La didattica della teoria degli insiemi

R. Ferro
Dipartimento di Matematica, Universita' di Lecce

1. Introduzione.

La teoria degli insiemi e' un argomento che si insegna regolarmente nelle scuole, anche se, direi, molto acriticamente, perche' il piu' delle volte non si insegna teoria degli insiemi, come vedremo. E forse non e' neppure necessario o opportuno parlare di teoria degli insiemi a certi livelli scolari. Comunque la mia esposizione sara' un tentativo di capire cosa sia opportuno intendere per teoria degli insiemi.

Vorrei premettere che quanto presentero' si basa su una delle tante proposte di interpretare la teoria degli insiemi. Non si deve pensare che, a livello scientifico, la teoria degli insiemi sia una e ben codificata, anzi, l'interesse e lo studio scientifico della teoria degli insiemi viene proprio dal fatto che e' una teoria non completa, quindi si possono sempre aggiungere nuovi assiomi indipendenti che precisano sempre meglio, secondo varie scelte, tutte legittime, cosa debba intendersi nel dettaglio con la nozione di insieme. Dire che noi conosciamo completamente la nozione di insieme, e' dire una cosa scientificamente sbagliata.

Ciononostante, tra le varie scelte possibili, possiamo cercare di proporne una che sia particolarmente opportuna dal punto di vista didattico, come si e' fatto in uno studio svolto assieme ad alcuni colleghi di Padova. Ed e' questa la scelta che considerero'.

2. Un'indagine.

Nell'iniziare il lavoro padovano, si e' pensato di partire con un questionario per vedere che nozione di insieme hanno gli studenti.

Il questionario, come l'intera ricerca, era rivolto all'inizio della scuola superiore. Questi questionari sono stati distribuiti all'inizio dell'anno scolastico, prima che gli insegnanti spiegassero l'argomento, e quindi risentivano essenzialmente di quanto era stato fatto negli anni scolari precedenti. Per iniziare vorrei dare un'idea di come abbiamo organizzato il questionario. Le prime domande riguardavano la nozione di insieme, poi c'erano domande che riguardavano esempi d'insieme, poi la notazione adottata per gli insiemi, poi l'uso dei simboli di appartenenza e infine l'uso del simbolo di uguaglianza. Abbiamo ricevuto risposte interessanti, e commentero' i risultati essenziali del questionario, ma prima vorrei farvi vedere le domande fatte sulla nozione di insieme, gli esempi, e la notazione.

La prima domanda, quasi ovvia, e': cos'e' per te un insieme? E qui la risposta non era guidata. Poi abbiamo cercato invece di non lasciare piu' completa liberta', ma di proporre delle scelte multiple, che pero' sono state studiate con abbastanza attenzione pensando prima ai possibili errori e ai possibili punti di vista, cercando quindi di mettere nelle varie possibilita' di risposte tutte le alternative che sarebbero potute emergere.

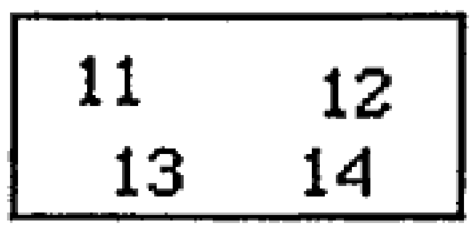
La seconda domanda cominciava cosi': Se qualcuno ti dicesse che possiamo definire la nozione di insieme in uno dei seguenti modi (e dopo saranno riportati i modi) diresti che l'affermazione e' (attenzione alle risposte che concediamo): corretta ed esauriente, quasi del tutto corretta, c'e' qualcosa di vero, non e' che un esempio, e' incomprensibile, poco chiara perche' non conosco il significato di alcune parole, totalmente sbagliata. Nel questionario era anche richiesto di giustificare la scelta delle risposte. Ora indichero' quali sono le possibili definizioni a cui si dovevano attribuire queste risposte. Se volete pensate anche voi come rispondereste a queste domande. Una prima proposta e' questa: una collezione di oggetti distinguibili tra loro (notate che questa affermazione risente anche di quello che e' scritto in vari testi, non correttamente). Una seconda proposta era: una cosa singola. 3) una collezione di elementi generalmente definibili in qualche modo (qui l'accento e' sul definibili in qualche modo). 4) Un concetto primitivo, cioe' un concetto che non riusciamo a definire. 5) Una scatola vuota. 6) Tanti punti all'interno di un cerchio (questo si rifa' chiaramente ai diagrammi di Venn). 7) Un aggregato o un gruppo o una moltitudine (parole che sono quasi sinonimi, ma che non sono precise). 8) Una scatola con qualcosa dentro. 9) Gli alunni di una classe (chiaramente e' un esempio di insieme, ma non e' la nozione). 10) Una collezione di oggetti simili tra loro (qui si richiede una certa similarita').

La terza domanda, invece, passa agli esempi di insiemi e prevede che le risposte possano essere si, no, talvolta, non so. Cercate di scoprire anche la problematica che ha condotto alla scelta di questi esempi. Primo esempio: gli alunni di una classe costituiscono un insieme? 2) Le prime quindici lettere dell'alfabeto costituiscono un insieme? 3) L'alfabeto e' un insieme? 4) Gli alunni contemporaneamente bocciati e promossi costituiscono un insieme? 5) I semafori verdi costituiscono un insieme? 6) I numeri naturali costituiscono un insieme? 7) Gli alunni alti di una classe costituiscono un insieme? 8) Un treno e' un insieme? 9) Tutti gli insiemi costituiscono un insieme?

La domanda successiva lascia il problema degli esempi e comincia ad affrontare il problema della notazione. Come indicheresti l'insieme costituito dalle vocali dell'alfabeto italiano? L'ulteriore domanda e' ancora sulla notazione e dice: valuta le seguenti descrizioni dell'insieme dei numeri naturali maggiori di 10 e minori di 15, e prevede queste possibili risposte: a) la notazione e' giusta, oppure b) manca qualche elemento nella definizione di quella collezione, oppure c) c'e' qualcosa di troppo, d) non e' chiara perche' ... (qui avrebbero dovuto mettere i motivi), e) ci sono dei simboli mai visti, f) e' sbagliata perche'... Ed ecco le notazioni proposte.

1) {11,14}; 2) {11, 12, 13, 14};

3)



4) {11,12,13,14,15,16};

5) l'insieme i cui elementi sono 11, 12, 13 e 14; 6) {11121314};

7) {13, 11, 14, 12} ; 8) {10+1, 10+2, 10 +3, 10+4};

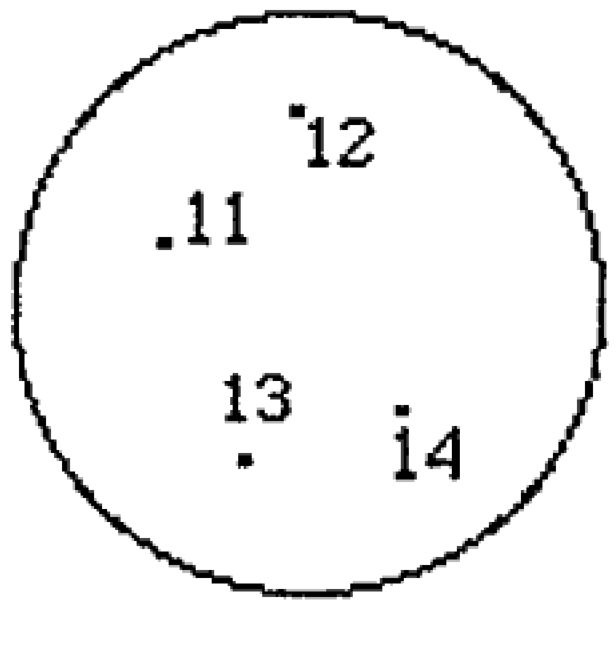
9) {x: x>10 e x <15} (non tutti avevano visto una notazione del genere);

10) {x: x>10 o x<15} (come quella sopra, ma al posto di "e" c'e' un "o");

11) {x: 10<x<15}; 12) {11 ... 14};

13) {8,9,10,11,12,13,14}; 14) {8,10,12,14};

15)



16) {11,13,14}; 17) l'insieme degli x tali che x e' compreso tra 10, e 15 e x e' un numero naturale.

Avete pensato alle vostre risposte?

C'erano delle altre domande dello stesso stile, ma credo che adesso abbiate gia' capito il modo con cui abbiamo cercato di costruire le altre domande. Posso aggiungere che si chiedevano notizie sull'uso del simbolo di appartenenza, c'erano delle espressioni in cui mancava un simbolo e bisognava inserire al posto dei puntini o appartiene o non appartiene o contenuto o non contenuto o cose del genere; altre espressioni in cui si doveva mettere al posto dei puntini uguale, non uguale a secondo dei casi.

Esaminiamo brevemente quali sono stati i risultati di questo questionario. Non indichero' quanti hanno risposto in certo modo a ciascuna domanda, ma notero' degli atteggiamenti abbastanza consistenti di tipo particolare che sono emersi. Un'idea molto diffusa e' risultata la seguente: gli insiemi sono visti come collezioni di oggetti dello stesso tipo, se gli elementi non sono dello stesso tipo (tutti numeri, tutti triangoli) la loro collezione non e' considerata un insieme. Ad esempio la collezione i cui elementi sono un certo triangolo,un certo cane e questa sedia, non costituirebbe un insieme. Un altro atteggiamento molto comune vuole che per insiemi si intendano classi universali, cioe', ad esempio, tutti i triangoli, tutti i numeri naturali, tutte le sedie, ma la collezione di tre sedie non sarebbe un insieme: o tutte le cose di un certo tipo appartengono all'insieme, o la collezione non e' un insieme. Altra idea molto diffusa e' che gli insiemi sono collezioni molto grandi: due tre cose non costituiscono un insieme, duemila si, una moltitudine si. Queste sono le cose piu' macroscopiche che sono emerse dall'indagine svolta, senza entrare nei dettagli delle risposte alle singole domande.

3. Le esigenze della matematica.

Volendo arrivare ad una proposta di presentazione della teoria degli insiemi, la domanda e': prendendo atto dei risultati visti, quale tipo di concetto di insieme introdurre? Per motivare piu' concretamente la scelta, abbiamo cercato di rispondere ad un' altra domanda, che mi pare abbastanza ovvia: a cosa serve la teoria degli insiemi? In particolare, a cosa serve la teoria degli insiemi in matematica? Perche' e' inutile svolgere un bel capitoletto che sta nel libro o che sta ad un certo punto del programma, e sviluppare la teoria degli insiemi in quattro o cinque lezioni che non servono nel resto del programma: e' inutile presentare delle nozioni cosi' giusto per il gusto di presentarle. Cosi' cerchiamo anche una nozione di insieme che sia utile poi allo sviluppo della matematica studiando cosa richiede la matematica, quando fa ricorso alla nozione di insieme. Ci sono vari momenti in cui questo succede. Pensate alla nozione di relazione, alla nozione di funzione, alle nozioni di successione; quando poi vengono introdotti i numeri reali, pensate alle successioni di Cauchy, alle sezioni di Dedekind. Sono problemi molto seri in cui la nozione di insieme ha un ruolo preminente.

Analizziamo appena piu' accuratamente alcune di queste nozioni. Da un punto di vista matematico, cos'e' una relazione? Cos'e' una relazione da un punto di vista non matematico? Sarete tutti d'accordo, che se dico "Tizio e' figlio di un certo genitore" sto parlando di una relazione, la relazione "essere figlio di". Una relazione e' mettere in evidenza un certo legame tra vari individui che sono correlati in un certo modo. Pero' usualmente quando si parla di una relazione, quella figli genitori ad esempio, subito si vanno a toccare molti aspetti di varia natura: stanno bene assieme, e' giusto il comportamento di quel genitore verso quel figlio, e' una relazione ideale o che va bene nella nostra societa' ma che in certe societa' non va bene?

La matematica non e' psicologia, non e' sociologia, non e' morale, non si interessa se e' bene che ci sia quella relazione, se una certa relazione funziona, se e' economica, ne' ha altre preoccupazioni di questo genere. L'attenzione della matematica e' quasi l'attenzione del notaio che registra come stanno le cose, se poi un contratto sia piu' conveniente a uno o all'altro dei contraenti sono fatti loro, non del notaio. La matematica assume un tale atteggiamento perche' cosi' e' utile a qualsiasi altra scienza, e vorrei sottolineare questa motivazione. Poi sara' la singola scienza che studiera' se una relazione e' opportuna o meno, come eventualmente modificare le cose per ottenere un risultato migliore, la matematica semplicemente prende atto della situazione. Quindi ogniqualvolta si pensa ad una relazione, dal punto di vista matematico quello che interessa e': chi sta in relazione con chi; non perche', come, se si trovano bene, se e' opportuno; ma chi e' in relazione con chi. Quindi la conoscenza delle coppie ordinate di individui che stanno nella relazione e' tutto quello che interessa. Percio' e' opportuno considerare una relazione come un insieme di coppie ordinate, e questa e' la nozione matematica di relazione. Ed e' una nozione che viene proprio da questo non voler considerare, da questo astrarre da tutti gli aspetti morali, psicologici, sociologici, di opportunita' e quant'altro volete metterci di caso in caso.

Questo e' l'atteggiamento, diciamo, estensionale: non ci interessa tanto perche' le cose vanno in un certo modo, ma a chi si estendono le relazioni, chi sono le coppie ordinate di individui coinvolti. Atteggiamento estensionale che e' tipico della matematica, che le viene proprio attraverso una adeguata nozione di insieme. Cosi' noi considereremo uguali, coincidenti due collezioni semplicemente se hanno gli stessi elementi, indipendentemente dal fatto che quegli elementi vengano descritti bene, male, in che ordine, eccetera; cio' che ci interessa e' a chi si estende quella collezione, chi sono i suoi elementi; astraiamo dal resto, non consideriamo il resto. Questo e' un atteggiamento tipico che si puo' far rilevare facilmente nella presentazione della nozione di relazione, non appena, prima, sia stato adeguatamente presentato in modo estensionale il concetto di collezione.

Le considerazioni sulle relazioni, si trasferiscono pari pari alle funzioni. Nel linguaggio comune usiamo frasi del tipo: una quantita' varia in funzione di un'altra, ma, dal punto di vista matematico, ancora interessano soltanto quali sono le coppie ordinate di elementi che si corrispondono nella funzione. Una funzione e' una relazione che in piu' ha la caratteristica che dato il primo elemento e' unico quello che gli corrisponde.

Quando si vogliono introdurre i numeri reali, si puo' scegliere tra un approccio assiomatico, cioe' dire i numeri reali sono quei numeri che soddisfano certe proprieta', oppure costruttivo, cioe' disponendo dei numeri razionali effettuare opportune costruzioni su di essi fino ad ottenere degli oggetti che chiameremo numeri reali. Da questo secondo punto di vista, le tecniche sono svariate, ad esempio si possono utilizzare le sezioni di Dedekind, o le successioni di Cauchy, o altri metodi ancora, comunque sono tecniche che prevedono di considerare collezioni numerabili, cioe' con tanti elementi quanti sono i numeri naturali, e la possibilita' di fare questo e' ancora dovuta alla possibilita' di costruire opportuni insiemi. Ad esempio nel caso delle successioni, che sono delle funzioni dai numeri naturali, ad un certo punto le vogliamo considerare come una cosa sola perche' vogliamo effettuare delle costruzioni che prevedono l'uso delle successioni come elementi. E cosi' anche per le sezioni di Dedekind. Una sezione di Dedekind e' una coppia di insiemi non vuoti di numeri razionali tali che i numeri del primo insieme siano piu' piccoli di quelli nel secondo e inoltre tutti i numeri razionali, eccetto al piu' uno, siano in uno dei due insiemi. Notiamo che queste coppie hanno per elementi collezioni infinite, che diventano una sola cosa, un elemento della coppia e la coppia a sua volta diventa un elemento singolo che e' il numero reale. Bisogna sottolineare questo passaggio fondamentale: queste collezioni diventano una sola cosa soggetto di altre proprieta'.

Anche prima con le relazioni potevamo dire che una relazione e' una sola cosa, un'entita' unica che puo' godere di proprieta', ad esempio quella di essere una delle relazioni di equivalenza. Cosi' anche una funzione e' si una collezione di coppie, ma e' anche un'unica cosa, e questa unica cosa puo' essere soggetto di proprieta', ad esempio essere continua. Questo essere una singola cosa e' un secondo aspetto che e' molto importante per la nozione di insieme, aspetto che viene evidenziato e richiesto proprio dall'uso che si fa di questa nozione in matematica.

Ecco un altro punto in matematica dove e' utile la nozione di insieme: le equazioni parametriche. Queste costituiscono un argomento che i ragazzi dei primi anni delle superiori affrontano con una certa difficolta'. Un esempio di equazione parametrica e': ax=24. E' un'equazione nella cui scrittura ci sono due lettere, una "x" e l'altra "a". Cosa devo intendere con questa scrittura? Cosa vuol dire risolvere un'equazione parametrica? Anzitutto, cosa vuol dire risolvere un'equazione in una variabile? Vuol dire trovare tutti quei numeri che messi al posto della variabile rendono l'equazione vera, soddisfano l'equazione, come si dice. Ma numeri da mettere al posto di chi? Di x o di a o di entrambe le lettere? Potrei dire di tutte e due, e allora e' un'equazione con due variabili. Il problema diviene: trovare le coppie ordinate di numeri uno da mettere al posto di a e l'altro da mettere al posto di x in modo che il loro prodotto sia 24. Questo e' un problema. Altra cosa e' pensare soltanto x come variabile e a come un certo numero fissato, quindi non e' piu' un'equazione, sono tante equazioni al cambiare di a: ecco le equazioni parametriche, sono tante equazioni una per ciascun valore attribuito al parametro a. Per precisare bene questa nozione si possono usare gli insiemi. Con la notazione insiemistica si riesce a distinguere facilmente tra l'insieme delle soluzioni dell'equazione in due variabili da una parte, e invece dall'altra l'insieme delle soluzioni di una equazione in una variabile che dipende da un parametro. Il primo e' l'insieme di tutte quelle coppie ordinate, chiamiamole pure (a,x), tali che ax=24, $\{(a,x): ax=24\}$. Altra cosa e' l'insieme delle soluzioni della equazione in una variabile, e si puo' scegliere a o x come variabile, per fissare le idee consideriamo x come variabile. In tal caso e' l'insieme di tutti gli x tali che ax=24, {x: ax=24}, ed e' una cosa totalmente diversa. Ma, notate che questo insieme dipende da a. E studiare un'equazione parametrica vuol dire studiare l'insieme delle soluzioni al variare di a: in effetti ci sono tanti insiemi di soluzioni, uno per ogni a che appartiene, ad esempio, ai numeri reali, { {x: ax=24}: a e' un numero reale}. Il primo e' un insieme di coppie ordinate, il secondo e' un insieme di insiemi, dipendenti da a, di soluzioni delle singole equazioni parametriche, equazioni nella sola variabile x. Vedete che con una opportuna notazione di insieme si riesce a chiarire bene la differenza tra equazione in due variabili ed equazione parametrica. Abbiamo cosi' visto un altro punto della matematica in cui e' opportuno avere una buona ed adeguata nozione di insieme. Anche in questo caso si nota che la nozione di insieme che serve e' ancora la nozione di una collezione che e' anche una cosa singola. Infatti, nella situazione appena vista, la collezione{x: ax=24} deve essere un'unica cosa essendo elemento di un altro insieme, precisamente dell'insieme { {x: ax=24}: a e' un numero reale}.

Voglio far notare che la prima difficolta' per i ragazzi e' forse quella di considerare una collezione come una sola cosa perche' e' una nozione nuova. I ragazzi non trovano nulla di strano nel pensare ad una collezione di cose, e subito si fanno l'idea che ci sono gli elementi e che ci sono le collezioni; ma rendersi conto che una collezione possa diventare elemento, possa essere considerata un elemento, questa e' una grande scoperta! Nel problema delle equazioni parametriche visto sopra abbiamo di fatto una collezione, quella delle soluzioni dell'equazione parametrica {x: ax=24}, che e' diventata un elemento della collezione { {x:ax=24}: a e' un numero reale} i cui elementi sono le varie collezioni di soluzioni al variare dell'equazione parametrica, cioe' al variare del parametro, cioe' dei valori da attribuire ad a. Rendersi conto che le collezioni possono diventare elementi , cose singole a cui applicare altre volte l'operazione di collezione, e' un passo non indifferente per i ragazzi.

Vediamo ora un esempio che porta ad un altro aspetto della nozione di insieme. Pensate al problema di trovare gli zeri di una funzione f continua che vada da meno infinito a piu' infinito. Siccome e' continua e va da meno infinito a piu' infinito dovra' tagliare l'asse delle x, e il suo valore sara' zero ad un certo punto: il problema consiste nel determinare un tale punto, cioe' determinare i valori della variabile x tali che f(x)=0. Da un certo punto di vista e' chiaro cosa stiamo intendendo: stiamo cercando di determinare i punti di intersezione tra la curva, che e' il grafico della funzione data, e l'asse delle x; e questo e' un certo insieme. Supponete ora che quella curva sia stata data esplicitamente, cioe' la curva e' il grafico di una funzione in cui si sia precisato esplicitamente ed esattamente come si fa a calcolare il valore della funzione, y, corrispondente ad un certo valore di x. Ma anche se e' detto come si calcola il valore della funzione in corrispondenza ad un certo valore della variabile indipendente, non e' per niente detto come si fa a trovare quando la funzione e' zero, cioe' per quale valore della variabile indipendente il valore della funzione e' zero. Non lo si sa, e si dimostra che, in generale, non lo si puo' neppure sapere nel senso che non c'e' alcun procedimento effettivo per poter determinare gli zeri di una generica funzione continua (c'e' un procedimento effettivo per la risoluzione del presente problema solo nei casi piu' favorevoli, quelli che poi si usano per fare gli esempi a scuola, quando attraverso dei calcoli algebrici si ottiene la soluzione, ma mediante i calcoli algebrici abbiamo la sicurezza di arrivare alla risoluzione solo nel caso di equazioni algebriche fino al terzo grado).

Cosa si vuol sottolineare con questo esempio? Stiamo qui considerando un qualcosa che in matematica e' opportuno ritenere un insieme, l'insieme delle ascisse delle intersezioni del grafico di quella funzione con l'asse x, ma questo insieme non e' determinabile in modo effettivo, decidibile. Ricordate che nel test iniziale si domandava se i ragazzi alti di una classe costituiscono un insieme? E' un problema di tipo analogo a questo che stiamo considerando ora: determinare i ragazzi alti presenta difficolta' simili alla determinazione degli zeri di una funzione. Pero' vogliamo che gli zeri di una funzione costituiscano un insieme, cioe' il concetto di insieme deve includere anche questo caso, altrimenti a che servono gli insiemi in matematica? Come determinare gli zeri e' un altro problema, ma ci sono. Cosi' anche i ragazzi alti non so come determinarli, ma ci sono: secondo un certo criterio di alto li trovero'. Qual'e' il criterio? Non lo so, da un punto di vista del concetto di insieme neppure mi interessa, ma secondo quel certo criterio si possono determinare gli alti, e c'e' il loro insieme. La matematica e' piena di esempi di situazioni in cui consideriamo un insieme anche senza aver nessun metodo per decidere quali sono i suoi elementi. Ecco un altro esempio, sempre su questa linea. Pensate all'insieme dei numeri naturali. Pensate poi alle sottocollezioni dei numeri naturali. Siamo abituati ad accettare le sottocollezioni dei numeri naturali come insiemi anche se non si possono descrivere uno per uno. Infatti, Cantor ha dimostrato che i sottinsiemi dell'insieme dei numeri naturali sono in numero non numerabile (e questa dimostrazione e' una pietra fondamentale dello sviluppo della teoria degli insiemi). Allora come si fa a descriverli uno per uno se le parole che si possono pronunciare in un certo tempo sono in numero finito, e, anche se ci si concede tutto il tempo che si vuole, si avranno al piu' un numero numerabile di descrizioni? Eppure nessuno di voi ha detto ci sono delle sottocollezioni dei numeri naturali che non sono insiemi. Di fatto le consideriamo come sottocollezioni che possono essere pensate come un'unica cosa, anche se sono troppe perche' ci sia per ciascuna una descrizione. Quindi emerge ancora il problema di dover avere una nozione di insieme che deve andar bene anche nei casi in cui non si riesca ad avere un processo effettivo per decidere e descrivere quali sono gli elementi che appartengono o no all'insieme. Ci sara', forse, una descrizione ideale, forse qualcuno da qualche parte sapra' dire quali elementi soddisfano una certa proprieta', ma noi effettivamente e praticamente non sappiamo che dire: dobbiamo accettare collezioni per le quali non ci sono criteri effettivi per determinare i loro elementi.

Questo conclude queste prime osservazioni che volevo presentare per intuire cosa la matematica richiede dalla teoria degli insiemi. Abbiamo visto certe caratteristiche che il concetto di insieme dovra' avere per essere utile allo sviluppo della matematica: essere collezione, diventare cosa unica, essere indipendente dalla descrizione degli elementi, essere anche indipendente dall'esistenza di un criterio effettivo per determinare se una certa cosa appartiene o meno all'insieme.

4. Altre esigenze.

Queste conclusioni riguardano la matematica, mentre se vogliamo considerare l'applicabilita' della nozione di insieme al mondo esterno c'e' dell'altro da osservare. Pensate agli esempi presenti anche nel test esaminato all'inizio. Un treno e' un insieme? E' forse l'insieme dei vagoni? Il treno e' una realta' ben concreta, non e' una collezione di vagoni: i vagoni devono essere messi assieme in modo opportuno per avere un treno. Un treno non e' l'azione mentale di pensare assieme vari elementi, non e' una collezione! Un altro esempio: un certo registratore e' un insieme? E' l'insieme dei suoi pezzi? Se si, allora mettiamo i pezzi del registratore in una scatoletta, mescoliamo un po' ed ecco il registratore! Un registratore e' si costituito dai suoi pezzi, ma messi assieme secondo dei criteri ben opportuni che ne fanno un registratore, che e' quell'oggetto, e non e' l'insieme dei pezzi. Il registratore non e' una collezione, e' un elemento a cui niente appartiene, neppure lui stesso (un elemento e' ben diverso dalla collezione cui appartiene quel solo elemento), ma, pur non avendo elementi, non e' la collezione vuota, perche' non e' il fissare la propria attenzione su niente. Altro esempio ancora: la bonta' e' un insieme? No, secondo il concetto di insieme che stiamo cercando di introdurre, perche' non e' una collezione: non solo non ha elementi, ma non e' neppure la collezione vuota, non e' il fissare la nostra attenzione su niente. Nel mondo a cui possiamo applicare la matematica, ci sono tante cose e tante nozioni che non sono insiemi, che non sono collezioni; perche' dobbiamo pensare che ogni cosa debba essere un insieme?

Anche se non abbiamo ancora precisato completamente la nozione di insieme, ma, per ora, stiamo solo cercando di coglierne alcune caratteristiche, che provengono da varie osservazione, che guideranno la scelta di un' adeguata nozione di insieme, tuttavia possiamo gia' affermare che, se vogliamo applicare la nozione di insieme anche alla realta' che ci circonda, si dovranno considerare elementi che non sono collezioni, e dunque neppure insiemi, anche se gli insiemi sono elementi. La difficolta' nel condividere questa affermazione forse viene dal fatto che, in molte presentazioni della teoria degli insiemi, ogni ente di cui parla la teoria e' un insieme. Ma perche' dovrebbe essere cosi'? L'usuale teoria degli insiemi che troviamo in varie presentazioni puo' facilmente essere ampliata, e noi l'amplieremo, considerando elementi che non sono collezioni (e quindi neppure insiemi): questi elementi vengono chiamati atomi.

Ci si puo' chiedere come mai le usuali presentazioni della teoria degli insiemi non prevedano gli atomi? Di fatto la matematica non si interessa tanto di chi sono intrinsecamente gli elementi, quanto del loro comportamento e delle relazioni tra di loro: dal punto di vista matematico e' equivalente il considerare un elemento nei suoi rapporti con l'ambiente in cui e' inserito, o il considerare il suo nome, o un insieme che si comporta come quell'elemento e che venga identificato con l'elemento stesso. D'altra parte e' possibile associare biettivamente ad ogni atomo un insieme che si comporti esattamente come l'atomo anche nel costituire altre collezioni ed insiemi. Ma non credo che sia didatticamente opportuno presentare ai ragazzi fin dall'inizio questa situazione in cui ad ogni cosa che c'e' nel mondo facciamo corrispondere un insieme, e per parlare di quella cosa si deve parlare dell'insieme corrispondente, e per ottenere la collezione di alcune cose si deve considerare la collezione degli insiemi corrispondenti: perche' questa forzatura? Introduciamo pure tranquillamente gli atomi, ed eventualmente consideriamo le collezioni di atomi. Cosi' si potrebbe benissimo considerare la collezione di tutti i vagoni delle Ferrovie dello Stato, ed e' un'opportuna collezione di atomi, di cose singole, che non sono insiemi. Alla collezione delle virtu' apparterra' anche la bonta', ma questa non e' un insieme, mentre la collezione delle virtu' e' una collezione, e' il pensare ad alcune entita', e' fissare al mia attenzione su alcune entita'.

Nel lavoro svolto a Padova che ho ripetutamente citato, nell' introdurre la nozione di insieme, da un punto di vista didattico si e' ritenuto opportuno introdurre anche questo aspetto: la presenza di atomi, di cose che non sono collezioni. Quindi avremo a) cose che non sono collezioni e che chiamiamo atomi, b) collezioni, e c) collezioni che sono anche cose singole e che chiamiamo insiemi.

5. I diagrammi di Venn.

Abbiamo gia' notato che quando il concetto di collezione viene inizialmente presentato a dei ragazzi, per essi la situazione e' estremamente semplice: da una parte ci sono gli elementi, le cose, gli atomi, e dall'altra le collezioni di atomi e queste non diventano elementi. Se si accetta questa impostazione, il tutto e' effettivamente semplice. Di piu', nelle scuole elementari, e, direi, fino alle scuole medie avanzate, si rimane solo su questo piano: cosi' la nozione di insieme non e' toccata ed e' inutile introdurla. In questo contesto puo' essere comodo rappresentare le collezioni mediante diagrammi di Venn, ma mi pare che la convenienza di questa rappresentazione, gia' problematica in questo contesto, non possa estendersi ad una situazione in cui vengono usati insiemi nella pienezza del significato di questo termine.

Per meglio motivare quanto ho appena affermato, vorrei presentare una situazione da cui risulta l'importanza della nozione di insieme, cosi' come ho cercato di introdurla, nella sua pienezza di significato. Consideriamo una squadra sportiva ed i suoi giocatori. Certamente i giocatori vanno considerati come atomi, e la squadra come collezione: in effetti non e' altro che il considerare assieme i suoi giocatori. Di piu', la squadra va considerata come insieme, come cosa singola. In effetti siamo abituati a considerarla soggetto di affermazioni (ad esempio diciamo "la squadra ha vinto") ed anche come elemento nel considerare altre collezioni, ad esempio la collezione delle squadre partecipanti ad un certo torneo. La situazione che ho cercato di descrivere si riassume dicendo che stiamo considerando dei giocatori, delle squadre i cui elementi sono giocatori, e la collezione delle squadre che partecipano ad un certo torneo. E' possibile rappresentare questa situazione con un diagramma di Venn? Se rappresentiamo la squadra con un cerchio, diciamolo S, come si fa per le collezioni, come indicare il torneo? Con un cerchio T che contiene il primo? Ma questa notazione (fig. 1) indica che la collezione indicata da S e' una sottocollezione della collezione indicata da T, e non un elemento di questa, mentre la squadra e' un elemento del torneo. Allora indichiamo (fig. 2) con un cerchio T il torneo e la squadra con un punto S all'interno di T: cio' indica che la squadra e' un elemento del torneo. A questo punto come rappresentare i giocatori?

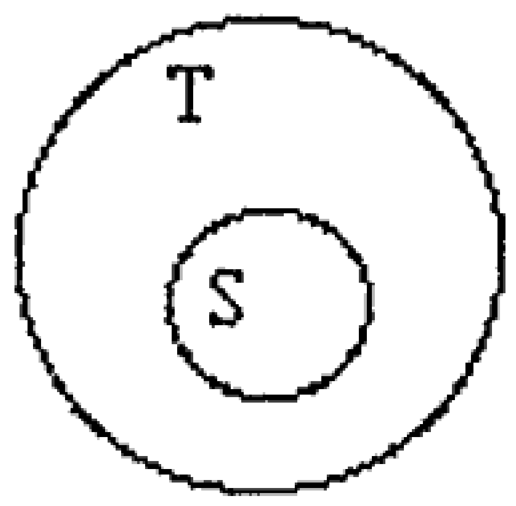


fig. 1

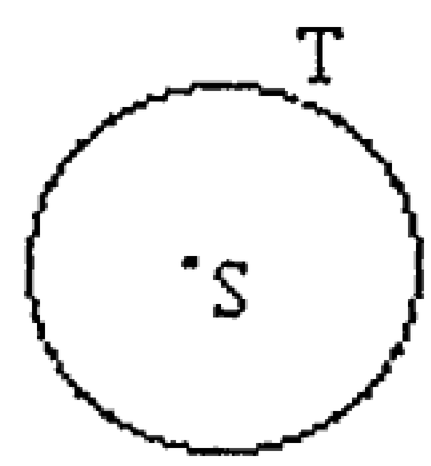


fig. 2

I diagrammi di Venn non sono fatti per rappresentare questi problemi, e, d'altra parte, questi sono i problemi in cui il concetto di insieme entra in senso significativo: qui c'e' davvero il concetto di insieme, la collezione che e' diventata uno, la squadra che e' diventata una cosa. I diagrammi di Venn vanno bene per le collezioni, detto altrimenti, quando si possono usare i diagrammi di Venn si sa che non si sta usando il concetto di insieme, ma solo quello di collezione. Alle scuole elementari non credo che si sia mai usato il concetto di insieme, anche se e' stata usata questa parola, di fatto si usa soltanto il concetto di collezione.

Nel diagramma di Venn il cerchietto che si usa e' una cosa folcloristica. Questi cerchietti sono un modo grafico per dire: limitiamo la nostra attenzione a queste cose, cioe' consideriamo la collezione cui appartengono elementi racchiusi nel cerchio. Notate poi che con i diagrammi di Venn ci sono dei problemi anche dal punto di vista di considerare soltanto collezioni, infatti dalla rappresentazione non e' possibile ricavare informazioni ad esempio sulla finitezza o infinitezza della stessa collezione. A volte, in una collezione rappresentata con un diagramma di Venn si indicano alcuni suoi elementi: sono tutti o sono soltanto alcuni della collezione che si vuole indicare? In certi casi si indicano tutti gli elementi, in tanti altri casi non si indicano tutti; allora come decidere in quale caso ci si trova? Se si sceglie la collezione dei numeri naturali, come indicarla mediante un diagramma di Venn? Dopo queste osservazioni ci accorgiamo che i diagrammi di Venn, in particolari situazioni, possono essere un comodo ausilio rappresentativo quando, per altra via, si sia chiarito cio' di cui si vuole parlare.

6. La proposta.

Forse e' opportuno ribadire che lo scopo di questa chiaccherata e' cercare di cogliere un'opportuna idea di insieme. Fin dall'inizio ho sostenuto che, dal punto di vista scientifico, non c'e' un'unico concetto di insieme, percio' ho cercato di cogliere quali sono le esigenze di didattica della matematica che possono suggerire un certo concetto di insieme. Se uno ha una buona preparazione matematica si trova di gran lunga piu' a suo agio nel seguire le motivazione addotte, pero' almeno alcune di queste toccano chiunque, e io spero che, dalle osservazioni fatte, possa scaturire almeno un'idea dei problemi sottostanti questo rapporto tra matematica e teoria degli insiemi e della necessita' di studiare piu' approfonditamente su altre fonti quanto io qui non posso ricordare per ovvi motivi di ampiezza del presente intervento. D'altra parte mi trovo in difficolta' ad indicare dei libri dove sono sviluppati questi concetti: ci sono dei libri scientifici sulla teoria degli insiemi ad alto livello, ma personalmente non conosco nessun libro che sia diffuso nelle scuole in cui la teoria degli insiemi non sia presentata con gravi e sostanziali lacune dal punto di vista che sto cercando di illustrare.

A questo punto vorrei presentare cosa il gruppo di lavoro di Padova, dopo tutte queste analisi, ha pensato di proporre come opportuno concetto di insieme.

Per chiarire la nozione di insieme che si vuole proporre, si e' trovato conveniente partire da una nozione che pare ancora piu' semplice: la nozione di collezione.

Per collezione intendiamo l'atto mentale di considerare alcune cose, alcuni elementi. E' un'azione mentale, non c'e' niente di concreto nel concetto di collezione. Quella data non e' una definizione, cioe' un dare significato ad una parola sfruttando il significato noto delle parole del definiente, ma un cercare di dare significato alla parola collezione direttamente legandola all'esperienza di considerare alcune cose. Di fatto prendiamo come primitivo, non definito, il concetto di collezione, proprio perche' non tutto puo' essere definito in termini di nozioni introdotte precedentemente, se non si vuole arrivare ad un regresso all' infinito che non fonderebbe alcunche'.

Per insieme intenderemo una collezione che puo' essere considerata come cosa singola, come unita', come elemento. Ad esempio, di fatto la squadra sportiva e' considerata come una cosa singola. E' possibile, e' corretto considerare una certa collezione come cosa singola? Questo e' un problema che tra poco affronteremo. Pero' fin d'ora vorrei sottolineare la distinzione tra questi due momenti del concetto di insieme: da una parte essere collezione, dall'altra essere elemento. Dunque un insieme e' una collezione che pensiamo come cosa singola. Chiamiamo atomi le cose singole che non sono collezioni.

7. La difficolta'.

Questa distinzione tra i due aspetti del concetto di insieme potrebbe lasciare un po' perplessi in quanto ridondante, se uno ritenesse che tutte le collezioni possono essere pensate come cose singole. Infatti, se si potesse pensare ad ogni collezione come cosa singola, che necessita' ci sarebbe di distinguere tra collezioni ed insiemi: tutte le collezioni sarebbero insiemi!

Per evitare questa obiezione, diventa allora importante far capire anche ai ragazzi che non e' vero che tutte le collezioni possono essere considerate come cosa singola. Qui cominciano alcune difficolta' perche' il motivo per cui certe collezioni non possono essere considerate come cosa singola sta nel fatto che, se cosi' facessimo, arriveremmo a contraddizioni: tutta la nostra costruzione sarebbe contraddittoria.

Come far capire a degli studenti cosa vuol dire "arriveremmo a contraddizioni"? D'altra parte dobbiamo riuscire a far capire cio' prima di cercare di spiegare perche' certe collezioni non possono essere insiemi. Nei vari test proposti dal gruppo di Padova, si e' cercato anche di capire cosa vuol dire per i ragazzi contraddizione. Cosi' si e' chiesto: affermare di andare da Milano a Roma in dieci secondi, e' una contraddizione? Eppure i ragazzi spesso pensano di si. Una cosa e' l'impossibile di fatto oggi; altra cosa e' la contraddizione. Topolino e' nella nostra fantasia, e' possibile, anche se assolutamente non e' reale. Il topo che parla di fatto non c'e', ma non e' contraddittorio assumerne l'esistenza. Si ha una contraddizione quando si afferma sia una proprieta' che la sua negazione in una data situazione. E' cio' che a volte viene chiamata contraddizione in termini. Nemmeno nella piu' sfrenata fantasia puo' esserci una situazione in cui valgano simultaneamente una proprieta' e la sua negazione.

Una volta spiegato cosa si intende per contraddizione, si puo' passare a far vedere che ci sono delle collezioni che non sono insiemi perche', se lo fossero, da tutta la costruzione proposta delle collezioni e degli insiemi si arriverebbe ad una contraddizione.

Questa contraddizione e' stata scoperta da Russell, quando ha criticato la nozione di insieme di Cantor. Cantor aveva commesso proprio questo errore: aveva pensato che ogni collezione fosse un insieme. Russell ha fatto vedere che Cantor aveva sbagliato. L'argomento di Russell pero', anche se semplice, e' un po' delicato: definisce una certa particolare collezione e fa vedere che non puo' essere un insieme in modo abbastanza sottile. Allora nel gruppo di Padova si e' cercato di trovare un'altra contraddizione riconoscibile mediante una argomentazione piu' semplice. In qualche modo si e' pensato di averla trovata sfruttando pero' una particolare nozione di collezione che e' stata ritenuta opportuna dal punto di vista didattico. Non e' sbagliata, e' una delle possibili nozioni di collezione, quella generalmente adottata, anche se non e' necessario scegliere esattamente questa nozione in molti sviluppi della matematica.

Questa nozione puo' essere meglio precisata accettando questa ulteriore caratteristica: per conoscere una collezione si devono in qualche modo avere a disposizione i suoi elementi. Detto altrimenti, non si puo' dire di avere una collezione se non si hanno i suoi elementi; prima in qualche modo si devono conoscere i suoi elementi. Questo conoscere va inteso nel senso piu' generale possibile, non e' la richiesta di riuscire a determinare effettivamente gli elementi: abbiamo criticato prima il determinismo rigido, per cui non vogliamo accettare questa posizione. Anche la parola prima non va intesa in senso temporale, ma come una precedenza conoscitiva. Quindi, ribadendo l'ulteriore caratteristica, prima si dovra' sapere in qualche modo chi sono gli elementi, e poi si avra' la collezione di quegli elementi. Chiameremo fondatezza questa caratteristica del concetto di collezione.

Accettato questo punto di vista per il concetto di collezione, e di conseguenza anche per il concetto di insieme, osserviamo che nessun insieme puo' appartenere a se' stesso perche', altrimenti (attenzione qui c'e' l'ulteriore difficolta' del ragionamento per assurdo), l'elemento dell'insieme, che e' l'insieme stesso, diviene conosciuto soltanto quando e' conosciuta la collezione, e non prima: non c'e' quella priorita' conoscitiva che era stata richiesta.

Consideriamo ora la collezione universale, cioe' la collezione di tutti gli elementi, la collezione di tutto. Attenzione, in base a quanto gia' convenuto sulla nozione di collezione (fissare l'attenzione su alcuni elementi, anche nessuno, ma anche tutti), la collezione universale puo' non essere "la collezione delle collezioni" che non e' detto che sia una collezione, perche' nella collezione di tutto vanno considerati esattamente tutti gli <u>elementi</u>: se una collezione non e' elemento, cioe' se non e' insieme, non appartiene alla collezione di tutto, non e' una cosa. Quando si parla di tutto si parla di tutte le cose, non anche delle nozioni che non sono elementi.

Se l'universo fosse (attenzione qui c'e' ancora la difficolta' del ragionamento per assurdo) un insieme, oltre che collezione sarebbe anche una cosa sola, e dunque l'universo, essendo una cosa, apparterrebbe all'universo. Ma questo contraddice quello che abbiamo appena visto come conseguenza della fondatezza del concetto di collezione, cioe' che per determinare una collezione prima si devono conoscere i suoi elementi: infatti come si puo' conoscere prima l'elemento che e' la collezione stessa? Ecco la contraddizione: si e' supposto che l'universo fosse non solo una collezione, la collezione universale, la collezione di tutto, ma che l'universo fosse un insieme, ma allora l'universo appartiene all'universo; il che e' contraddittorio perche' nessun insieme appartiene a se' stesso, se accettiamo la fondatezza della nozione di collezione. Se ammettiamo che la collezione universale sia un insieme, giungiamo ad una contraddizione.

Se non ammettiamo che la collezione universale sia un insieme, allora non c'e' problema. In tal caso la collezione universale e' una collezione che non e' cosa singola, quindi non ha neppure senso domandarsi se appartiene o non appartiene all'universo, perche' non e' un elemento.

Russell nel suo esempio fa qualcosa di appena appena piu' sofisticato che non richiede che gli elementi debbano essere conosciuti prima della collezione, e, dunque, porta alla conclusione anche quando si usa un concetto di insieme piu' generale di quello ultimamente precisato. Russell, in effetti, considera la collezione, chiamiamola R in onore di Russell, i cui elementi sono esattamente tutti quelli che non appartengono a se' stessi, $R=\{x: x\notin x\}$.Questa e' una collezione. Vediamo di indagare chi sono gli elementi che non appartengono a se' stessi. Ad esempio, il treno e' un elemento, e' un atomo, ma come atomo niente gli appartiene, eventualmente lui apparterra' ad un insieme, magari quello il cui unico elemento e' il treno, ma sicuramente non appartiene al treno. Il treno appartiene dunque alla collezione di Russell. Sono tantissimi gli elementi che non appartengono a se' stessi. Se poi accettiamo la fondatezza della nozione di collezione di cui dicevamo prima, nessun insieme appartiene a se' stesso. Cosi' sembrerebbe che quasi tutte le cose dovrebbero appartenere alla collezione di Russell. C'e', invece, qualche elemento che non appartiene all'insieme di Russell? La collezione universale, se fosse un insieme, non ci starebbe: abbiamo visto prima che se U e' un insieme allora U appartiene a U, $U \in U$. U sicuramente non e' nella collezione di Russell, anche se pensiamo che sia un insieme. Il fatto e' che, non volendo essere legati alla fondatezza del concetto di collezione, ora non sappiamo se U e' un insieme o meno, e la sola cosa che possiamo concludere e' che forse ci sono delle cose che non appartengono alla collezione di Russell: se U e' un insieme, allora non vi appartiene. La collezione di Russell sicuramente e' una collezione, forse il tutto, non lo so, ma e' una collezione. Se sosteniamo l'idea che ogni collezione sia un insieme, ripiombiamo nei guai. Ma anche senza sostenere tanto, supponiamo che questa collezione di Russell, R, sia un insieme. Lo supponiamo, non affermiamo che e' vero. Vediamo cosa ne segue. Se R e' un insieme, posso domandarmi se R appartiene a R, $R \in R$. La domanda e' legittima, poiche' supponiamo che R sia un insieme, un elemento e posso domandarmi se un elemento appartiene ad una certa collezione. Di fatto, appartiene o non appartiene? Andiamo a vedere. Ci sono due risposte possibili: si o no. Proviamo a vedere cosa succede se diciamo si. Cosa vuol dire che R appartiene ad R, $R \in R$? Vuol dire R e' elemento di questa collezione $\{x: x \notin x\}$, cioe' le cose che appartengono alla collezione R hanno questa caratteristica: di non appartenere a se' stesse. Quindi se R appartiene a quella collezione allora R non appartiene ad R perche' soddisfa la proprieta' di non appartenere a se' stesso che caratterizza la collezione $\{x: x \notin x\}$. Ma questo non puo' essere, cioe' non puo' essere che se $R \in R$ allora $R \notin R$. Cosi' la risposta alla nostra domanda, non potendo essere si, dovra' essere no. Vediamo cosa succede se la risposta e' no. In questo caso stiamo dicendo che R non appartiene a R, $R \notin R$. Cioe' R non appartiene alla collezione $\{x: x \notin x\}$. E chi non appartiene a questa collezione? Gli elementi che non soddisfano la proprieta' di non appartenere a se' stessi che caratterizza questa collezione. Cosa vuol dire che un elemento non soddisfa questa proprieta'? Significa che e' un elemento per il quale non e' vero che non appartenga a se' stesso, cioe' un elemento che appartiene a se' stesso. Allora R appartiene a R, $R \in R$. E ancora siamo giunti ad una contraddizione, poiche' supponendo che R non appartenga ad R abbiamo concluso che allora R appartiene ad R. E quindi sia in un caso che nell'altro siamo arrivati a delle assurdita': non vanno bene ne' la risposta si ne' la risposta no. Impossibile! Ma siamo giunti a questa impossibilita' supponendo che R sia un insieme, dunque cio' non puo' essere: R e' una collezione che non e' un insieme,un elemento, una cosa singola.

Forse questa dimostrazione e' un po' piu' delicata della dimostrazione precedente perche' e' un po' piu' involuta. Ecco perche' si e' preferito non presentare questo esempio di collezione che non e' un insieme, ma presentare l'altro, pur perdendo il vantaggio teorico che la collezione di Russell non richiede la fondatezza della nozione di collezione (anche se questa caratteristica e' del tutto naturale), ma va bene comunque, sia che la conoscenza della collezione sia precedente, contemporanea o successiva alla conoscenza dei suoi elementi.

Indipendentemente dalla scelta di una presentazione o dell'altra, abbiamo ottenuto esempi di collezioni, U e R, che non possono essere pensate come cosa singola, a meno di non rendere contraddittorio tutto quello che abbiamo fatto. Se vogliamo salvare i nostri concetti di collezione e di insieme dobbiamo accettare che ci siano delle collezioni che non sono delle cose singole, e diventa importante la distinzione tra collezioni e insiemi; ci sono delle collezioni che non sono insiemi, meglio, che non possono essere insiemi.

8. Quali collezioni sono insiemi?

Dal momento che non tutte le collezioni sono insiemi, sorge naturalmente il problema di sapere quali collezioni possono essere insiemi e quali no.

C'e' una risposta, direi, di auspicio, di opportunita'. In un certo senso, e' comodo avere a disposizione tante cose nel mondo in cui si lavora: si puo' pensare che piu' sono gli elementi dell'universo, piu' possono essere le eventuali soluzioni a problemi. Percio' va bene che una certa collezione sia un elemento di cui disporre, e si cerchera' di averne nel massimo numero, cioe' tutte quelle che se considerate come cose singole non portano a contraddizioni: cosi' avro' un mondo molto ricco, un mondo in cui ci sono come oggetti tante e tante collezioni. Piu' ce ne sono, meglio e'! Percio' si accetta la scelta arbitraria, ma, si spera, opportuna, di considerare come elementi tutte quelle collezioni che si possono considerare tali senza pero' che cio' porti a contraddizioni.

Questo sara' pure un buon criterio, pero', sicuramente, e' poco pratico. Infatti, come si puo' decidere se una certa collezione porta a contraddizione una volta che la pensi come cosa singola? E, di conseguenza, come si fa a decidere se una certa collezione e' o non e' un insieme? Se anche si sa che l'assumere come insieme una certa collezione porta a contraddizione, cosa si puo' dire per un'altra? Non si riesce a trovare un pratico metodo per sapere quando una collezione e' un insieme oppure no.

Di fronte a questa difficolta' si possono ridimensionare un po' le ambizioni, e pensare di individuare un metodo che fornisca una parte delle collezioni che possono essere considerate insiemi, cioe' che non e' contraddittorio pensarle come cose singole, almeno quelle che occorrono nell'usuale sviluppo della teoria degli insiemi, generalmente caratterizzate dal poter essere indicate mediante un nome.

Ad esempio, si pensi alla squadra di calcio. E' una collezione, ma si puo' concordare di pensarla come cosa singola? Di fatto lo facciamo. E porta a contraddizioni il pensare la squadra di calcio come cosa singola? Sembrerebbe difficile: di fatto lo facciamo e non abbiamo mai trovato contraddizioni. Non pare che considerare la squadra di calcio come cosa singola porti a contraddizioni. Notate, ho detto non pare che, non ho detto sono sicuro che non. E accetto "non pare che", perche' si dimostra, dopo un lungo corso di logica e di teoria degli insiemi, che la certezza in questo senso non e' raggiungibile. Allora ci si limita a dire non pare che porti a contraddizione. E fintantoche' non pare che porti a contraddizione il supporre che la collezione la squadra di calcio sia un insieme, decido di prendere questa collezione come insieme. Cos'ha di particolare la squadra di calcio? E' una collezione finita, e le cose finite mi pare di poterle controllare, mi pare quasi di poter costruire una situazione in cui ci siano questi elementi che sono le collezioni finite, e, poiche' le affermazioni di un insieme contraddittorio non possono mai essere tutte vere in una situazione concreta, vuol dire che considerare le collezioni finite come cose singole non dovrebbe portare a contraddizione.

E quindi un primo assioma della teoria degli insiemi, cioe' un'affermazione su quali sono le collezioni che consideriamo insiemi, e' questo: le collezioni finite sono insiemi.

In effetti questa affermazione non si trova nei libri, ma viene affermato che la collezione vuota e' un insieme, che la collezione coppia di due insiemi e' un insieme e che la collezione unione su di un insieme e' un insieme, perche' attraverso l'insieme vuoto, la coppia e l'unione si riescono a costruire tutti gli insiemi finiti: sono affermazioni che implicano che le collezioni finite sono insiemi.

Consideriamo piu' attentamente l'unione. Si afferma che date due collezioni che sono insiemi, cioe' tali che sostanzialmente si possono controllare le loro conseguenze, cioe' collezioni per le quali ci si rende conto che possono essere considerate come cose singole senza portare a contraddizioni, allora e' un insieme anche la collezione unione di quelle date. Non si capisce come possa saltar fuori una contraddizione dall'assumere che l'unione di due collezioni sia un insieme quando singolarmente ciascuna collezione e' un insieme, cioe' una collezione pensabile come cosa unica; e quindi si accetta che l'unione di due insiemi e' un insieme.

E l'unione di tre, di quattro,..., in genere di un numero finito di insiemi? Non si vede tanta differenza dal caso dell'unione di due insiemi, d'altra parte l'unione di un numero finito di insiemi non e' che la ripetizione un numero finito di volte dell'unione tra due insiemi, e quindi si preserva, nelle varie applicazioni, la proprieta' di essere un insieme, e anche questa collezione sara' un insieme.

E l'unione di un insieme di insiemi? Se e' dato un insieme di insiemi, esso e' qualcosa di controllabile, e anche i singoli elementi sono controllabili; cosi' anche l'unione dovra' essere ancora controllabile. Pertanto e' naturale accettare che anche l'unione su un insieme di insiemi sia un insieme!

Supponiamo ora che sia data una certa collezione che e' un insieme, cioe' sia possibile sapere che questa assunzione non porta a contraddizione, e si selezionino alcuni degli elementi della collezione, magari quelli che soddisfano una certa proprieta', ottenendo quella che viene chiamata una sottocollezione. Ebbene, anche questa sara' un insieme! Infatti, da dove puo' originarsi una contraddizione? In effetti non so, ne' posso sapere, se si potra' ottenere una contraddizione, ma non capisco come possa scaturire una contraddizione dal pensare come cosa singola la collezione di alcuni elementi di una collezione che gia' puo' essere considerata come elemento senza che cio' porti a contraddizioni.

E che dire della collezione di tutte le sottocollezioni di un insieme? Ciascuna delle sottocollezioni e' un insieme per quanto appena convenuto (e quindi ha senso parlare della loro collezione), ma il considerare la loro collezione come un elemento portera' a contraddizione? Anche qui non si puo' dire, ma non si capisce come si potrebbe arrivare ad una contraddizione supponendo che la collezione dei sottinsiemi di un insieme sia un insieme. Pertanto decidiamo di considerare insieme anche la collezione dei sottinsiemi di un insieme.

E questi sono i primi assiomi della teoria degli insiemi, detti informalmente.

Si noti che tutte le operazioni su collezioni considerate nell'enunciare questi assiomi fanno passare da insiemi finiti a insiemi finiti, e quindi sarebbero conseguenze della prima assunzione sulle collezioni finite, ma noi abbiamo osato impegnarci sulle affermazioni contenute negli assiomi anche quando non si applichino a collezioni finite.

Quelli finora elencati sono alcuni degli assiomi, ma ce n'e' un altro che a me lascia enormi perplessita'. Ed e' questo. Prendiamo la collezione dei numeri naturali, ciascuno e' finito, ma non la loro collezione. Questa collezione e' un insieme? Pensarla come cosa unica porta a contraddizione? Questa volta non ho considerazioni da fare ne a favore ne' contro una qualsiasi risposta a questa domanda. Fate attenzione a come vi propongo di risolvere questo interrogativo: siccome la matematica ha bisogno di collezioni di numeri naturali per costruire i numeri reali e ha bisogno che queste collezioni siano cose singole, allora, proprio per le esigenze della matematica, si decide gratuitamente che la collezione dei numeri naturali sia un insieme, e, sottolineo, questa decisione e' completamente gratuita, fa comodo cosi', non c'e' nessuna giustificazione per questa scelta se non che e' comoda. Nessuno ha dimostrato che questo porta a contraddizione, e finche' qualcuno non dimostrera' che questa assunzione porta a contraddizione, sta bene accettarla.

9. Conclusione.

Questa e' la teoria degli insiemi, originata da Cantor, in cui si svolge la matematica oggi. E' una scelta gratuita, ma opportuna.

Si possono ipotizzare anche altre scelte di assiomi. Se uno dimostra che con una nuova scelta si riesce a sviluppare la matematica bene e si riescono a fare comodamente le cose che ci interessano (ce ne vuole di lavoro, sia ben inteso; e non e' che si faccia una scelta per capriccio), quella scelta va ancora bene. Vi posso dire che, personalmente, sto cercando di costruire una matematica in cui si nega che la collezione dei numeri naturali sia un insieme, perche' ritengo che questa assunzione non sia opportuna. Gli assiomi sono scelte opportune, in qualche modo, non sono ne' veri ne' falsi.

Attraverso la scelta di assiomi sono cosi' giunto a presentarvi, almeno parzialmente, una nozione di insieme, anche con questa sua caratteristica di non definitivita', ma di scelta, si spera, opportuna. Penso che altrettanto debba essere fatto, onestamente, nel trasmettere agli studenti questa nozione.

Riassumendo, la nozione di collezione e' anzitutto una nozione primitiva, cioe' non definibile in termini di altre nozioni. Infatti se si cercasse di dare alla parola collezione un significato attraverso il significato di altre parole di cui conosco gia' il significato, quali parole usare? La nozione di collezione e' cosi semplice, elementare, e' la prima da cui partire, e allora come posso spiegarla con cose ancora piu' semplici? Definirla per mezzo di nozioni definite mediante la nozione di collezione sarebbe un circolo vizioso che non vogliamo. Accettata la nozione di collezione come primitiva, si dovra' cercare di comunicare il significato della parola collezione, magari attraverso l'esperienza, o attraverso l'astrazione da certe esperienze. Nel nostro caso l'esperienza e' quella di fissare la propria attenzione su alcuné cose, ed e' un'esperienza che tutti abbiamo. Il fissare la propria attenzione su alcune cosa ci porta a cogliere il concetto di collezione. Caratteristica fondamentale di questo concetto e', come abbiamo visto, l'estensionalita' (una collezione e' individuata dai suoi elementi), e, abbiamo aggiunto, la fondatezza (per conoscere una collezione vanno prima conosciuti i suoi elementi). Alcune collezioni forse possono essere pensate, e di fatto vengono considerate, come cose singole, queste vengono chiamate insiemi. Si e' visto che non tutte le collezioni possono essere considerate cose singole, e, di conseguenza, ci si domanda quali si e quali no. E, avendo capito che non si puo' avere un criterio generalissimo che determini le collezioni che sono insiemi, si assume, per scelta gratuita, ma, si spera, opportuna, che almeno certe collezioni vadano considerate come cose singole, e questo puo' anche essere precisato attraverso certi processi, cioe' affermando che sono insiemi certe collezioni ottenute nei modi prescritti da collezioni che gia' sappiamo di poter considerare come insiemi. Cosi' accettiamo come insiemi le collezioni finite, la collezione unione di un insieme di insiemi, una sottocollezione di insieme, la collezione dei sottinsiemi di un insieme, la collezione dei numeri naturali.

Queste scelte non determinano completamente la nozione di insieme, nel senso che non permettono di precisare quali sono tutte le affermazioni che sono vere riguardo al concetto di insieme che vogliamo proporre. Per essere piu' precisi si possono aggiungere anche altri assiomi (anche cosi' facendo in modo effettivo non si arrivera' mai a determinare completamente la nozione di insieme). E allora la scelta su dove fermarsi dipende dalla sofisticazione a cui uno vuole arrivare. Si puo' aggiungere l'assioma della scelta, ed anche l'ipotesi del continuo (li nomino solo senza neppure dire cosa significano), che servono per decidere se certe collezioni particolari sono o non sono insiemi. Quando serviranno si introdurranno, e si vedra' di farlo nel modo didatticamente piu' chiaro ed opportuno possibile.

Avendo cosi' completato la presentazione (necessariamente parziale) dei concetti di collezione e di insieme che intendevo svolgere, lasciatemi concludere rispondendo ad una possibile perplessita' di chi ha pazientemente seguito fino a questo punto, perplessita' che puo' essere cosi' formulata: nei testi scolastici non si trova mai la distinzione tra collezione ed insieme, perche' qui e' stata considerata, e a che serve la nozione di collezione se poi in matematica si usa solo quella di insieme?

La motivazione e' puramente didattica. Nella nozione di insieme sono effettivamente presenti i due momenti di collezione e di elemento. E' difficile far cogliere entrambi nel loro giusto valore in una presentazione unitaria del solo concetto di insieme; e se non vengono colti bene entrambi gli aspetti non puo' essere ben chiaro il ruolo e il significato degli assiomi introdotti per precisare la nozione di insieme. Ancora, in questo modo emerge abbastanza chiaramente il problema di considerare collezioni proprie, troppo spesso trascurato nello sviluppo della matematica che troppo disinvoltamente vede in esse solo casi patologici che normalmente non si presentano. Infine, con questa presentazione si ha l'opportunita' di far rilevare un certo punto di vista sulla matematica, forse non molto diffuso, ma, direi, piu' accettabile di altri in base alle odierne conoscenze di matematica, inclusa la logica matematica. Secondo questo punto di vista la matematica viene pensata come una organizzazione opportunamente scelta di alcune nozioni fondamentali, a partire dalle nozioni di collezione, di insieme, di numero, si spazio, per poi proseguire con tutte le altre nozioni studiate negli sviluppi sempre in corso.