi la condizione

$$(c : I \to TE \ , \ dc = \bar{X} \circ c) \Rightarrow (c = d(p_E \circ c)) \quad .$$

In tal caso la curva

$$\gamma \equiv p_E \circ c : I \to E$$

dicesi UNA SOLUZIONE di $\bar{X}$.

3.3.4. Una caratterizzazione delle e.d.s.o. è data nel modo seguente.

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale su TE.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o. .

b) Per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = (p,\bar{u};\ \bar{u},\ \bar{y}) \quad , \text{ con } \bar{y} = \bar{y}(p,\bar{u}) \in \bar{E} \quad .$$

D. a) $\Rightarrow$ b) .

Se $(p,\bar{u}) \in TE$, esiste una curva integrale $c : I \to TE$ di $\bar{X}$, tale che

$$c(\theta) = (p,\bar{u}) \quad , \text{ con } \theta \in I \quad .$$

Allora, è

$$c(\theta) = d(p_E \circ c)(\theta) \equiv d\gamma(\theta) = (\gamma(\theta)\ ,\ D\gamma\ (\theta)) = (p,\bar{u})$$

e quindi

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = \bar{X}(c(\theta)) = (\bar{X} \circ c)\ (\theta) = dc(\theta) = (\gamma(\theta),\ D\gamma(\theta);\ D\gamma\ (\theta),\ D^2\gamma\ (\theta)\ ) =$$

$$= (p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y})$$

avendo posto $\bar{y} \equiv D^2\gamma(\theta)$.

b) $\Rightarrow$ a).

Sia $c : I \to TE$ una curva integrale $\mathcal{C}^\infty$ di $\bar{X}$. Posto

$$\gamma \equiv p_E \circ c \qquad , \quad \tilde{c} \equiv \pi^2 \circ c : I \to \bar{E}$$

allora, è

$$(\ \gamma,\ \tilde{c}\ ;\ \tilde{c}\ ,\ \pi^4 \circ \bar{X} \circ c) = \bar{X} \circ c = c' = (\gamma\ ,\ \tilde{c}\ ,\ D\gamma\ ,\ D\ \tilde{c}\ )$$

e quindi

$$\tilde{c} = D\gamma$$

da cui

$$c = (\gamma,\ D\gamma) \equiv d\gamma \equiv d(p_E \circ c) \qquad .$$

Dunque, $\bar{X}$ è una e.d.s.o. $\quad\dot{-}$

3.3.5. Tenendo presente il precedente teorema, è possibile caratterizzare una e.d.s.o. in altri modi: uno di questi è suggerito dal seguente teorema.

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ un campo vettoriale su TE.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $\bar{X}$ è una e.d.s.o., ossia è

$$\bar{X}(p,\bar{u}) = (p,\bar{u};\ \bar{u},\ \bar{y}(p,\bar{u})) \qquad , \forall\ (p,\bar{u}) \in TE\ .$$

b) $Tp_E \circ \bar{X} = id_{TE}$.

c) $s \circ \bar{X} = \bar{X}$

dove s è l'involuzione canonica

$$s : TTE \to TTE$$

data da $$s : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{v};\bar{u},\bar{w}) \qquad .$$

d) $\nu \circ \bar{X} = \bar{V}$

dove ν è l'endomorfismo canonico

$$\nu : TTE \to \nu TTE$$

dato da $$\nu : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{v})$$

e $\bar{V}$ è il campo vettoriale di Liouville

$$\bar{V} : TE \to TTE$$

dato da $$\bar{V} : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) \qquad .$$

D. Infatti, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

b) $(Tp_E \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = Tp_E(p,\bar{u};\bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u}) \equiv id_{TE}\ (p,\bar{u})$.

c) $(s \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = s(p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u};\bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) \equiv \bar{X}(p,\bar{u})$.

d) $(\nu \circ \bar{X})(p,\bar{u}) = \nu(p,\bar{u};\ \bar{u},\bar{y}(p,\bar{u})) = (p,\bar{u};\bar{o},\bar{u}) \equiv \bar{V}(p,\bar{u})$.

3.3.6. Caratterizziamo ora una soluzione di una e.d.s.o. .

TEOREMA Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $\gamma : I \to E$ una curva $\mathcal{C}^{\infty}$.

Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) γ è una soluzione di $\bar{X}$.

b) E'

$$d^2\gamma = \bar{X} \circ d\gamma$$

o equivalentemente

$$D^2\gamma = (\Gamma \circ \bar{X} \circ d\gamma)^{\ell}$$

dove Γ è la connessione affine

$$\Gamma : TTE \to \nu TTE$$

data da

$$\Gamma : (p,\bar{u};\bar{v},\bar{w}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{o},\bar{w}) \quad .$$

D. a) $\Rightarrow$ b) .

Se γ è una soluzione di $\bar{X}$, è

$$\gamma = p_E \circ c \quad ,$$

dove $c : I \to TE$ è una curva integrale di $\bar{X}$, ossia è

$$d\gamma = d(p_E \circ c) = c$$

e quindi

$$d^2\gamma = dc \quad .$$

b) $\Rightarrow$ a).

Bisogna dimostrare che è

$$\gamma = p_E \circ c \quad .$$

Intanto, per ipotesi, è

$$d^2\gamma = dc \ ,$$

dove $c = d(p_E \circ c)$ è una curva integrale di $\bar{X}$. Allora, è

$$d^2\gamma = dc = d(d(p_E \circ c)\ ) = d^2(p_E \circ c\ )$$

e quindi abbiamo

$$\gamma = P_E \circ c \qquad \dot{-}$$

Dunque, una e.d.s.o. è caratterizzata dalla sua componente verticale $\Gamma \circ \bar{X}$.

3.3.7. Possiamo considerare,allora, l'e.d.s.o. privilegiata, la cui componente verticale è nulla.

DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE GEODETICA su E l'unico campo vettoriale $\mathcal{C}^\infty$

$$\bar{X}_o : TE \to TTE$$

dato da

$$\bar{X}_o : (p,\bar{u}) \mapsto (p,\bar{u};\bar{u},\bar{o}) \quad ,$$

o, equivalentemente, l'unico campo vettoriale $\bar{X}_o$ tale che $\Gamma \circ \bar{X}_o = \bar{o}$ $\dot{-}$

Allora, le soluzioni di $\bar{X}_o$ sono gli isomorfismi di spazi affini, ossia sono del tipo

$$\gamma(\lambda)= p_o + \lambda\bar{v} \quad , \text{con} \quad p_o \in E, \bar{v} \in \bar{E} \quad .$$

3.3.8. DEFINIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. .

Dicesi INTEGRALE PRIMO di $\bar{X}$ ogni funzione $\mathcal{C}^\infty$

$$f : TE \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni curva integrale c di $\bar{X}$ è

$$D(f \circ c) = o \quad \underline{\cdot}$$

3.3.9. Possiamo caratterizzare gli integrali primi in termini di soluzioni, anziché di curve integrali.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Allora, f è un integrale di $\bar{X}$ se e solo se per ogni soluzione γ di $\bar{X}$ è

$$D(f \circ d\gamma)= o \quad \underline{\cdot}$$

3.3.10. Caratterizziamo, infine, gli integrali primi mediante $\bar{X}$, direttamente.

PROPOSIZIONE Sia $\bar{X} : TE \to TTE$ una e.d.s.o. . Sia $f : TE \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è integrale primo di $\bar{X}$.

b) E'

$$< df,\bar{X}>= o$$

D. a)$\Leftrightarrow$ b) .

Sia $(p,\bar{u}) \in TE$ e sia $c : I \to TE$ una curva integrale di $\bar{X}$ tale che

$$c(\lambda) = (p,\bar{u}) \ .$$

Allora, per la definizione di e.d.s.o., è

$$<df,\bar{X}>(p,\bar{u}) \equiv D(f \circ c)(\lambda) \quad \underline{\cdot}$$