Innesto della teoria dei sistemi nella teoria 7×2

Tra gli "innesti" realizzabili partendo dalla teoria 7×2 uno dei piú agevoli è l'innesto della nozione di "sistema" già introdotto nella teoria ampia di Clavelli – De Giorgi – Forti – Tortorelli (nel seguito CDGFT, vedi [1]) e comprendente come casi particolari le nozioni di coppia ordinata, terna, quaterna, successioni, ecc. L'innesto è realizzabile per esempio mediante l'introduzione di tre qualità, *Qsist* (la qualità di essere un sistema), *Qsiun* (la qualità di essere un sistema univoco), *Qsid* (la qualità di essere un sistema identico), la relazione ternaria *Rsist* che caratterizza i sistemi, e tre operazioni binarie *Unb* (unione di due sistemi), *Compl* (complemento di un sistema rispetto ad un altro sistema), *Comps* (composizione di due sistemi).

Assioma 1. $Rsist\ Sxy \Rightarrow Qsist\ S$.

Definizione 1. Poniamo ${}_yS_x \Leftrightarrow Rsist\ Sxy$ e diciamo che y è un valore corrispondente all'indice x nel sistema S.

Diciamo pure che x (risp. y) è un indice (risp. valore) del sistema S e scriviamo $S \uparrow x \Leftrightarrow \exists y :\ {}_yS_x$ (risp. $S \downarrow y \Leftrightarrow \exists x :\ {}_yS_x$).

Ammetteremo che valga per i sistemi un assioma di estensionalità.

Assioma 2. $(Qsist\ S,\ Qsist\ S',\ \forall x, y\ {}_yS_x \Leftrightarrow\ {}_yS'_x) \Rightarrow S = S'$.

Il terzo assioma riguarda l'esistenza di sistemi singolari.

Assioma 3. Dati comunque gli elementi a, b (non necessariamente distinti) esiste un sistema S che gode della proprietà seguente:

$$\forall x\ S \uparrow x \Leftrightarrow x = a \quad \forall y\ S \downarrow y \Leftrightarrow y = b.$$

In altri termini, S è un sistema che ha un unico indice ed un unico valore; sarà indicato con la scrittura $\binom{a}{b}$.

Abbiamo visto che $Qsiun\ S$ vuol dire che S è un sistema univoco. La nozione di univocità è descritta dall'assioma 4.

Assioma 4. $Qsiun\ S \Leftrightarrow (Qsist\ S,\ \forall x, y, z\ {}_yS_x,\ {}_zS_x \Rightarrow y = z)$.

Se S è un sistema univoco, invece di scrivere ${}_yS_x$ scriveremo $y = S_x$.

Qsid vuol dire che S è un sistema identico, cioè un sistema univoco in cui ad ogni indice corrisponde l'indice stesso, secondo l'assioma 5.

Assioma 5. $Qsid\ S \Leftrightarrow (Qsiun\ S,\ \forall x, y,\ y = S_x \Rightarrow y = x)$.

Vediamo ora le operazioni sui sistemi.

L'unione è un'operazione binaria: invece di scrivere $S'' = Unb\ S, S'$ scriveremo secondo la notazione corrente $S'' = S \cup S'$.

Assioma 6. $S'' = S \cup S' \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow {}_yS_x\ vel\ {}_yS'_x)$.

È facile vedere che l'unione gode delle proprietà associativa e commutativa.
Il complemento è un'operazione binaria: invece di scrivere $S'' = Compl\ S, S'$ scriveremo secondo la notazione corrente $S'' = S' \setminus S$.

Assioma 7. $S'' = S' \setminus S \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow {}_yS'_x\ e\ non\ {}_yS_x)$.

Definizione 2. Poniamo $S \cap S' = S \setminus (S \setminus S')$ e scriviamo $S \subseteq S'$ in luogo di $S' = S \cup S'$.

Osservazione 1. Dall'assioma 7 e dall'assioma 3 segue l'esistenza del sistema vuoto, che può essere ottenuto da ogni elemento a mediante $\binom{a}{a} \setminus \binom{a}{a}$. Il sistema vuoto sarà indicato con $\not 0$.

Dagli assiomi 3,6 sui sistemi singolari e l'unione segue pure l'esistenza dei sistemi

$$\not 1 = \not 0 \cup \binom{\not 0}{\not 0}, \quad \not 2 = \not 1 \cup \binom{\not 1}{\not 1}, \quad \not 3 = \not 2 \cup \binom{\not 2}{\not 2}, \quad \ldots$$

e quindi in sostanza la possibilità di costruire modelli naturali dell'aritmetica all'interno della teoria dei sistemi. Non ci soffermiamo su questa possibilità limitandoci ad osservare che $\not 0, \not 1, \not 2, \not 3, \ldots$ godono tutti della proprietà $Qsid$ e che per i sistemi identici si può elaborare una teoria del tutto analoga alla teoria degli insiemi.

Diamo infine la nozione di composizione di sistemi caratterizzata dall'assioma 8; adottiamo anche in questo caso la notazione usuale ponendo $S'' = S \circ S' \Leftrightarrow S'' = Comps\ S, S'$.

Assioma 8. $S'' = S \circ S' \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow \exists z :\ {}_yS_z,\ {}_zS'_x)$.

Notiamo che nel caso dei sistemi univoci la precedente espressione diventa $S''_x = S_{S'_x}$.

Introduciamo infine le notazioni

$$\binom{a, b}{x, y} = \binom{a}{x} \cup \binom{b}{y},$$

$$\binom{a_1, \ldots, a_n}{x_1, \ldots, x_n} = \binom{a_1}{x_1} \cup \ldots \cup \binom{a_n}{x_n}.$$

Osservazione 2. Volendo ritrovare le usuali nozioni di coppia ordinata, terna, quaterna ecc. chi abbia già eseguito l'innesto dell'aritmetica può considerare i sistemi

$$\begin{pmatrix} 1,2 \\ x_1,x_2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} 1,\ldots,n \\ x_1,\ldots,x_n \end{pmatrix}, ecc.;$$

chi non ha eseguito l'innesto dell'aritmetica può ripiegare sui sistemi

$$\begin{pmatrix} \cancel{1},\cancel{2} \\ x_1,x_2 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} \cancel{1},\ldots,\cancel{n} \\ x_1,\ldots,x_n \end{pmatrix}, ecc.;$$

Osservazione 3. Confrontando l'innesto ora eseguito con l'introduzione dei sistemi proposta nella teoria ampia CDGFT noteremo che la disponibilità di operazioni binarie e di relazioni ternarie consente la simultanea introduzione di tutti i sistemi senza la necessità di premettere il capitolo sulle coppie al capitolo sui sistemi generici.

Bibliografia

[1] **M.Clavelli–E.De Giorgi–M.Forti–V.M.Tortorelli:** *A self-reference oriented theory for the Foundations of Mathematics, in* Analyse mathématique et Applications – Contributions en l'honneur de J.L.Lions, Gauthier–Villars, Paris 1988, 67–115.

Centro Grafico Editoriale "Orantes" - Lecce
Luglio 1990