INTRODUZIONE.

La nozione di Speranza Condizionata è fondamentale nella Teoria delle Probabilità perché ne costituisce uno strumento essenziale; al tempo stesso, essa è però poco intuitiva. Questo quaderno vuole presentare, con qualche pretesa di completezza, le proprietà delle Speranze Condizionate (=SC) e le loro caratterizzazioni. La presentazione in due capitoli riflette questa suddivisione della materia. Nel parlare delle SC mi sono limitato agli spazî di probabilità; solo una volta, nella sezione 2.8, ho parlato brevemente di spazî con misura finita. Ho perciò volutamente trascurato quei lavori, ad esempio [8],[51],[52],[15],[16],[40], che considerano spazî mensurali più generali. Tra gli argomenti che ho trascurato, oltreché quello al quale ho appena accennato, indicherò quelli delle SC definite su funzioni a valori in uno spazio di Banach ([10],[46],[41],[14],[26]) o per le multifunzioni ([34]). Non ho pretesa di originalità, anche se, in qualche punto del secondo capitolo, mi pare di aver semplificato, in modo minore, le presentazioni degli articoli originali. Spero che si giudichi utile il trovare riuniti sotto la stessa copertina e con notazione unificata risultati sparsi nella letteratura. Le caratterizzazioni mettono in evidenza il legame tra concetti di probabilità e le proprietà delle proiezioni negli spazi L^p e di Orlicz.

Nel presentare le caratterizzazioni delle SC ho seguito l'ordine temporale e mi sono sforzato di rimanere fedele allo spirito del lavoro che esponevo. Molti degli articoli ai quali mi richiamo nel secondo capitolo contengono più di quanto io abbia qui esposto perché mi sono limitato al fine che mi ero proposto, la caratterizzazione delle SC.

Mentre nel secondo capitolo ho dato i riferimenti bibliografici a mano a mano che procedeva l'esposizione, nel primo, tranne per qualche richiamo tecnico, non ho dato riferimenti bibliografici perché l'argomento è classico; lo si può trovare svolto nei trattati in bibliografia. Fa eccezione il teorema (1.3.25) del quale non ho trovato menzione in alcun testo; per questo teorema si veda [15]. Di ogni articolo o libro citato in bibliografia ho dato, quando esiste, anche il riferimento alla recensione delle Mathematical Reviews (=MR).

NOTAZIONI

Ω - un insieme non vuoto.

$\mathscr{F}$ - una tribù (o σ-algebra) di sottoinsiemi di Ω.

μ - una misura di probabilità definita in $\mathscr{F}$.

$\mathscr{G}, \mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots$ - tribù contenute in $\mathscr{F}$ = sottotribù di $\mathscr{F}$.

$\mu_{\mathscr{G}}^{\mathscr{G}}$ - restrizione di μ a $\mathscr{G}$.

$\mu^{\mathscr{G}}$ - probabilità condizionata della tribù $\mathscr{G}$ (sezione 1.2).

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ - l'insieme dei numeri reali.

$\mathbb{R}_+$ - i reali positivi $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$.

$\bar{\mathbb{R}}$ - i reali estesi $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$.

$\bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$.

Le funzioni $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ misurabili rispetto alle tribù $\mathscr{F}$ in Ω e $\mathscr{B}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ si dicono variabili aleatorie (=v.a.) in accordo con la letteratura sulle probabilità. Ove non sorgano confusioni indicherò con $\mathscr{B}$ la tribù di Borel sia in $\mathbb{R}$ sia in $\bar{\mathbb{R}}$. Se f è misurabile rispetto alla tribù $\mathscr{G}$ dirò che f è $\mathscr{G}$-misurabile, indicherò poi con $\sigma(f)$ la tribù generata da f, cioè la più piccola tribù di sottinsiemi di Ω che renda f una v.a..

Sono denotati da $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, con $p\in[1,+\infty]$, gli spazî di Banach costituiti dalle classi di equivalenza di v.a. f per le quali è finita la norma $\|f\|_p:=\{\int|f|^p d\mu\}^{1/p}$ se $p\in[1,+\infty]$ oppure $\|f\|_\infty:=\text{ess sup}|f$ se $p=+\infty$. Poiché tratterò sempre con classi d'equivalenza rispetto alla relazione d'equivalenza quasi certa (=q.c., sinomino anche di quasi certamente) un'eguaglianza del tipo f=g significa che le v.a. sono quasi certamente eguali; solo raramente scriverò f=g q.c. o addirittura f=g μ-q.c. per mettere in evidenza la misura rispetto alla quale si considera la relazione d'equivalenza.

Siccome l'interesse maggiore è rivolto alla tribù che entra nella definizione di misurabilità scriverò quasi sempre $L^p(\mathscr{F})$ anziché $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ ritenendo fissati l'insieme Ω e la probabilità μ. Se poi $\mathscr{G}$ è una tribù contenuta in $\mathscr{F}$ indicherò con $L^p(\mathscr{G})$, anziché con il più pesante, e pedante, $L^p(\Omega,\mathscr{G},\mu_{\mathscr{G}})$, il sottospazio chiuso di $L^p(\mathscr{F})$ costituito dalle (classi d'equivalenza di) v.a. $\mathscr{G}$-misurabili.

Nello spazio $L^1(\mathscr{F})$ indico con E l'operatore di media (o speranza) $E:L^1(\mathscr{F})\to\mathbb{R}$ definito da $E(f):=\int f d\mu$ $(f\in L^1(\mathscr{F}))$. Nella <u>sola</u> sezione 1.4 ho indicato con E un operatore diverso.

Quando richiamo un risultato (o una definizione o una formula) mediante (x.y.z) mi riferisco alla z-esima formula (o risultato o definizione) nella sezione y del capitolo x; se, tuttavia, il richiamo è nello stesso capitolo, scriverò solo (y.z).

Avverto infine che le dizioni positivo, crescente e simili si intendono nel senso debole, $x \geq 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$ se $x_2 > x_1$; altrimenti dirò strettamente positivo, strettamente crescente e così via.

Desidero infine ringraziare la Sig.na Anna Palma per la pazienza e per la rapidità con le quali ha trasformato il manoscritto originale, tutt'altro che chiaro, nel presente quaderno.