III - SEGUENDO GROTHENDIECK

Introduzione

Questa parte finale tratteggia a grandi linee l'evoluzione della teoria degli operatori dall'epoca di Grothendieck ai giorni nostri. Dato l'enorme sviluppo subito dalla teoria a seguito del lavoro di Grothendieck, l'esposizione è necessariamente concisa e, soprattutto, incompleta. Sono evidenziati comunque l'uso della nozione di ideale di operatori e il suo impiego sistematico, dovuto a Pietsch, nella costruzione della teoria moderna così come si presenta oggi. Così, dopo aver passato in rassegna gli ideali più rappresentativi ed alcune procedure per la costruzione di nuovi ideali a partire da ideali dati, si perviene all'esame delle relazioni e dei teoremi di moltiplicazione tra i vari ideali, per terminare infine con alcuni problemi aperti generali che sono fondamentali per la teoria.

1 - Operatori p-approssimabili ($0 < p \leq \infty$)

Siano E e F spazi di Banach e sia $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce *numero di approssimazione di ordine* n *di* T il numero

$$a_n(T) = \inf\{ \|T-S\| : S \in \mathscr{F}(E,F) \text{ e } \dim S(E) < n\} .$$

E' facile verificare che i numeri di approssimazione $a_n(T)$ godono delle seguenti proprietà:

(A1) $\|T\| = a_1(T) \geq \dots \geq a_n(T) \geq a_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$.

(A2) $a_n(\lambda T) = |\lambda|\, a_n(T)$ *per ogni scalare* λ.

(A3) $a_{m+n-1}(S+T) \leq a_m(S) + a_n(T)$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(A4) $|a_m(S) - a_m(T)| \leq \|S-T\|$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(A5) $a_{m+n-1}(ST) \leq a_m(S)\, a_n(T)$ *per* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(F,G)$.

(A6) $a_n(T) = 0$ *se e solo se* $\dim T(E) < n$.

Chiaramente, un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene a $\bar{\mathscr{F}}(E,F)$ se e solo se $(a_n(T)) \in c_0$. In tal caso si ha, per la (A1)

$$\|T\| = \|(a_n(T))\|_{\ell^\infty}.$$

Tutto ciò può essere generalizzato nel modo seguente. Sia $0 < p \leq \infty$. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ sarà detto p-*approssimabile* se la successione $(a_n(T))$ appartiene a ℓ^p per $p < \infty$ e a c_0 per $p = \infty$. Indicheremo poi con $\mathscr{A}_p$ *la classe degli operatori* p-*approssimabili* e porremo

(1) $$\alpha_p(T) = \|(a_n(T)\|_{\ell^p} \qquad \text{per } T \in \mathscr{A}_p.$$

Tali classi furono introdotte da Pietsch (cf.[47]) nel 1963.

Per quanto detto sopra, risulta $(\mathscr{A}_\infty, \alpha_\infty) = (\bar{\mathscr{F}} \| \ \|)$. Tale classe è chiamata *classe degli operatori approssimabili* e denotata con $\mathscr{G}$ in onore di Grothendieck. Essa verrà considerata più in dettaglio nel §5 e perciò per il resto di questo paragrafo supporremo $0 < p < \infty$.

Per le classi $\mathscr{A}_p$ vale il seguente

TEOREMA 1 - (a) $(\mathscr{A}_p, \alpha_p)$ *è un ideale quasi-normato completo in cui* $\mathscr{F}$ *è denso.*

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{A}_p \subset \mathscr{A}_q$ *e* $\alpha_q \leq \alpha_p$ *su* $\mathscr{A}_p$.

(c) *Ogni* $T \in \mathscr{A}_p(E,F)$ *ammette una rappresentazione del tipo*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad \textit{per ogni } x \in E,$$

ove $(x'_n) \subset B_{E'}$, $(y_n) \subset B_F$ *e* $(\xi_n) \in \ell^p$ *è tale che*

$$\|\xi_n)\|_{\ell^p} \leq 2.\ 6^{1/p}\ \alpha_p(T).$$

(d) $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{N}_1$ *e* $\nu_1 \leq 1.2\alpha_1$ *su* $\mathscr{A}_1$.

(e) $\mathscr{A}_p(H,H) = \mathscr{S}_p(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\alpha_p = \sigma_p$

La (a) non è troppo difficile da dimostrare, la (b) è ovvia, mentre la (c) richiede una certa accortezza ed implica immediatamente la (d). Finalmente, la (e) segue dal fatto che, *in uno spazio di Hilbert, i numeri di approssimazione coincidono con i numeri caratteristici* che appaiono nel Teorema 11 del §I.8. Ciò mostra che gli ideali $\mathscr{A}_p$ sono una naturale generalizzazione agli spazi di Banach degli ideali $\mathscr{S}_p$ di von Neumann considerati al §I.8. Ma l'analogia si spinge oltre, poiché abbiamo:

TEOREMA 2 - (a) *La traccia è continua su* $\mathscr{F}(E,E)$ *per la quasi-norma* α_1 *e quindi ammette una unica estensione a* $[\mathscr{A}_1(E,E), \alpha_1]$, *avendosi*

(2) $$\mathrm{tr}(T) \leq 12\, \alpha_1(T) \qquad \textit{per ogni} \quad T \in \mathscr{A}_1(E,E).$$

(b) *Se* $T \in \mathscr{A}_1(E,E)$ *allora*

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| < \infty$$

e

(4) $$\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) .$$

La (a) segue immediatamente dalla (c) del Teorema 1, ma non implica assolutamente niente sulla somma degli autovalori. Infatti, la (b) è recente, la (3) essendo dovuta a Johnson, König, Maurey e Retherford [29] e la (4) a König [31].

Per le dimostrazioni del Teorema 1 e del Teorema 2 (a) rimandiamo a [28] (§19.8) (ma cf. anche [49] , Chapter 8).

Osserviamo infine che vari altri tipi di "numeri" (cioé di successioni numeriche) possono essere associati ad un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e che è addirittura possibile formulare in generale una teoria assiomatica (cf. [50], 11).

2 - Operatori assolutamente p-sommanti ($1 \leq p < \infty$).

Riprendiamo ora gli operatori semi-integrali del §II.6 e notiamo che, come conseguenza del Teorema 11 di tale paragrafo si ha che, se T è un'applicazione semi-integrale destra di uno spazio di Banach E in uno spazio di Banach F, allora per ogni successione $(x_n) \subset E$ tale che $(\langle x_n, x'\rangle) \in \ell^1$ per ogni $x' \in E'$, risulta $(\|T x_n\|) \in \ell^1$. Essendo tale proprietà una caratterizzazione, possiamo allora generalizzare tali applicazioni nel modo seguente.

Innanzitutto, poniamo per $1 \leq p \leq \infty$,

$$\ell^p(E) = \{(x_n) \subset E : (\|x_n\|) \in \ell^p\}$$

ed inoltre

$$c_o(E) = \{(x_n) \subset E : (\|x_n\|) \in c_o\} .$$

E' immediato verificare che $\ell^p(E)$ è uno spazio di Banach per la norma

$$\pi_p[(x_n)] = \|(\|x_n\|)\|_{\ell^p} \qquad \text{se} \quad 1 \leq p \leq \infty ,$$

e che $c_o(E)$ è un sottospazio chiuso di $\ell^\infty(E)$.

Poniamo poi

$$\ell^p[E] = \{(x_n) \subset E : \varepsilon_p[(x_n)] = \sup_{x \in B_{E'}} \|(\langle x_n, x'\rangle)\|_{\ell^p} < \infty\}$$

e

$$c_o[E] = \{(x_n) \subset E : (\langle x_n, x'\rangle) \in c_o \quad \text{per ogni } x' \in E'\}.$$

Di nuovo, $\ell^p[E]$ è uno spazio di Banach per la norma $\varepsilon_p[(x_n)]$ e $c_o[E]$ è un sottospazio chiuso di $\ell^\infty[E]$. Inoltre, risulta evidentemente,

$$\ell^p(E) \subset \ell^p[E] \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_p[(x_n)] \leq \pi_p[(x_n)] .$$

Siamo ora in grado di dare la seguente definizione. Un operatore $T : E \to F$ è detto *assolutamente p-sommante* se $(T x_n) \in \ell^p(F)$ per ogni $(x_n) \in \ell^p[E]$. Gli operatori assolutamente 1-sommanti (cioé le applicazioni semi-integrali destre del §II.6) sono semplicemente chiamati *operatori assolutamente sommanti*.

Osserviamo che per $p = \infty$ si ottengono semplicemente tutti gli operatori in $\mathscr{L}(E,F)$, mentre gli operatori che trasformano elementi di $c_o[E]$ in elementi di $c_o(F)$ sono esattamente gli operatori completamente continui del §I.5. Ciò giustifica la restrizione $1 \leq p < \infty$ che manterremo nel presente paragrafo.

Osserviamo inoltre che un operatore assolutamente p-sommante T è automaticamente continuo. Infatti, se non lo fosse, esisterebbe $(x_n) \in \ell^\infty(E)$ tale che $\|Tx_n\| > 2^n$. Ma allora $(2^{-n}x_n) \in \ell^p[E]$ e $(2^{-n}Tx_n) \notin \ell^p(F)$, da cui una contraddizione.

Indicando con $\mathscr{P}_p(E,F)$ *l'insieme degli operatori assolutamente p-sommanti* da E a F, abbiamo dunque $\mathscr{P}_p(E,F) \subset \mathscr{L}(E,F)$ e risultando

(5) $$\pi_p\,[(Tx_n)] \leq c\ \varepsilon_p\,[(x_n)] \qquad \text{per } T \in \mathscr{P}_p(E,F),$$

possiamo denotare con $\pi_p(T)$ l'estremo inferiore delle costanti c per le quali la disuguaglianza precedente è verificata. Si riconosce allora che π_p è una norma e che vale il

TEOREMA 3 - *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $T \in \mathscr{P}_p(E,F)$.

(ii) *Esiste* $c \geq 0$ *tale che per ogni insieme finito* $(x_1,\dots,x_k)$ *si ha*

(6) $$\left(\sum_{j=1}^{k} ||Tx_j||^p\right)^{1/p} \leq c\ \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{k} |\langle x_j,x'\rangle|^p\right)^{1/p} : x' \in B_{E'}\right\}.$$

In tal caso, $\pi_p(T)$ *coincide con la più piccola delle costanti* c *di cui sopra.*

(iii) *Esistono una misura di probabilità* μ *su* $B_{E'}$ *e una costante* $c \geq 0$ *tali da aversi*

(7) $$||Tx|| \leq c\left(\int_{B_{E'}} |\langle x,x'\rangle|^p\, d\mu(x')\right)^{1/p} \qquad \textit{per ogni } x \in E.$$

In tal caso, $\pi_p(T)$ *coincide con la più piccola delle costanti* c *di cui sopra.*

(iv) *Esitono uno spazio compatto* K, *una misura di Radon positiva* μ *su* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(L^p(K,\mu),L^\infty)$ *tali da aversi*

(8) $$J_F T = R J_p S,$$

ove J_p *è l'iniezione canonica* $C(K) \to L^p(K,\mu)$ *e* J_F *è l'applicazione* $F \to L^\infty$ *di cui al* §II.6. *In tal caso possiamo scegliere* μ *come una misura di probabilità,* S *come una isometria e* R *tale che* $||R|| = \pi_p(T)$.

E' abbastanza facile riconoscere l'equivalenza della (i) e (ii) tramite l'equivalenza della (5) e (6). La (7) è ben nota come *disuguaglianza di Pietsch* mehtre l'equivalenza della (i) e della (iv) è conosciuta come *Teorema della Fattorizzazione di Pietsch* in onore di quest'ultimo, che intraprese lo studio sistematico degli operatori assolutamente p-sommanti nel 1967 (cf. [48]).

Osservazione 1 - Segue dal Teorema 3, usando la (8), che se $T \in \mathscr{P}_2(E,F)$, allora esistono un compatto K, una misura di Radon positiva μ su K e operatori $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(L^2(K,\mu),F)$ soddisfacenti le condizioni della (iv) tali che

$$T = RJ_2S.$$

Osservazione 2 - L'equivalenza della (i) e della (iv) del Teorema 3 mostra che J_p è un prototipo di applicazione assolutamente p-sommante.

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 4 - (a) $(\mathscr{P}_p, \pi_p))$ *è un ideale normato completo e quindi contiene* $\mathscr{N}_1$, *avendosi* $\pi_p \leq \nu_1$.

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{P}_p \subset \mathscr{P}_q$ *e* $\pi_q \leq \pi_p$ *su* $\mathscr{P}_p$.

(c) $\mathscr{P}_p \subset \mathscr{V} \cap \mathscr{W}$

(d) $\mathscr{P}_p(H,H) = \mathscr{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

La verifica della (a) è abbastanza standard, la seconda parte essendo conseguenza del Teorema 4 del §II.2. La (b) segue dalla (6), mentre la (c) è conseguenza della (3) e della (d) del Teorema 3. La (d) invece è difficile ed è un risultato profondo che sfrutta la cosiddetta "disuguaglianza di Khintchine": per i dettagli rimandiamo a [28] (§ 20.5) o a [27] (Exercise 2.E.9).

Osservazione 3 - In generale, gli ideali $\mathscr{P}_p$ e $\mathscr{K}$ sono incomparabili, nel senso che $\mathscr{K} \not\subset \mathscr{P}_p$ e $\mathscr{P}_p \not\subset \mathscr{K}$. La prima risulta dal fatto che se $T \in \mathscr{S}_q(H,H)$

con $q > 2$ ma $T \notin \mathscr{S}_2(H,H)$, allora T appartiene a $\mathscr{K}(H,H)$ ma non a $\mathscr{P}_p(H,H)$, per la (d). La seconda risulta dal fatto che, per esempio, l'iniezione canonica $J_p : C(K) \to L^p(K,\mu)$ appartiene a $\mathscr{P}_p$ per l'Osservazione 2, ma certamente non appartiene a $\mathscr{K}$ Ne concludiamo che $\mathscr{F}$ non è denso in $(\mathscr{P}_p, \pi_p)$.

Per le dimostrazioni, vedasi [28] (§§ 19.4, 19.5 e 19.6) o [27] (§2.5 e 2.6).

3 - Operatori p-nucleari, quasi-p-nucleari e p-integrali ($1 \leq p \leq \infty$).

Come nel paragrafo precedente abbiamo generalizzato il concetto di operatore assolutamente sommante a quello di operatore assolutamente p-sommante, possiamo nello stesso modo generalizzare la nozione di operatore nucleare. Precisamente, per cominciare sia $0 < p < \infty$. Un operatore $T : E \to F$ sarà detto p-*nucleare* se esistono successioni $(x'_n) \in \ell^p(E')$ e $(y_n) \in (\ell^p)'[F]$ tali che

$$(9) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Per estendere tale definizione al caso $p=\infty$ useremo $c_0(E')$ in luogo di $\ell^\infty(E')$ e quindi T sarà detto ∞-*nucleare* se ammette una rappresentazione del tipo (9) con $(x'_n) \in c_0(E')$ e $(y_n) \in \ell^1[F]$.

Denoteremo con $\mathscr{N}_p$ *la classe degli operatori* p-*nucleari* ($0 < p \leq \infty$). Tali operatori, come pure gli operatori p-integrali che verranno discussi più tardi, furono introdotti da Persson e Pietsch nel 1969 (cf. [46]).

Notiamo subito che la (9) può sempre essere posta nella forma

$$(10) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad (x \in E)$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$, $(x'_n) \subset B_{E'}$ e $(y_n) \in (\ell^p)'[F]$. Ma, essendo $(\ell^p)' = \ell^\infty$ per $0 < p \leq 1$, vediamo subito per la (10) che gli operatori p-nucleari con $0 < p \leq 1$ non sono altro che gli operatori di potenza p-sommabile già trattati al §II.7. Pertanto, per il resto di questo paragrafo possiamo limitarci al caso $1 \leq p \leq \infty$.

Ponendo, con le notazioni del paragrafo precedente,

$$\nu_p(T) = \inf \{\pi_p[(x'_n)] \cdot \varepsilon_{p'}[(y_n)]\} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$$

per ogni $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$, ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni del tipo (9), otteniamo una norma su $\mathcal{N}_p$. Sussiste allora il seguente teorema, analogo al Teorema 12 del §II.7.

TEOREMA 5 - (a) *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $(\mathcal{N}_p, \nu_p)$ *è un ideale normato completo per il quale valgono le proprietà* (a)-(c) *del Teorema* 12 *del* §II.7 (*con* c_o *al posto di* ℓ^p *per* $p = \infty$).

(b) *Se* $1 < p \leq \infty$, $\mathcal{N}_p(H,H) = \mathcal{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Come per gli operatori nucleari (cf. l'Osservazione 2 del §II.2), se $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$ e G è un sottospazio chiuso di F contenente T(E), non accade in genere che $T \in \mathcal{N}_p(E,G)$. A questa difficoltà si può ovviare considerando, in luogo di $\mathcal{N}_p$, *la classe* $\mathcal{Q}_p$ *degli operatori quasi*-p-*nucleari* definiti come segue. Richiamando quanto detto all'inizio del §II.6, diremo che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è *quasi*-p-*nucleare* $(1 \leq p \leq \infty)$ se l'operatore $J_F T$ è p-nucleare. In altre parole, $T \in \mathcal{Q}_p(E,F)$ se e solo se $J_F T \in \mathcal{N}_p(E,L^\infty)$. Abbiamo allora, con la solita convenzione di usare c_o al posto di ℓ^p per $p = \infty$,

TEOREMA 6 - (a) $T \in \mathcal{Q}_p(E,F)$ *se e solo se esiste* $(x'_n) \in \ell^p(E')$ *tale da aversi*

(11) $$\|Tx\| \leq \|(\langle x,x'_n\rangle)\|_{\ell^p} \quad \textit{per ogni } x \in E.$$

In tal caso, si ottiene una norma q_p *su* $\mathcal{Q}_p(E,F)$ *considerando la quantità*

$$q_p(T) = \inf \pi_p[(x'_n)],$$

l'estremo inferiore essendo preso su tutte le successioni $(x'_n) \in \ell^p(E')$ *per le quali la* (11) *risulti verificata.*

(b) $(\mathcal{Q}_p, q_p)$ *è un ideale normato completo contenente* $\mathcal{N}_p$ *e* $q_p \leq \nu_p$ *su* $\mathcal{N}_p$.

(c) *Se* $p < r$, *allora* $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{Q}_r$ *e* $q_r \leq q_p$ *su* $\mathcal{Q}_p$.

(d) $[\mathcal{Q}_2, q_2] = [\mathcal{N}_2, \nu_2]$.

(e) $[\mathcal{Q}_\infty, q_\infty] = [\mathcal{K}, \|\cdot\|]$.

(f) *Se* $1 \leq p < \infty$ *allora* $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{P}_p$ *e* $\pi_p = q_p$ *su* $\mathcal{Q}_p$.

(g) *Se* E' *o* F *ha la proprietà di approssimazione allora* $\mathcal{F}(E,F)$ *è denso in* $[\mathcal{Q}_p(E,F), q_p]$ *e pertanto quest'ultimo ideale è la chiusura di* $\mathcal{F}(E,F)$ *in* $[\mathcal{P}_p(E,F), \pi_p]$.

(h) *Se* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{Q}_p(H,H) = \mathcal{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le dimostrazioni delle proprietà (a),(b),(c) e (f) sono piuttosto standard, mentre la (d) segue dal fatto che ogni sottospazio chiuso di ℓ^2 ha un complementare topologico e la (e) da una ben nota caratterizzazione degli operatori compatti.La (g) e la (h) per $p = 1$ richiedono invece più attenzione mentre la (h) per $1 < p < \infty$ segue immediatamente dalla (b), (f) e dai Teoremi 4(d) e 5(b).

Continuando nello stesso ordine di idee, generalizziamo infine la nozione di operatore integrale usando la caratterizzazione fornita dal Teorema 6 del §II.3. Precisamente, per $1 \leq p \leq \infty$ diremo che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è p-*integrale* se esistono un compatto K, una misura di Radon μ su K e operatori $S \in \mathcal{L}(E, L^\infty(K,\mu))$ [o $S \in \mathcal{L}(E, C(K))$] e $R \in \mathcal{L}(L^p(K,\mu), F'')$ tali da aversi

$$j_F T = R\, J_{\infty,p} S, \tag{12}$$

ove j_F è l'isometria canonica di F in F" e $J_{\infty,p}$ è l'immersione canonica di $L^\infty(K,\mu)$ in $L^p(K,\mu)$, quest'ultima essendo quindi un prototipo di operatore p-integrale. Ponendo

$$\iota_p(T) = \inf \|R\|\ \|S\|,$$

ove l'estremo superiore è preso su tutte le fattorizzazioni del tipo (12), si ottiene una norma ι_p sull'*insieme* $\mathscr{I}_p(E,F)$ *di tutti gli operatori* p-*integrali* da E ad F, avendosi inoltre

TEOREMA 7 - (a) $(\mathscr{I}_p, \iota_p)$ *è un ideale normato completo contenente* $\mathscr{N}_p$.

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{I}_p \subset \mathscr{I}_q$ *e* $\iota_q \leq \iota_p$ *su* $\mathscr{I}_p$.

(c) $(\mathscr{I}_2, \iota_2) = (\mathscr{P}_2, \pi_2)$, *ma* $\mathscr{I}_p \subsetneqq \mathscr{P}_p$ *per* $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$.

(d) *Se* $1 < p \leq \infty$, $\mathscr{I}_p(H,H) = \mathscr{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

(e) $T \in \mathscr{P}_p(E,F)$ *se e solo se* $J_F T \in \mathscr{I}_p(E,F)$.

Come al solito, la (a) e la (b) sono standard, mentre la prima parte della (c) segue dalla (12) e dall'Osservazione 1 del §2. Per la seconda, osserviamo che l'iniezione canonica $\ell^1 \to \ell^2$ è assolutamente sommante, ma certo non integrale; per il caso $1 < p < \infty$ e $p \neq 2$ rimandiamo a [45] o a [50](22.4.13, remark). Infine la (d) segue essenzialmente dalla (e) e dal Teorema 4(d), mentre la (e) mostra che gli operatori p-integrali e assolutamente p-sommanti stanno nella stessa relazione degli operatori p-nucleari e quasi-p-nucleari. Ciò motiverà una delle procedure che saranno discusse al §6.

Per le dimostrazioni rimandiamo a [28](§§ 19.7, 20.5 e 19.6.6).

4 - Operatori p- fattorizzabili ($1 \leq p \leq \infty$) e operatori di Hilbert.

Considerando gli operatori introdotti nei paragrafi precedenti, si nota immediatamente una caratteristica comune e cioé che tutti sono caratterizzati per mezzo di opportune fattorizzazioni del tipo $L^\infty \to L^p$ o $C(K) \to L^p$. Isolando questo aspetto, possiamo allora definire p-*fattorizzabile* ($1 \leq p \leq \infty$) un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ per il quale esistono operatori $S \in \mathscr{L}(E,L^p(X,\mu))$ e $R \in \mathscr{L}(L^p(X,\mu),F'')$ tali che

$$j_F T = RS, \tag{13}$$

ove j_F è, come al solito, l'isometria canonica di F in F''. Qui (X,μ) è un opportuno spazio dotato di misura, che possiamo sempre assumere positiva. Ovviamente, gli operatori ∞-fattorizabili non sono altro che gli operatori ∞-integrali. Denotiamo con $\mathscr{L}_p(E,F)$ *l'insieme di tutti gli operatori* p-*fattorizzabili* da E a F. Ponendo

$$\lambda_p(T) = \inf \|R\| \; \|S\| ,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le fattorizzazioni del tipo (13), otteniamo una norma su $\mathscr{L}_p(E,F)$. Per quanto detto sopra, $(\mathscr{L}_\infty,\lambda_\infty) = (\mathscr{I}_\infty,\iota_\infty)$.

Osserviamo inoltre che $T \in \mathscr{L}_2$ se e solo se T ammette una fattorizzazione del tipo (13) attraverso uno spazio di Hilbert. E' per questo che un tale operatore T è detto *operatore di Hilbert* e la classe $\mathscr{L}_2$ si denota anche con $\mathscr{H}$.

TEOREMA 8 - (a) $(\mathscr{L}_p,\lambda_p)$ *è un ideale normato completo.*

(b) $\mathscr{I}_p \subset \mathscr{L}_p$ *e* $\lambda_p \leq \iota_p$ *su* $\mathscr{I}_p$.

(c) $T \in \mathscr{L}_\infty(E,F)$ *se e solo se esistono un compatto* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(C(K),F'')$ *tali da aversi*

$$j_F T = RS.$$

(d) $T \in \mathscr{L}_2(E,F)$ *se e solo se esistono uno spazio di Hilbert* H *e operatori*

$S \in \mathscr{L}(E,H), R \in \mathscr{L}(H,F)$ *tali che*

$$T = RS.$$

(e) *Se* $1 < p < \infty$, $\mathscr{L}_p(H,H) = \mathscr{L}(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

La (a) è di facile verifica, per la (b) basta confrontare le fattorizzazioni (12) e (13), la (c) segue dall'identità $\mathscr{L}_\infty = \mathscr{I}_\infty$ e dalla definizione di operatori p-integrali, mentre la (d) si stabilisce con una dimostrazione simile a quella del Teorema 11(a) del §II.6 (cf. anche l'Osservazione 1 del §2). Infine la (e) proviene dalla fattorizzazione attraverso L^p degli spazi a dimensione finita ℓ^2_n (cf. [50], §§ 19.3 e 22.1).

Lo studio sistematico degli operatori in $\mathscr{L}_p$ fu intrapreso in [37], [33] e [40].

5 - Controesempi alla proprietà di approssimazione e loro conseguenze.

Riprendiamo adesso il problema dell'approssimazione trattato nei §§II.4 e II.5. Nel 1973 Enflo [10] pubblicò il suo famoso controesempio alla proprietà di approssimazione mostrando che esiste un sottospazio chiuso di c_0 senza la proprietà di approssimazione, con questo risolvendo negativamente il problema (P6) e quindi anche il problema della base (P5) (cf. §I.6) e il relazionato problema dell'approssimazione metrica (cioé se tutti gli spazi di Banach hanno la proprietà dell'approssimazione metrica, cf. § II.5).

Successivamente, vari autori hanno migliorato l'esempio di Enflo mostrando che anche gli spazi ℓ^p ($1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$) contengono sottospazi senza la proprietà di approssimazione, mentre Figiel e Johnson [11], sempre nel 1973, riuscivano a dimostrare l'esistenza di spazi di Banach aventi la proprietà dell'approssimazione ma non quella dell'approssimazione metrica. Per i dettagli, cf. [38] (vol. I, § 2 d e p. 42, vol. II, pp. 107-111).

In base ai Teoremi 8 e 9 del §II.4 l'esistenza di uno spazio di Banach E *senza la proprietà di approssimazione* ha le seguenti notevolissime conseguenze.

1) *L'applicazione* $X : E' \tilde{\otimes} E \to \mathscr{L}(E,E)$ *non è iniettiva* e quindi anche il problema (P7) del §II.1 è risolto negativamente.

2) *Le norme* π *e* ν_1 *non coincidono su* $E' \otimes E$, *e quindi la traccia non può essere estesa a* $\mathscr{N}_1(E,E)$. In altre parole, esiste $T \in \mathscr{N}_1(E,E)$ per il quale la traccia non può essere definita.

3) *Esiste un operatore* $T \in \mathscr{N}_1(c_0,c_0)$ *con* $T^2 = 0$ *e* $\mathrm{tr}(T) = 1$. Per un tale T gli autovalori sono evidentemente tutti nulli, quindi la traccia spettrale è nulla e non può ovviamente coincidere con $\mathrm{tr}(T)$. Pertanto anche il problema (P4) del §I.2 è risolto negativamente per il caso degli spazi di Banach.

4) *L'operatore* T *di cui al punto* 3) *può essere scelto come una matrice* $A = ((a_{kn}))$ *di scalari tale che* $A^2 = 0$, *per ogni* k *risulta* $a_{kn} \neq 0$ *solo per un numero finito di valori di* n *e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max |a_{kn}|)^p < \infty \qquad \textit{per ogni } p > \frac{2}{3} .$$

Osserviamo che in tale disuguaglianza non può prendersi $p \leq \frac{2}{3}$ perché allora l'operatore T apparterrebbe ad $\mathscr{N}_{2/3}$ e quindi la sua traccia coinciderebbe con la traccia spettrale, per il Teorema 13(b) del §II.7.

Infine, dal fatto che esiste uno spazio di Banach F per cui $\bar{\mathscr{F}}(F,E) \subsetneq \mathscr{K}(F,E)$ deduciamo il seguente fondamentale

TEOREMA 9 - $\mathscr{G} \subsetneq \mathscr{K}$.

Ricordiamo che $\mathscr{G}$ è la classe $(\bar{\mathscr{F}}, \|\ \|)$ degli operatori approssimabili introdotti al §1. E' naturale che l'inclusione propria asserita dal Teorema 9, conseguenza diretta dell'esempio di Enflo, abbia motivato uno studio intenso della classe $\mathscr{G}$. Qui ci limiteremo a dare le seguenti proprietà.

TEOREMA 10 - (a) $\mathscr{G}$ *è un ideale normato completo ed è il più piccolo ideale chiuso in* $\mathscr{L}$.

(b) $\mathscr{A}_p \subset \mathscr{G}$ *e* $\| \ \| \leq \alpha_p$ *su* $\mathscr{A}_p$ *per ogni* $p > 0$.

(c) $\mathscr{N}_p \subset \mathscr{G}$ *e* $\| \ \| \leq \nu_p$ *su* $\mathscr{N}_p$ *per ogni* $0 < p \leq \infty$.

(d) $T \in \mathscr{G}$ *se e solo se* $T' \in \mathscr{G}$.

(e) $T \in \mathscr{K}(E,F)$ *se e solo se* $J_F T \in \mathscr{G}(E,L^\infty)$.

(f) $T \in \mathscr{K}(E,F)$ *se e solo se* $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$.

(g) $\mathscr{G}(H,H) = \mathscr{K}(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le proprietà (a),(b),(c) e (g) sono più o meno evidenti. La (d) non lo è, in quanto dovuta alle (certamente non ovvie) uguaglianze $a_n(T) = a_n(T')$ per ogni $T \in \mathscr{K}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ (cf. [50], § 11.7.4 p. 152). Per la (e) osserviamo che se $T \in \mathscr{K}(E,F)$ allora $J_F T \in \mathscr{K}(E,L^\infty) = \mathscr{G}(E,L^\infty)$ dal momento che L^∞ ha la proprietà di approssimazione. Viceversa se $J_F T \in \mathscr{G}(E,L^\infty)$, allora $J_F T \in \mathscr{K}[E,J_F T(E)]$ quindi $T = J_F^{-1} J_F T \in \mathscr{K}[E,\overline{T(E)}]$ e, a fortiori, $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Infine, per la (f) notiamo che $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$ implica $TQ_E \in \mathscr{K}(L^1,F)$ e quindi $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Viceversa se $T \in \mathscr{K}(E,F)$, allora $TQ_E \in \mathscr{K}(L^1,F)$ e pertanto $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$ (cf. [28], Teorema 2, p. 404), dal momento che il duale L^∞ di L^1 ha la proprietà di approssimazione.

Concludiamo con la seguente

Osservazione - Siano E e F spazi di Banach tali che né E' né F hanno la proprietà di approssimazione metrica, ma F ha la proprietà di approssimazione (cf. [11]). Il Teorema 10 del §II.5 ci dice allora che l'applicazione $X : E' \tilde{\otimes} F \to [\mathscr{I}_1(E,F), \iota_1]$, che è iniettiva,non è isometrica e ciò implica che $[\mathscr{N}_1(E,F),\nu_1]$ non è un sottospazio normato di $[\mathscr{I}_1(E,F),\iota_1]$, in virtù dell'Osservazione 1 del §II.5.

Inoltre, in [11] Figiel e Johnson stabiliscono l'esistenza di un operatore

$T \notin \mathcal{N}_1$ tale che $T' \in \mathcal{N}_1$ (cf. l'Osservazione 2 del §II.2).

6 - Procedure.

Questo paragrafo è dedicato alla costruzione di nuovi ideali di operatori a partire da ideali dati. Non enumereremo tutti i metodi in esistenza, ma solo i più significativi. Una regola

$$r : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^r$$

che definisce un nuovo ideale $\mathcal{I}^r$ per ogni ideale $\mathcal{I}$ è chiamata *procedura* Menzioniamo due proprietà speciali delle quali godono molte procedure.

Monotonia se $\mathcal{I} \subset \mathcal{Y}$, allora $\mathcal{I}^r \subset \mathcal{Y}^r$.

Idempotenza $(\mathcal{I}^r)^r = \mathcal{I}^r$ per ogni $\mathcal{I}$.

Motivati dai Teoremi 7 e 8 del §I.5, dalle definizioni del §II.6 e, più in generale, dalle definizioni del §3 e dai Teoremi 7(e), 9 e 10, studieremo le seguenti procedure: *chiusura, duale, iniettiva* e *surgettiva*. Per il resto di questa Parte III invitiamo il lettore a tener presene per sua comodità la Tabella degli Ideali (considerati in questo testo) che abbiamo riportato a pp. 82-83.

1) Chiusura

Sia $\mathcal{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tra spazi di Banach appartiene alla *chiusura* $\bar{\mathcal{I}}$ se $T \in \bar{\mathcal{I}}(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$.

E' chiaro che $\bar{\mathcal{I}}$ *è un ideale di operatori* e che *la regola*

$$c : \mathcal{I} \to \bar{\mathcal{I}}$$

è una procedura monotona e idempotente. Naturalmente, un ideale $\mathcal{I}$ è *chiuso* se e solo se $\mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}$. La chiusura è la più antica delle procedure ed abbiamo il seguente

TEOREMA 11 - (a) *Gli ideali* $\mathscr{G}, \mathscr{K}, \mathscr{V}, \mathscr{W}$ *sono chiusi.*

(b) $\bar{\mathscr{A}}_p = \bar{\mathscr{F}} = \bar{\mathscr{N}}_p = \bar{\mathscr{N}}_o = \mathscr{G}$.

(c) $\bar{\mathscr{Q}}_p = \mathscr{K}$.

(d) $\mathscr{I}(\lambda) = \bar{\mathscr{S}}_p = \mathscr{G} = \mathscr{K}$ *per spazi di Hilbert.*

Per la (a) osserviamo che $\mathscr{G}$ è chiuso per definizione ed è il più piccolo ideale chiuso, mentre $\mathscr{K}$, $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ sono chiusi per il Teorema 7 del §I.5. (b) e (d) seguono dal fatto che gli ideali in questione contengono $\mathscr{F}$ e sono contenuti in $\mathscr{G}$, mentre la (c) segue dal Teorema 6.

2) Duale

Sia $\mathscr{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene al duale $\mathscr{I}^d$ se $T' \in \mathscr{I}(F',E')$. $\mathscr{I}^d$ *è un ideale di operatori* e *la regola*

$$d : \mathscr{I} \to \mathscr{I}^d$$

è una procedura monotona. Si noti che *tale procedura non è idempotente* perché, in generale, $\mathscr{I}$ e $(\mathscr{I}^d)^d$ *non sono comparabili.* Infatti, per quanto detto alla fine dell'Osservazione del §5, vi sono operatori $T \notin \mathscr{N}_1$ con $T' \in \mathscr{N}_1$. Ne segue, per il Teorema 3(c) del §II.2, che $\mathscr{N}_1 \subsetneqq \mathscr{N}_1^d$. Ma allora $\mathscr{N}_1^d \subset \mathscr{N}_1^{dd}$ per la monotonia e quindi $\mathscr{N}_1 \subsetneqq \mathscr{N}_1^{dd}$. D'altra parte, se χ è l'ideale degli operatori $T \in \mathscr{L}(E,F)$ con $T(E)$ separabile, è chiaro che $\chi^{dd} \subsetneqq \chi$ (ed infatti l'identità di c_o o ℓ^1 appartiene a χ ma non a χ^{dd}). Un ideale $\mathscr{I}$ è detto *simmetrico* se $\mathscr{I} = \mathscr{I}^d$.

TEOREMA 12 - *I seguenti ideali sono simmetrici:* $\mathscr{A}_p, \mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}, \mathscr{I}_1, \mathscr{I}(\lambda), \mathscr{K}, \mathscr{N}_o, \mathscr{S}_p, \mathscr{W}$.

Si noti che, in generale, $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}^d$ sono incomparabili come mostra il seguente esempio. E' ben noto che in ℓ^1 ogni successione debolmente convergente è anche fortemente convergente, ma ciò non è vero in c_0 e quindi anche in ℓ^∞. Ne segue che l'identità di ℓ^1 appartiene a $\mathscr{V}$ ma non a $\mathscr{V}^d$, mentre l'identità di c_0 appartiene a $\mathscr{V}^d$ ma non a $\mathscr{V}$.

3) <u>Iniettiva</u>

Sia $\mathscr{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo iniettivo* $\mathscr{I}^i$ se $J_F T \in \mathscr{I}(E,L^\infty)$. $\mathscr{I}^i$ *è un ideale di operatori*, ovviamente contenente $\mathscr{I}$, e *la regola*

$$i : \mathscr{I} \to \mathscr{I}^i$$

è una procedura monotona e idempotente. $\mathscr{I}$ si dice *iniettivo* se $\mathscr{I} = \mathscr{I}^i$.

TEOREMA 13 - (a) *I seguenti ideali sono iniettivi:* $\mathscr{F}, \mathscr{H}, \mathscr{K}, \mathscr{N}_0, \mathscr{P}_p, \mathscr{Q}_p, \mathscr{V}, \mathscr{W}$.

(b) $\mathscr{G}^i = \mathscr{K}$, $\mathscr{I}_p^i = \mathscr{P}_p$ $(1 \leq p < \infty)$, $\mathscr{N}_p^i = \mathscr{Q}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

L'iniettività di ciascuno degli ideali $\mathscr{F}, \mathscr{H}, \mathscr{K}, \mathscr{N}_0, \mathscr{V}, \mathscr{W}$ è o evidente, o ben nota oppure facile a dimostrarsi. Le due ultime uguaglianze nella (b) seguono dalle definizioni e quindi implicano l'iniettività di $\mathscr{P}_p$ e $\mathscr{Q}_p$, essendo tale procedura idempotente. Infine, dalla $\mathscr{G} \subset \mathscr{K}$ segue $\mathscr{G}^i \subset \mathscr{K}$ mentre l'inclusione opposta deriva dal fatto che ogni spazio L^∞ ha la proprietà di approssimazione.

4) <u>Surgettiva</u>

Sia $\mathscr{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo surgettivo* $\mathscr{I}^s$ se $TQ_E \in \mathscr{I}(L^1,E)$. $\mathscr{I}^s$ *è un ideale di operatori*, ovviamente contenente $\mathscr{I}$, e *la regola*

$$s : \mathscr{I} \to \mathscr{I}^s$$

è una procedura monotona e idempotente. $\mathscr{I}$ si dice *surgettivo* se $\mathscr{I} = \mathscr{I}^s$.

TEOREMA 14 - (a) *Gli ideali* $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{N}_o, \mathcal{W}$ *sono surgettivi.*

(b) $\mathcal{G}^s = \mathcal{K}$, $\mathcal{V}^s = \mathcal{L}$.

La (a) è ben nota eccetto per $\mathcal{H}$, per il quale segue dal Teorema 13(a) e dal Teorema 15 più in basso. Chiaramente $\mathcal{G}^s \subset \mathcal{K}$, mentre l'inclusione opposta segue dal fatto che il duale di L^1 ha la proprietà di approssimazione. Infine l'inclusione $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^s$ può essere stabilita notando che, se $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora E può essere rappresentato come il quoziente di uno spazio $\ell^1(\Lambda)$ (ove Λ è un insieme opportuno di indici) e per quest'ultimo spazio l'identità appartiene a $\mathcal{V}$, come osservato subito dopo il Teorema 12.

Ovviamente le procedure 3) e 4) non hanno senso per gli ideali hilbertiani $\mathcal{I}(\lambda)$ e $\mathcal{S}_p$.

Concludiamo questo paragrafo notando che iniettività e surgettività sono proprietà duali, dal momento che vale il seguente

TEOREMA 15 - *Per ogni ideale* $\mathcal{I}$ *risulta*

$$\mathcal{I}^{is} = \mathcal{I}^{si}, \quad \mathcal{I}^{ds} = \mathcal{I}^{id} \quad e \quad \mathcal{I}^{di} \subset \mathcal{I}^{si},$$

l'inclusione a destra potendo essere propria. Ne segue che se $\mathcal{I}$ *è iniettivo (risp. surgettivo), allora* $\mathcal{I}^d$ *è surgettivo (risp. iniettivo) e che, pertanto, iniettività e surgettività sono equivalenti per ogni ideale simmetrico.*

7 - Relazioni tra ideali.

I vari teoremi che abbiamo riportato sugli ideali qui trattati mostrano che esistono molte relazioni di inclusione tra questi ideali. Per comodità del lettore illustriamo queste relazioni nella Tabella delle Inclusioni riportata a p. 84 , ove le frecce indicano inclusione. Ci sembra doveroso, a questo proposito, fare un certo numero di osservazioni, specialmente a proposito delle inclusioni più significative o sorprendenti. Con riferimento alla Tabella delle Inclusioni procederemo dall'alto verso il basso.

Osservazione 1 - *Tutte le inclusioni sono proprie,* in generale: ciò è evidente per la maggior parte di esse, mentre per le restanti daremo esempi in seguito.

Osservazione 2 - *Per ogni ideale* $\mathcal{I}$ *e numeri reali* $0 < s < t < \infty$ *si ha* $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}_t$, *l'inclusione essendo propria.* Ciò è di facile verifica eccetto per $\mathcal{P}_s$ e $\mathcal{I}_s$ $(1 \leq s < \infty)$. Ora il caso di $\mathcal{I}_s$ segue da quello di $\mathcal{P}_s$ (Teorema 7(e)) e per quest'ultimo si può dimostrare che l'iniezione canonica $C(K) \to L^t(K,\mu)$ $(1 < t < \infty)$, che appartiene a $\mathcal{P}_t$ per l'Osservazione 2 del §2, non appartiene a nessun ideale $\mathcal{P}_s$ con $1 \leq s < t$ (cf., per esempio, [27], Exercise 2.E.3 p. 123).

Osservazione 3 - Le inclusioni, e il fatto di essere proprie, sono tutte o evidenti, o conseguenza dei teoremi enunciati e delle osservazioni fatte, con eccezione forse delle seguenti: $\mathcal{N}_r \to \mathcal{A}_{\frac{r}{1-r}}$ per $0 < r < 1$ e

$\mathcal{Q}_s \to \mathcal{P}_s$, $\mathcal{I}_s \to \mathcal{L}_s$ per $1 \leq s < \infty$. Ora, abbiamo già visto che $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{L}_s$ e

$\mathcal{Q}_s \subset \mathcal{P}_s$; d'altra parte la prima inclusione è ovviamente propria perché l'identità I_s di L^s appartiene a $\mathcal{L}_s$ ma certo non a $\mathcal{I}_s$ (che altrimenti $I_s = I_s^2$ sarebbe nucleare per il Teorema 7(d) del §II.3, quindi compatta e perciò L^s avrebbe dimensione finita), mentre la seconda lo è perché l'iniezione canonica $C(K) \to L^s(K,\mu)$ appartiene a $\mathcal{P}_s$ ma non a $\mathcal{Q}_s$ dal momento che non è compatta (ricordiamo che $\mathcal{Q}_s \subset \mathcal{K}$ per ogni s).

Mostriamo ora che $\mathcal{N}_r \subset \mathcal{A}_{\frac{r}{1-r}}$ per $0 < r < 1$. Se $T \in \mathcal{N}_r(E,F)$ allora

$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \langle x,x'_k\rangle y_k$ con $(x'_k) \subset B_{E'}$, $(y_k) \subset B_F$ e $(\xi_k) \in \ell^r$. Supponendo la successione (ξ_k) non negativa e non crescente, cosa che possiamo sempre fare, abbiamo (cf.§1)

$$a_n(T) \leq \sup_{x \in B_E} \| \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \langle x,x'_k\rangle y_k \| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^{1-r} \xi_k^r \leq \xi_n^{1-r} \|(\xi_k)\|_r$$

e quindi $(a_n(T)) \in \ell^{\frac{r}{1-r}}$, cioé $T \in \mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}}$ e $\mathscr{N}_r \subset \mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}}$. Per vedere che l'inclusione è propria basta considerare il caso degli spazi di Hilbert, nel quale abbiamo, dato che $\frac{r}{1-r} > r$, $\mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}} = \mathscr{S}_{\frac{r}{1-r}} \supsetneqq \mathscr{S}_r = \mathscr{N}_r$ per il Teorema 1(e) e il Teorema 12 del §II.7.

Infine, $\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{G}$ ma $\mathscr{N}_1 \not\subset \mathscr{A}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ poiché $\mathscr{N}_1(\ell^\infty,\ell^1) \not\subset \mathscr{A}_p(\ell^\infty,\ell^1)$ $(1 \leq p < \infty)$: basta considerare, come nell'Osservazione 5 più in basso, un operatore diagonale $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ tale che $(\xi_n) \in \ell^1$ ma la successione $(a_n(D_\xi))$ nella (14) non appartenga a nessun ℓ^p con $p < \infty$

Osservazione 4 - Non è strano che $\mathscr{P}_2 \not\subset \mathscr{A}_2$ dato che $\mathscr{P}_2$ contiene operatori non compatti. Quello che può forse sorprendere è che pure $\mathscr{A}_2 \not\subset \mathscr{P}_2$, dal momento che $\mathscr{A}_2$ contiene solo operatori compatti in un senso molto "forte". Un esempio di operatore in $\mathscr{A}_2$ ma non in $\mathscr{P}_2$ è fornito dall'operatore diagonale D_ξ $: \mathscr{L}(\ell^2,\ell^1)$ definito da

$$D_\xi\,(\eta_n) = (\xi_n\,\eta_n)$$

ove $\xi_n = [n \log (n+1)]^{-1}$. Infatti abbiamo

$$a_n(D_\xi) \leq \sup_{(\eta_n)\in B_{\ell^2}} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k |\eta_k| \leq (\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(D_\xi)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k^2 < \infty$$

D'altra parte, se fosse anche $D_\xi \in \mathscr{P}_2$ allora, dal momento che l'iniezione canonica $J : \ell^1 \to \ell^2$ appartiene a $\mathscr{P}_2$, si avrebbe $D_\xi J \in \mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{N}_1$ (per il Teorema 18(i) del prossimo paragrafo), cioé $D_\xi \in \mathscr{N}_1$ come operatore $\ell^1 \to \ell^1$. Ma non è difficile vedere che un operatore diagonale $D_\xi \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^1)$ è nucleare se e solo se $(\xi_n) \in \ell^1$, il che non è vero per la successione (ξ_n) considerata.

Osservazione 5 - Quest'ultima osservazione è forse la più importante. Il Teorema 13(b) del §II.7 e il Teorema 2, relativi alla traccia, invitano a confrontare gli ideali $\mathscr{N}_{2/3}$ e $\mathscr{A}_1$ per vedere se l'un teorema non possa dedursi dall'altro. Ciò non è il caso perché gli ideali $\mathscr{N}_{2/3}$ e $\mathscr{A}_1$ non sono comparabili, come procediamo a mostrare. Intanto non è difficile far vedere che un operatore diagonale $D_\xi \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^1)$ appartiene a $\mathscr{A}_1$ se e solo se appartiene a $\mathscr{N}_1$ e quindi se e solo se $(\xi_n) \in \ell^1$. Basta pertanto prendere (ξ_n) in ℓ^1 ma non in $\ell^{2/3}$ per ottenere un operatore in $\mathscr{A}_1$ e non in $\mathscr{N}_{2/3}$. Inversamente, sia $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ l'operatore diagonale associato alla successione $\xi_n = [n^{\frac{3}{2}} \log(n+1)]^{-3}$. Poiché $(\xi_n) \in \ell^{2/3}$, abbiamo $D_\xi \in \mathscr{N}_{2/3}$. D'altra parte (ma ciò è tutt'altro che immediato), si ha

$$a_n(D_\xi) = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(D_\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [k^{\frac{1}{2}} \log^3(k+1)]^{-1} = +\infty$$

e pertanto $D_\xi \notin \mathscr{A}_1$.

Resta così stabilita l'incomparabilità degli ideali $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{N}_{2/3}$. Possiamo solo dire che entrambi sono propriamente contenuti in $\mathscr{A}_2$, per le Osservazioni 2 e 3.

8 - Teoremi di moltiplicazione

Per finire, consideriamo brevemente alcuni esempi tra i più significativi dei cosiddetti "Teoremi di moltiplicazione", cioé delle relazioni che si ottengono quando si compongono due operatori appartenenti allo stesso ideale o a ideali diversi.

Cominciamo col definire *idempotente* ogni ideale $\mathscr{I}$ per il quale si abbia $\mathscr{I}^2 = \mathscr{I}$. Ovviamente risulta sempre $\mathscr{I}^2 \subset \mathscr{I}$ e quindi per dimostrare l'idempotenza di un ideale $\mathscr{I}$ basta far vedere che $\mathscr{I} \subset \mathscr{I}^2$.

Sussiste il seguente

TEOREMA 16 - *Gli ideali* $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H},\mathscr{K}$, $\mathscr{L}_p$,$\mathscr{N}_0$,$\mathscr{W}$ *sono idempotenti, mentre gli altri non lo sono (ma* $\mathscr{I}(\lambda)$ *lo è per certi spazi* λ).

Infatti, supponiamo per cominciare che $T \in \mathscr{F}(E,F)$. Allora $\dim T(E) < \infty$ e quindi l'iniezione canonica $I : T(E) \to F$ appartiene a $\mathscr{F}(T(E),F)$. Denotando con T_0 l'operatore T pensato come operatore da E a T(E), risulta allora $T_0 \in \mathscr{F}(E,T(E))$ e $T = IT_0$. Dunque $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^2$.

L'idempotenza di $\mathscr{N}_0$ segue dal Teorema 14(d) del §II.7 e dal fatto che ogni successione in s può scriversi come il prodotto di due successioni in s mentre $\mathscr{H}$ è idempotente perché entrambi gli operatori che intervengono nella fattorizzazione del Teorema 8(d) appartengono a $\mathscr{H}$.

Per $\mathscr{W}$ osserviamo che $T \in \mathscr{W}(E,F)$ *se e solamente se* $T = RS$, *con* $S \in \mathscr{L}(E,G)$ *e* $R \in \mathscr{L}(G,F)$, G *essendo uno spazio di Banach riflessivo* [6].

Ma allora $S \in \mathscr{W}(E,G)$, $R \in \mathscr{W}(G,F)$ e quindi $\mathscr{W} \subset \mathscr{W}^2$.

L'idempotenza di $\mathscr{K}$ segue dal ben noto fatto che per ogni sottoinsieme compatto A di uno spazio di Banach F può trovarsi un insieme compatto e assolutamente convesso $B \subset F$ tale che A sia sottoinsieme compatto dello spazio di Banach F_B generato da B.

Passiamo adesso ad $\mathscr{L}_p$. Usando la definizione, dato $T \in \mathscr{L}_p(E,F)$ per la (13) abbiamo $j_F T = RS$, con $S \in \mathscr{L}(E,L^p)$, $R \in \mathscr{L}(L^p,F'')$ e j_F l'isometria canonica di F in F". Sia I_p l'identità di L^p. Siccome, ovviamente $I_p \in \mathscr{L}_p$, abbiamo $S = I_p S \in \mathscr{L}_p$. Sia poi R_o la restrizione di R alla chiusura $\overline{S(E)}$ in L^p. Evidentemente $R_o \in \mathscr{L}(\overline{S(E)},F)$ e esiste $R \in \mathscr{L}(L^p,F'')$ tale che $j_F R_o = R$. Denotando con I_o l'iniezione canonica di $\overline{S(E)}$ in L^p, ne segue allora che $j_F R_o = R I_o$ e quindi che $R_o \in \mathscr{L}_p$. Dunque $T = RS = R_o S \in \mathscr{L}_p^2$.

Infine, per $\mathscr{G}$ procediamo come segue. Dato $T \in \mathscr{G}(E,F)$ e $\varepsilon > 0$, sia $(T_n) \subset \mathscr{F}(E,F)$ una successione di operatori tali da aversi

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| \leq (1+\varepsilon)\|T\| .$$

Si scelgano allora operatori $S_n \in \mathscr{F}(E,G_n)$ e $R_n \in \mathscr{F}(G_n,F)$ tali che $T_n = R_n S_n$ e $\|R_n\| = \|S_n\| = \|T_n\|^{\frac{1}{2}}$, ove i G_n sono spazi di Banach opportuni. Sia

$$G = \ell^2(G_n) = \{(x_n) : x_n \in G_n \text{ e } \|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{G_n}^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

e siano J_n e Q_n rispettivamente l'iniezione canonica $G_n \to G$ e la proiezione canonica $G \to G_n$. Ponendo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} J_n S_n \qquad e \qquad R = \sum_{n=1}^{\infty} R_n Q_n \quad ,$$

risulta

$$\|R\| = \|S\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|\right)^{\frac{1}{2}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|T\|^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre $S \in \mathscr{G}(E,G)$, $R \in \mathscr{G}(G,F)$ e finalmente, $T = RS \in \mathscr{G}^2(E,F)$.

E' bene notare che gli ideali hilbertiani $\mathscr{I}(\lambda)$ sono idempotenti solo per certi spazi λ di successioni (cioé per spazi λ tali che $\lambda = \lambda^2$), mentre il fatto che i rimanenti ideali non siano idempotenti sarà conseguenza più o meno ovvia dei teoremi che daremo in seguito.

Veniamo adesso ad alcuni teoremi notevoli di moltiplicazione per i quali rinviamo il lettore a [50] (sebbene qui i risultati siano sparsi un po' ovunque).

TEOREMA 17 - (a) $\mathscr{A}_p \circ \mathscr{A}_q = \mathscr{A}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $0 < p,q < \infty$.

(b) $\mathscr{I}_p \circ \mathscr{I}_q \subset \mathscr{I}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

(c) $\mathscr{L}_p \circ \mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_r$, $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$.

(d) $\mathscr{N}_p \circ \mathscr{N}_q \subset \mathscr{N}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(e) $\mathscr{P}_p \circ \mathscr{P}_q \subset \mathscr{P}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(f) $\mathscr{Q}_p \circ \mathscr{Q}_q \subset \mathscr{Q}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(g) $\mathscr{S}_p \circ \mathscr{S}_q = \mathscr{S}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $0 < p,q < \infty$

TEOREMA 18 - (a) $\mathscr{K} \circ \mathscr{L}_1 \subset \mathscr{P}_1$.

(b) $\mathscr{I}_p \circ \mathscr{N}_q = \mathscr{N}_r$ e $\mathscr{I}_p \circ \mathscr{P}_q = \mathscr{I}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

(c) $\mathscr{K} \circ \mathscr{I}_p = \mathscr{N}_p$ e $\mathscr{K} \circ \mathscr{P}_p \circ \mathscr{K} = \mathscr{Q}_p$, $1 \leq p < \infty$.

(d) $\mathcal{L}_p \circ \mathcal{P}_p^d \subset \mathcal{I}_p, \quad 1 \leq p < \infty.$

(e) $\mathcal{N}_p \circ \mathcal{I}_q, \mathcal{N}_p \circ \mathcal{N}_q, \mathcal{N}_p \circ \mathcal{P}_q \subset \mathcal{N}_r, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty.$

(f) $\mathcal{P}_p \circ \mathcal{I}_q \subset \mathcal{N}_r, \; \mathcal{P}_p \circ \mathcal{N}_q \subset \mathcal{V}_r$ e $\mathcal{P}_p \circ \mathcal{P}_q \subset \mathcal{Q}_r, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1,$

$1 < p, q < \infty.$

(g) $\mathcal{P}_p \circ \mathcal{P}_q = \mathcal{P}_r \circ \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2^2 \subset \mathcal{A}_2, \; 1 \leq p,q,r \leq 2.$

(h) $\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{H} \subset \mathcal{A}_2$.

(i) $\mathcal{P}_2^2 \subset \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{A}_2$, *ma* $\mathcal{P}_2^2 \not\subset \mathcal{A}_p$ $(0 < p < 2)$.

(l) $\mathcal{V} \circ \mathcal{W} = \mathcal{K}$ e $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{W} \circ \mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{V}$.

(m) $\mathcal{W} \circ \mathcal{I}_1 = \mathcal{N}_1$, *ma* $\mathcal{W} \circ \mathcal{I}_p \not\subset \mathcal{N}_p$ $(1 < p < \infty)$.

(n) $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}_p = \mathcal{P}_p, \quad 1 < p < \infty$.

Le dimostrazioni di quasi tutti i risultati enunciati nei due teoremi precendenti sono estremamente tecniche e pertanto qui ci limiteremo a fare solo alcuni commenti e a dare qualcuna delle dimostrazioni meno tecniche. Riguardo al Teorema 18, la (a), la (i) (nella forma $\mathcal{P}_1^2 \subset \mathcal{N}_1$) e la uguaglianza nella (m) sono tre famosi risultati di Grothendieck, ciascuno dei quali è conosciuto con il nome di "Teorema Fondamentale di Grothendieck" (la situazione fa un po' pensare a Weierstrass!). La prima parte della (m) era già stata menzionata (Teorema 7(d) del §II.3), mentre l'inclusione $\mathcal{P}_2^2 \subset \mathcal{N}_1$ era stata essenzialmente dimostrata, seppur nella forma $\mathcal{P}_1^2 \subset \mathcal{N}_1$, nel Teorema 11(c) del §II.6. Per vedere che si ha anche $\mathcal{P}_2^2 \subset \mathcal{A}_2$, ricordando l'Osservazione 1 del § 2 basta considerare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T_2"] \arrow[d, "S_2"'] & & F \arrow[rr, "T_1"] \arrow[dr, "S_1"] & & G \\
C(K_2) \arrow[r, "J_2"'] & L^2 \arrow[ur, "R_2"'] & & C(K_1) \arrow[r, "J_2"'] & L^2 \arrow[u, "R_1"']
\end{tikzcd}$$

Dato che $J_2 \in \mathscr{P}_2(C(K),L^2)$, abbiamo $J_2S_1R_2 \in \mathscr{P}_2(L^2,L^2) = \mathscr{S}_2(L^2,L^2) =$ $= \mathscr{A}_2(L^2,L^2)$ per i Teoremi 1(e) e 4(d) e quindi $T_1T_2 = R_1(J_2S_1R_2)J_2S_2 \in \mathscr{A}_2(E,G)$.

Naturalmente questo tipo di dimostrazione implica pure la (h), mentre la (g) può essere ottenuta nel modo seguente. In primo luogo osserviamo che i primi tre ideali nella (g) sono contenuti in $\mathscr{P}_2^2$. Supponiamo poi che siano dati $T_2 \in \mathscr{P}_2(E,F)$ e $T_1 \in \mathscr{P}_2(F,G)$ e consideriamo di nuovo il diagramma di fattorizzazione di cui sopra. Dato che le iniezioni canoniche J_2 appartengono a $\mathscr{P}_2$ abbiamo per la (i) $J_2S_1T_2=J_2S_1R_2J_2S_2 \in \mathscr{N}_1(E,L^2)= \mathscr{N}_1(E,\ell^2)$. Poniamo $J_2S_1T_2=T$. Allora, per il Teorema 3(e) del §II.2 esisteranno $R \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^2)$, $S \in \mathscr{L}(E,\ell^\infty)$ e un operatore diagonale $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$, con $(\xi_n) \in \ell^1$, tali da aversi $T=RD_\xi S$ e quindi

$T_1T_2 = R_1T = R_1RD_\xi S$. Ma $D_\xi \in \mathscr{N}_1(\ell^\infty,\ell^1)$ e $R \in \mathscr{P}_1(\ell^1,\ell^2) = \mathscr{L}(\ell^1,\ell^2)$ (uguaglianza profonda per la cui dimostrazione, di natura tecnica rimandiamo a [38] (vol. I, pp. 69-70)); pertanto $T_1T_2 \in \mathscr{P}_1 \circ \mathscr{N}_1$. Ciò implica immediatamente $\mathscr{P}_r \circ \mathscr{N}_1 = \mathscr{P}_p \circ \mathscr{P}_q = \mathscr{P}_2^2$, per quanto detto sopra. A questo punto resta da far vedere che $\mathscr{P}_2^2 \subset \mathscr{N}_2^2$ e quindi, continuando nella dimostrazione, ripren-

La (d) è più o meno da aspettarsi e non è troppo difficile da dimostrare, mentre la dimostrazione delle (b), (c) e (e) è abbastanza tecnica e di vasta portata. Per concludere, dimostriamo la (f). Per la (c) del Teorema 18 abbiamo

$$\mathcal{Q}_p \circ \mathcal{Q}_q = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K}$$
$$\subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{W} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K}$$
$$\subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_r \circ \mathcal{K}_r \circ \mathcal{Q}_r$$

ove abbiamo usato i Teoremi 16, 18(n) e 17(e).

9 - Problemi aperti

Terminiamo questa schematica della teoria degli operatori enumerando alcuni problemi aperti, che possono servire da incentivo per lo studente, per lo studioso e pure per il cultore della materia.

1) Il problema di restrizione

Dato un ideale $\mathcal{I}$, determinare la sua componente $\mathcal{I}(H,H)$, H essendo uno spazio di Hilbert.

I teoremi enunciati nel testo forniscono la soluzione per tutti gli ideali ivi considerati.

2) Il problema di estensione

Dato un ideale hilbertiano $\mathcal{I}_0$, un ideale $\mathcal{I}$ tra spazi di Banach si chiama *estensione* di $\mathcal{I}_0$ se $\mathcal{I}(H,H) = \mathcal{I}_0(H,H)$ per ogni spazio di Hilbert H. Per esempio, l'ideale $\mathcal{F}(H,H)$ ammette una unica estensione, cioé $\mathcal{F}$. Lo stesso è vero per $\mathcal{S}_0$ $(= \mathcal{I}(\ell^1))$, la cui unica estensione è $\mathcal{N}_0$. Si noti a questo proposito che il problema della determinazione degli ideali hilbertiani $\mathcal{I}(\lambda)$ aventi una unica estensione è stato completamente risolto di recente dagli autori in [42]. Ne segue che, al di fuori di tali casi, un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_0(H,H)$ possiede un'infinità (in generale) di estensioni diverse e si tratta di determinarne almeno alcune. Per esempio, $\mathscr{S}_1(H,H)$ ha come estensioni $\mathscr{A}_1, \mathscr{I}_1$ e $\mathscr{N}_1$, mentre $\mathscr{S}_2(H,H)$ ha, tra le altre, le estensioni $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{I}_p$ $(1 < p \leq \infty)$, $\mathscr{N}_p$ $(1 < p \leq \infty)$, $\mathscr{P}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\mathscr{Q}_p (1 \leq p < \infty)$. Sarebbe interessante, a questo proposito, determinare la "migliore" estensione di $\mathscr{S}_2$ (ma è chiaro che la interpretazione del termine "migliore" è una profonda questione filosofica!).

3) Il problema delle estensioni particolari

Tale problema è intimamente connesso con il problema precedente. Dato un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_0$, si possono automaticamente formare varie estensioni di $\mathscr{I}_0$ a ideali tra spazi di Banach. Qui ci limiteremo ad accennare alle due più importanti.

Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene alla *estensione superiore* $\mathscr{I}_0^{\sup}$ di $\mathscr{I}_0$ se $RTS \in \mathscr{I}_0(H,H)$ per tutti gli $S \in \mathscr{L}(H,E)$ e $R \in \mathscr{L}(F,H)$ (come al solito, qui prendiamo lo stesso spazio di Hilbert H, di accordo con l'Osservazione del §I.3).

Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene alla *estensione inferiore* $\mathscr{I}_0^{\inf}$ di $\mathscr{I}_0$ se esistono uno spazio di Hilbert H e operatori $S \in \mathscr{L}(E,H)$, $T_0 \in \mathscr{I}_0(H,H)$ e $R \in \mathscr{L}(H,F)$ tali che $T = RT_0S$.

Abbiamo allora il seguente semplicissimo.

TEOREMA 19 - $\mathscr{I}_0^{\sup}$ *e* $\mathscr{I}_0^{\inf}$ *sono rispettivamente la più grande e la più piccola estensione di* $\mathscr{I}_0$.

Ciò significa che se $\mathscr{I}$ è una qualunque estensione di $\mathscr{I}_0$, allora risulta necessariamente $\mathscr{I}_0^{\inf} \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{I}_0^{\sup}$, come il lettore non avrà alcuna difficoltà a provare.

Dato allora un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_o$, sorge il problema di determinare le sue estensioni "privilegiate" $\mathscr{I}_o^{sup}$ e $\mathscr{I}_o^{inf}$. E' bene ricordare che $\mathscr{S}_o$ ammette un'unica estensione, cioé $\mathscr{N}_o$, e che le estensioni superiore e inferiore degli ideali di von Neumann $\mathscr{S}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ sono tutte determinate, benché non rientrino tra gli ideali considerati in questo testo(infatti, $\mathscr{S}_p^{inf} = \mathscr{N}_{(p,2,2)}$ e $\mathscr{S}_p^{sup} = \mathscr{P}_{(p,2,2)}$. Per dare un'idea della difficoltà del problema ci limitiamo a osservare che

$$\mathscr{S}_\infty^{inf} \subsetneq \mathscr{G} \subsetneq \mathscr{K} \subsetneq \mathscr{V} \subsetneq \mathscr{S}_\infty^{sup} .$$

Infatti, è chiaro che $\mathscr{S}_\infty^{inf} \subset \mathscr{G}$. Ma l'estensione inferiore è iniettiva e surgettiva ([50], p.219), mentre $\mathscr{G}$ non lo è (Teoremi 13 e 14) e ciò prova la prima inclusione propria. Le altre sono già state dimostrate eccetto l'ultima. Ora, se $T \in \mathscr{V}(E,F)$ e $S \in \mathscr{L}(H,E)$, $R \in \mathscr{L}(F,H)$, allora, essendo $S \in \mathscr{W}(H,E)$, risulta $TS \in \mathscr{K}(H,F)$ per il Teorema 18(1) e quindi $RTS \in \mathscr{K}(H,H) = \mathscr{S}_\infty(H,H)$, cioé $T \in \mathscr{S}_\infty^{sup}$. Dunque $\mathscr{V} \subset \mathscr{S}_\infty^{sup}$. D'altra parte, sia I_p l'identità di ℓ^p per $1 < p < 2$ (risp. $2 < p < \infty$) e siano $S \in \mathscr{L}(\ell^2,\ell^p)$, $R \in \mathscr{L}(\ell^p,\ell^2)$. Per un risultato di H.R. Pitt, $S \in \mathscr{K}(\ell^2,\ell^p)$ (risp. $R \in \mathscr{K}(\ell^p,\ell^2)$ e quindi $RI_pS \in \mathscr{K}(\ell^2,\ell^2) = \mathscr{S}_\infty(\ell^2,\ell^2)$, cioé $I_p \in \mathscr{S}_\infty^{sup}$. Ma $I_p \notin \mathscr{V}$ e quindi $\mathscr{V} \subsetneq \mathscr{S}_\infty^{sup}$.

4) <u>Il problema delle procedure</u>

Considerata una qualsiasi delle procedure delineate al §6 si pone il problema di determinare (se possibile più o meno "intrinsecamente") il nuovo ideale da essa generato. Con questo intendiamo porre il problema di determinare, a partire da un dato ideale $\mathscr{I}$, gli ideali $\bar{\mathscr{I}}, \mathscr{I}^d, \mathscr{I}^i$ e $\mathscr{I}^s$. Naturalmente, dato che le varie procedure non sono commutative in generale, tale problema può essere allargato a quello di determinare, per un dato ideale $\mathscr{I}$, ideali della forma $(((\bar{\mathscr{I}})^d)^i)^s$ ecc., e da qui la possibilità di infinite tesi tendenti ad accertare fantasmagoriche relazioni di appartenenza o fattorizzazione. Rincarando la dose, notiamo che le quattro procedure a cui abbiamo accennato nel §6 non esauriscono le procedure conosciute, né tanto meno quelle che possono essere inventate. Dunque, ci sono dei problemi reali, mentre si possono inventare molti di più problemi fittizi.

5) Il problema delle scale

I Teoremi 17 e 18 suggeriscono il cosiddetto "problema delle scale", cioé il problema di investigare le relazioni di composizione e inclusione tra ideali di operatori appartenenti alla stessa scala (p.e. $\mathscr{I}_p, \mathscr{N}_p, \mathscr{P}_p$ ecc.) o a scale differenti, e di stabilire se le eventuali inclusioni siano proprie o meno. Tale problema comprende, in particolare, il "problema del prodotto", cioé il problema di determinare (più o meno esattamente) l'ideale $\mathscr{I} \circ \mathscr{Y}$ a partire da due ideali dati $\mathscr{I}$ e $\mathscr{Y}$.

Osservazione - Per i problemi 1),2) e 5) si hanno già moltissimi risultati che danno risposte per la maggior parte degli ideali di interesse (non solo per quelli qui considerati).

A nostro parere, i problemi 1) e 2) sono fondamentali. Il 3) è importante (perché permette di controllare il 2) in qualche modo), ma piuttosto "sfuggente" e forse addirittura intrattabile in alcuni casi e ciò vale pure per i problemi 4) e 5).

TABELLA DEGLI IDEALI

Simbolo	Definizione	Fattorizzazione	Componente su H
$\mathscr{A}_p$	operatori p-approssimabili $\xRightarrow{(0<p\leq 1)}$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \\ \ell^\infty \arrow[r, "D_\xi"'] & \ell^1 \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_p$ $(0<p<\infty)$
$\mathscr{F}$	operatori di rango finito		$\mathscr{F}$
$\mathscr{G}$	operatori approssimabili		$\mathscr{K}$
$\mathscr{H}$	operatori di Hilbert $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & F \\ & H \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$	$\mathscr{L}$
$\mathscr{I}_p$	operatori p-integrali $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "j_F"] & F'' \\ C(K), L^\infty(K,\mu) \arrow[rr, "J_{\infty,p}"'] & & L^p(K,\mu) \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_2$ $(1<p\leq\infty)$ $\mathscr{S}_1$ $(p=1)$
$\mathscr{K}$	operatori compatti		$\mathscr{K}$
$\mathscr{L}_p$	operatori p-fattorizzabili $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & F \arrow[r, "j_F"] & F'' \\ & L^p(X,\mu) \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$	$\mathscr{L}$ $(1<p<\infty)$
$\mathscr{N}_p$	operatori p-nucleari $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \\ \ell^\infty \arrow[u, "S"] \arrow[r, "D_\xi"'] & \ell^p \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$ $(c_0 \text{ se } p=\infty)$	$\mathscr{S}_2$ $(1<p\leq\infty)$ $\mathscr{S}_p$ $(0<p\leq 1)$
$\mathscr{N}_0$	operatori fortemente nucleari $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \\ \ell^\infty \arrow[r, "D_\xi"'] & s, \ell^\circ \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_0$

$\mathscr{P}_p$ operatori assolutamente p-sommanti $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "J_F"] & L^{\infty} \\ C(K) \arrow[rr, "J_p"'] & & L^p(K,\mu) \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

$\mathscr{S}_2$ $(1\leq p<\infty)$

$\mathscr{Q}_p$ operatori quasi nucleari $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "J_F"] & L^{\infty} \\ \ell^{\infty} \arrow[rr, "D_\xi"'] & & \ell^p \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

$(c_o$ se $p=\infty)$

$\mathscr{S}_2$ $(1\leq p<\infty)$

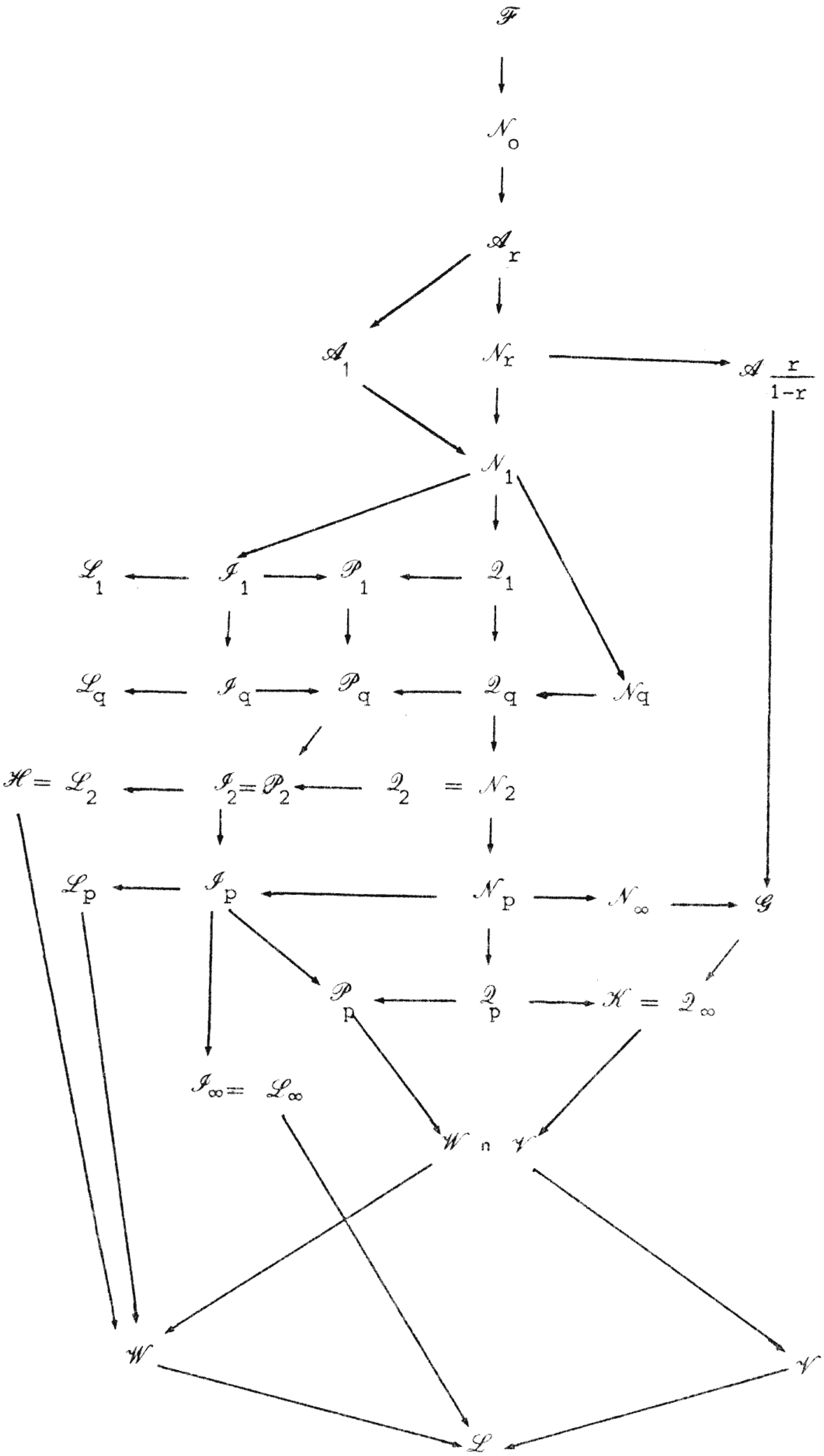
$\mathscr{V}$ operatori completamente continui $\mathscr{K}$

$\mathscr{W}$ operatori debolmente compatti $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr] & & F \\ & G=G'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{L}$

TABELLA DELLE INCLUSIONI



$0 < r < 1, \ 1 < q < 2, \ 2 < p < \infty$