Convegno Nazionale
**Matematica senza Frontiere**
Lecce, 5-8 marzo 2003

# Alcuni teoremi spettacolari da portare in classe

Mauro Cerasoli
http://space.virgilio.it/maurocer
mceraso@tin.it

La capacità di divulgare la matematica
è più rara della scoperta di un nuovo teorema.
Sfortunatamente, nell'attuale cervellotica scala di valori,
i divulgatori non vengono ricompensati come meriterebbero.
Gian Carlo Rota

## 1 Si può insegnare ad amare la matematica?

Insegnare ad amare è difficile, più facile è insegnare a non odiare, a ridurre il numero di coloro che dichiarano orgogliosi di essere negati per la matematica. Scriveva Marguerite Yourcenar nelle Memorie di Adriano: il nostro errore più grande è quello di cercare di destare in ciascuno proprio quelle virtù che non possiede, trascurando di coltivare quelle che ha. Prima di tutto l'insegnante di matematica, come dice Rota, deve appartenere alla classe dei maghi delle P.R. (public relations), degli intrattenitori televisivi, dei propagandisti, dei predicatori, dei prestigiatori, dei guru. Si può aggiungere che bisogna essere un po' come Dario Fo a teatro: almeno una volta provate a sbagliare nel dire "ics al cubo". Oppure scrivete alla lavagna matenatica: tutta la classe scoppierà a ridere dimostrando che seguiva attentamente la lezione. E nell'intimo del loro cuore gli studenti penseranno: questo (o questa) è dei nostri! Poi, per convincere sempre più la classe del ruolo della matematica nella comprensione del corpo umano, spiegate come si trovano le probabilità di nascere, così o cosà, con la formula del famoso quadrato del binomio.
Uno dei teoremi più belli della genetica, dovuto al matematico Hardy ed al medico Weinberg, afferma che se in una popolazione gli accoppiamenti avvengono a caso, la frequenza di un dato carattere genetico diventa costante già alla seconda generazione. Tutto ciò, come dice il grande genetista Luca Cavalli Sforza, potrebbe aiutare ad allontanare dalle menti dei nostri giovani figli lo spettro del razzismo: *che si tratti di un anziano senatore o di un giovane fanatico, il razzista è un tipo difficile da convincere. Credo che gran parte dei pregiudizi vengano trasmessi dalla famiglia ed è per questo che la scuola può giocare un ruolo importante. Io farei studiare a tutti un po' di medicina e anche il calcolo della probabilità, per aiutare a comprendere l'importanza del caso* (1995).
La matematica appare spesso allo studente come una disciplina troppo seria,

fredda, astrusa, in poche parole antipatica. Il suo insegnamento è fatto talvolta di certi riti che sembrano ricordare quelli di una messa funebre. Per esempio, quando si recita tristemente:

| | |
|---|---|
| *dato* $\epsilon > 0$ *piccolo a piacere* | (*kirie eleison*) |
| *determinare un naturale tale che* | (*ora pro nobis*) |
| *per ogni* $n > \nu$ *risulti* $\lvert an - l \rvert < \epsilon$ | (*amen*) |
| *come volevasi dimostrare* | (*ite missa est*)! |

Ma, sinceramente, come può interessare a un cittadino italiano (lo studente in genere riveste questo ruolo giuridico) la definizione rigorosa di limite di una successione? A parte il fatto che poi, caso mai facesse una facoltà scientifica, avrà bisogno al più di limiti banali come quello di $1/n$ o di $1/\sqrt{n}$ oppure dei due limiti fondamentali $\sin x/x$ e $(1 + 1/x)^x$. Chiunque, classificato sano di mente dalla USL più vicina, si rende conto subito, ad esempio, che se $0 < x < 1$ allora $x^n$ tende a 0 quando $n$ tende all'infinito. Perché, infatti, $x$ sarà del tipo $1/M$, con $M > 1$, ed è ovvio che $1/M^n$ tende a 0. Non bisogna scomodare la teoria dei limiti, poi, per far capire ad uno studente, che $(1+1/n)^n$ converge al valore approssimato 2,718, altro limite di cui si ha bisogno in pratica. Quasi tutti gli altri servono solo a complicare la vita degli studenti e a far odiare la matematica. Infatti lo studente ingenuo scambia la matematica con il calcolo dei limiti o delle espressioni a otto piani. Prima di fargli dimostrare che $\sin x/x \to 1$, quando $x \to 0$, converrebbe dirgli che quel limite, o meglio l'approssimazione $\sin x \approx x$ per $x \approx 0$, ha a che far con Galileo, con i lampadari del duomo di Pisa e con il benessere degli svizzeri. Per non parlare degli orologi. Con il benessere degli elvetici, vista la massiccia presenza di banche sul loro territorio, ha a che fare anche la funzione $e^x$, ma pochi si azzardano a dare il suo significato finanziario mentre quasi tutti pretendono una precisa e rigorosa dimostrazione dell'esistenza del limite di $(1 + x/n)^n$ per $n \to \infty$. Ma lo studente è più interessato ad amoreggiare, a far soldi che a dimostrare teoremi!
Invece di far calcolare limiti, derivate ed integrali inutili, che oggi calcolano tranquillamente alcune graziose calcolatrici tascabili, come la Voyage 200 o la TI-89, per non parlare dei computer da tavolo, invece di far dimostrare teoremi intuitivamente ovvii, come quello delle mediane di un triangolo, o inutili e noiosi, come il teorema delle tre perpendicolari, o quelli di Rolle e di Lagrange, proviamo a trattare questioni che sembrano complicate e che, con una idea luminosa, diventano tanto semplici e facili da risolvere, oltre che attraenti. Facciamo cose dilettevoli e curiose come si leggeva in un famoso libro di Italo Ghersi.

## 2 Gli alberi di Arthur Cayley

Disegna su un foglio di carta 5 punti distinti a casaccio. Poi uniscili tutti con delle linee a piacere senza intersecarle o creare circuiti.
Traccerai 4 linee!

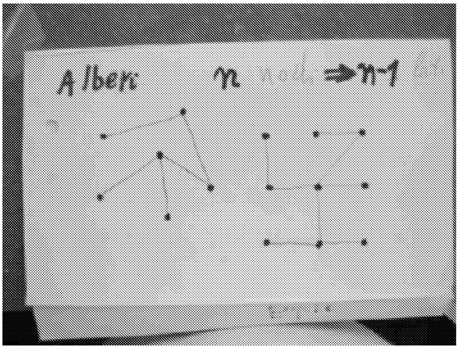


Figura 1:

In altre parole, vale il teorema: un albero di n nodi ha n-1 lati.
E poi, quanti alberi puoi disegnare con n nodi? Ad esempio,
n = 2: un albero a—–b
n = 3: tre alberi a—–b—–c a—–c—–b b—–a—–c
Per n = 4 ci sono 16 alberi: provare per credere! *E* per n uguale $n$? Il teorema di Cayley afferma che sono $n^{n-2}$.

## 3 La caratteristica di Eulero

Disegnate su un foglio di carta dei punti (detti nodi), sempre a casaccio e poi uniteli tra loro con delle linee (dette lati) come volete, a piacere, senza intersecarle. Ad esempio, Roma, Firenze, Bologna, Pescara, Napoli sono i punti e le autostrade che li uniscono sono le linee. Si ottiene una figura chiamata grafo planare in cui possiamo contare il numero n di punti (5 nell'esempio), il numero l di lati (6 nell'esempio). In più possiamo considerare

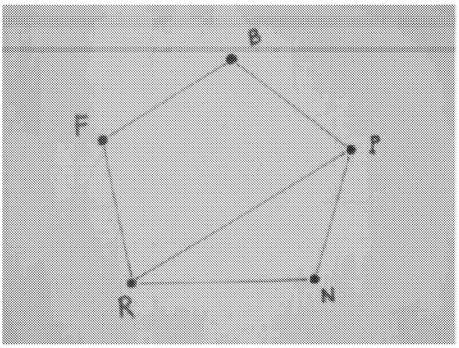


Figura 2:

le regioni del piano racchiuse dai lati, chiamate facce del grafo. Nell'esempio il numero f di facce è 2. Se ora calcoliamo l'espressione: nodi - lati + facce, si ottiene 5 - 6 +2 = 1. Ebbene, si ottiene 1 sempre, ovvero per ogni grafo planare vale la formula di Eulero

$$nodi - lati + facce = 1$$

# 4 La misteriosa formula di Pick

Un'altra formula misteriosa della matematica è quella di Pick del 1899. Consideriamo il quaderno a quadretti, ovvero quello che le maestre chiamano il *geopiano*. In altri termini, consideriamo i nodi del quaderno, cioè le intersezioni delle rette. Fissati alcuni nodi, possiamo considerare il poligono racchiuso da essi, come nella figura seguente..

La formula di Pick ci dà l'area di un tale poligono quando l'unità di misura

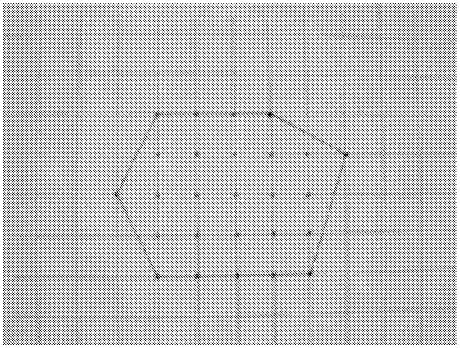

Figura 3:

è la distanza tra le rette...
Basta conoscere:

1. il numero I di nodi interni al poligono (15 nella figura),

2. il numero B di nodi che si trovano sui lati che formano il poligono, che stanno sul bordo del poligono (11 nella figura).

Allora l'area del poligono vale

$$I - 1 + B/2$$

(15-1+11/2 = 39/2 nel nostro caso).
Sarebbe interessante conoscere una dimostrazione elementare di questa formula.

## 5 Le proprietà del numero 153

Si legge nel Vangelo che Simon Pietro tirò a riva la barca con la rete colma di ben 153 pesci. Perché 153 e non 150 o 155? Forse arcani misteri si nascondono dietro il 153? Quali? In verità questo numero ha qualcosa di magico.
Intanto soddisfa alcune proprietà aritmetiche di fronte alle quali solo i minerali più grezzi restano indifferenti:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 16 + 17 = 153$$

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Ci sono soltanto altri tre numeri, oltre a 1 e 153, che sono uguali alla somma dei cubi delle loro cifre: 370, 371 e 407. Queste curiose proprietà appartengono a 153 dalla notte dei tempi e potrebbero dare della matematica quella idea, sbagliata, che sia una disciplina che tratta cose vecchie quanto il mondo. E che dire allora di questa altra meravigliosa proprietà del numero 153 scoperta dal matematico israeliano Phil Kohn nel 1961?
Prendete un qualsiasi numero multiplo di tre, sommate i cubi delle sue cifre, poi sommate i cubi delle cifre del risultato ottenuto e cosìvia. Riuscite ad indovinare cosa apparirà alla fine? Facciamo una prova col numero 162:

$$1^3 + 6^3 + 2^3 = 225; 2^3 + 2^3 + 5^3 = 141; \quad 1^3 + 4^3 + 1^3 = 66;$$

$$6^3 + 6^3 = 432; \quad 4^3 + 3^3 + 2^3 = 99; \quad 9^3 + 9^3 = 1458;$$

$$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702; \quad 7^3 + 2^3 = 351 \qquad \textit{et} \quad \textit{voila} \qquad 3^3 + 5^3 + 1^3 = 153.$$

Ed ora, ripetendo l'algoritmo, avremo sempre il numero 153 di Simon Pietro (o dell'evangelista Giovanni). Il 1961 non è un anno tanto lontano; ci si lamenta spesso che la Storia insegnata nelle nostre scuole si ferma troppo presto e che non tratta gli avvenimenti della seconda metà di questo secolo. Almeno parla della prima guerra mondiale! E la Matematica? Di che secolo è l'argomento più giovane di matematica studiato dai nostri ragazzi? In certe scuole non ci si ferma che alla fine del '600?

## 6 La sezione aurea dai numeri di Fibonacci

Prendiamo i numeri di Fibonacci, ad esempio, introdotti dal matematico pisano Leonardo figlio di Bonaccio, nell'anno di grazia 1202. In pratica, scrisse nel suo *Liber abbaci* che erano i numeri 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ecc. cioè quei numeri $Fn$ che si ottengono sommando gli ultimi due a partire da 1 e 1:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \textit{con} \quad \textit{le} \quad \textit{condizioni} \qquad F_0 = F_1 = 1.$$

Domanda: quanto vale $Fn$ dato un $n$ generico? Come ben sappiamo, noi matematici non dormiamo la notte se non troviamo la formula! Ebbene sono dovuti passare quasi 700 anni prima che il francese Binet trovasse la formula seguente

$$F_n = \{[(1+\sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1-\sqrt{5})/2]^{n+1}/\sqrt{5}$$

Ad essere sinceri bisogna dire che De Moivre era a conoscenza di questa formula intorno al 1718, comunque sempre cinque secoli dopo Fibonacci. Ma come si dimostra la formula? Gli addetti ai lavori sanno che si fa ricorso alle funzioni generatrici: uno strumento inventato da Laplace, non proprio facile da manipolare. Ed allora perché stiamo parlando di ciò se non possiamo riferirlo ai nostri studenti che amano cosìpoco la matematica? Ma perché c'è una bella dimostrazione, molto facile, che possiamo fare in classe! Ed è questa.
Per induzione si prova subito che se un numero $x$ soddisfa l'equazione

$$x^2 = x + 1$$

allora esso soddisfa anche l'equazione

$$x^{n+1} = xF_n + F_{n-1}.$$

Infatti dalla ricorrenza di Fibonacci si ha:

$$x^{n+1} = x(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1} = (x+1)F_{n-1} + xF_{n-2} = x^2F_{n-1} + xF_{n-2}$$

cioè

$$x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$$

che è vera per ipotesi di induzione. Ma l'equazione di secondo grado ha le due radici

$$u = (1+\sqrt{5})/2 \qquad e \qquad v = (1-\sqrt{5})/2$$

quindi esse soddisfano le due equazioni

$$u^{n+1} = uF_n + F_{n-1}$$
$$v_{n+1} = vF_n + F_{n-1}.$$

Da qui, sottraendo membro a membro, si ricava facilmente la formula esplicita per $F_n$.

## 7 Il paradosso dello sparo nella foresta infinita

Della serie: incredibile ma vero! Ingredienti:

1. una foresta infinita (il foglio a quadretti)

2. un compasso
3. una pistola con due cartucce
4. una classe di terza media
5. un docente in gamba.

Prendiamo un foglio a quadretti e supponiamo che sia infinito in tutte direzioni. Supponiamo poi che nei punti di intersezione delle linee, nei nodi, ci siano alberi sottilissimi, come un punto. Fissiamo un nodo A di questo foglio e consideriamo il nodo E alla sua destra (nodo ad Est) ed il nodo N sopra di lui (nodo al Nord). Nel nodo E puntiamo il compasso di un'apertura uguale alla distanza tra E ed N e sia P il punto, nel piano, che il compasso va a toccare sulla retta verticale passante per E. Questo punto P non è un nodo, cioè non è un albero. Ora dal punto A spariamo un colpo di pistola mirando a P. Così la pallottola, puntiforme, passa per P.
Bene, essa attraverserà tutta la foresta senza mai incontrare un nodo, un albero. Ma lo stesso accade anche se vi mettete in P e sparate verso A: la seconda pallottola attraverserà tutto il piano, tutta la foresta, senza mai colpire un nodo, un albero. E pensare che ci sono infiniti alberi da una parte e dall'altra!
Poiché gli studenti non berranno questa bufala ci vorrà una dimostrazione. Solo allora, a grande richiesta degli studenti, quasi obbligato a furor di popolo, il bravo professore potrà dimostrare che non esistono due numeri naturali il cui rapporto sia uguale a $\sqrt{2}$.
Morale della favola: dimostrare teoremi solo a grande richiesta degli studenti. Dimostrare teoremi psicologicamente motivati perché quasi paradossali. In generale gli studenti credono comunque a quello che dice il docente se hanno fiducia in lui, cosìcome credono ai miracoli di Padre Pio. A San Giovanni Rotondo, in provincia di Foggia, dove è sepolto Padre Pio, ci sono 140 alberghi, 220 ristoranti, 350 bar, 7000 posti letto, 8 milioni di visitatori all'anno. Beati coloro che credono, perché di essi è il regno dei cieli, disse qualcuno. E mia madre mi ricorda spesso: a buon intenditore, poche parole. Dimenticavo che Gian Carlo Rota ha scritto: "*credere che compito del matematico sia quello di dimostrare teoremi è come credere che compito di un poeta sia quello di scrivere delle frasi*".

## 8 Il paradosso del gatto

Supponiamo che la Terra sia perfettamente sferica e che sia stata avvolta da una corda all'equatore. Aggiungiamo alla corda un metro di corda e poi rimettiamola intorno alla Terra lasciando quel poco di spazio aggiunto: ora la nuova corda non sarà più attaccata alla Terra. Domanda: una formica passerà sotto la corda? Molti illustri colleghi professori universitari, interpellati, hanno risposto di no, affermando che lo spazio tra la corda e la superficie della Terra sarebbe troppo corto per farci passare una formica. Quando ho fatto vedere loro che, conti alla mano, il raggio della nuova circonferenza aumentava di 1/2 di metro, cioè di circa 18 cm, hanno ammesso, a malincuore, che ci passava anche un gatto.

Morale della favola: fare i conti quando ha senso!

## 9 Matematica con i giochi

L'insegnamento della matematica dovrebbe essere basato su cose belle, piacevoli e allegre: come i giochi. Lo ripetiamo sempre, e non la smetteremo mai di farlo, ma i sordi sono tanti, a cominciare da quelli che redigono i programmi ministeriali. Diceva Leibniz che lo spirito umano si rivela più nei giochi che nelle materie serie : " *L'esprit humain paraissant mieux dans le jeux que dans les matières le plus sérieuses*" (Les Nouveaux Essais sur l'entendement humain, 1704). Per essere più chiari, un problema di scacchi, tipo il Bianco muove e matta in tre mosse, è molto più educativo e formativo, sotto tutti i punti di vista, di uno stupido e inutile calcolo che richiede l'applicazione del teorema di Pitagora o dello svolgimento di un'altrettanto bovina espressione algebrica (come diceva Bunuel nel film Tristana) a otto piani di morbidezza. A proposito, perché non organizziamo un bel corso di scacchi a scuola? Un torneo di scacchi tra studenti in cui vince chi, diciamo entro un'ora, ne risolve di più su dieci problemi del tipo di quello sopra citato. È consentito l'uso della scacchiera e la manipolazione dei pezzi. Non è vietato, anzi è consigliato, l'uso di FRITZ 5, uno dei più potenti programmi per giocare a scacchi con il computer (il prezzo è ridicolo se confrontato con le sue capacità). I ragazzi si divertirebbero da matti (sic!).
Ma se non si vuole giocare a scacchi si può sempre parlare della raccolta delle figurine dei giocatori. A proposito, quanti giorni ci vogliono per riempire l'album, che ha $s$ tipi di figurine, se acquistiamo una figurina al giorno e non è consentito scambiare i doppioni con gli amici? In verità ci vorranno almeno s giorni, ma il numero esatto solo Dio lo sa. Potrebbe essere $s + 3$ come $s + 100$: è una variabile aleatoria! Sappiamo però che il numero medio di giorni è dato dalla meravigliosa formula

$$s(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/s).$$

Un risultato sorprendente! Abbiamo una interessante interpretazione della divergenza della serie armonica mediante la snervante attesa del poverino che non riesce a trovare la figurina del feroce Saladino! Due modi diversi di sentire l'infinito. La formula può essere verificata sperimentalmente per valori piccoli di $s$. Ad esempio, per $s = 6$, si ottiene il valore 14,7 che è anche il numero medio di lanci di un dado necessari per vedere apparire tutte le sue facce. Provate a lanciare un dado fino a quando non escono tutte le facce. Ripetete l'esperimento n volte e segnate ogni volta il numero

di lanci che sono stati necessari per vedere apparire tutte le facce. Per n molto grande la media aritmetica di questi numeri sarà vicina a 14,7.
*Il risolvere problemi*, ha scritto George Polya, un mago della divulgazione matematica,*è un'arte pratica, come il nuotare, o lo sciare o il suonare il piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica.* Cominciamo allora dai problemi pratici. Che cosa c'entra il biliardo con il problema seguente: ci sono due recipienti della capacità rispettiva di 7 e 11 litri e un grosso secchio pieno d'acqua. Come si fa a misurare esattamente due litri, usando solo i due recipienti senza marcarli? Basta considerare appunto un biliardo a forma di parallelogramma di dimensioni $11 \times 7$ inclinato a destra. Sulle basi mettiamo i numeri 0, 1, 2,...,11 mentre sui lati obliqui segniamo 0, 1, 2,...,7. Poi supponiamo di mettere un palla sul vertice in basso a sinistra (indicato con 0) e di tirarla verso destra in modo che arrivata al vertice 11 rimbalzi e finisca al punto 4 sulla base superiore. Rimbalza di nuovo tornando al punto 4 in basso e da qui al punto 4 sul lato obliquo di sinistra, poi va a finire al punto 4 del lato obliquo di destra e così via rimbalzando con le stesse regole, fino a quando colpisce un punto di ascissa 2. A questo punto il gioco finisce ed abbiamo la sequenza di travasi tra i due recipienti (sul libro di Gardner eventuali chiarimenti).
Attenti però ai problemi impossibili: neppure il migliore della classe saprà calcolare, nota la superficie, il raglio della sfera! Per allenarsi a risolvere problemi può provare a dimostrare (senza o con Voyage 200?) che 1.234.567.891 è un numero primo.

## 10 Le spine del cactus e l'infinito

Non è meglio allora parlare in classe dell'infinito nascosto negli aculei di un cactus? A proposito, perché gli spini pungono? Risposta: dicesi pressione di una forza F su una superficie S il rapporto $F/S$. Fissata la forza, per esempio $F = 1$, quanto sarà grande la pressione se la superficie è molto piccola? In altri termini quanto fa 1 diviso un numero positivo molto piccolo? Un numero molto grande! E se l'area è praticamente nulla come quella della punta di uno spino? Un dolore infinito acutissimo! Come quello che provano i nostri studenti quando, per diventare avvocati o medici devono imparare l'assiomatica dei numeri reali, gli intorni, destri e sinistri, $\epsilon$ e $\delta$, la dimostrazione del teorema di Rolle e tutte le altre diavolerie che servono solo a complicare la vita e a far odiare la matematica. Infatti, diceva Kronecker: *Iddio ha creato i numeri naturali (= le cose semplici), il resto ( = le cose complicate) è opera dell'uomo!*

# Riferimenti bibliografici

[1] Keith Devlin: Dove va la matematica, *Bollati Boringhieri*, 1994, pp.318

[2] Martin Gardner: Enigmi e giochi matematici, *Sansoni*, vol.5, 1976, pp.296

[3] Godfrey H. Hardy: Apologia di un matematico, *Garzanti*, 1989, pp.111

[4] Paul Hoffman: La vendetta di Archimede, *Bompiani*, 1990, pp.269

[5] Paul Hoffman: L'uomo che amava solo i numeri, *Mondadori*, 1999, pp.276

[6] Gian Carlo Rota: Pensieri discreti, *Garzanti*, 1993, pp.197