ANELLI SEMPLICI E PRIMITIVI

In questo primo capitolo vengono presentati due risultati classici sugli anelli semplici e primitivi: il Teorema della Densità di Jacobson e il Teorema di Wedderburn-Artin. Tali teoremi si riveleranno utili nel seguito per la dimostrazione di diversi risultati sugli anelli soddisfacenti identità polinomiali.

1.1 IL TEOREMA DELLA DENSITÀ DI JACOBSON

1.1 Definizione. Sia R un anello. Un R-modulo (sinistro) M si dice *irriducibile* (o *semplice*) se $RM \neq 0$ e ogni R-sottomodulo di M è banale. Un anello è *semplice* se $R^2 \neq 0$ e R non ha ideali bilateri propri.

Vale il seguente classico risultato:

1.2 Lemma. ***(Lemma di Schur)***
Siano M ed N degli R-moduli e sia $f : M \to N$ un omomorfismo non nullo di R-moduli. Valgono:

(1) Se M è irriducibile allora f è iniettiva;

(2) Se N è irriducibile allora f è suriettiva;

(3) Se M ed N sono irriducibili allora f è un isomorfismo.

1.3 Definizione. Siano R un anello e M un R-modulo (sinistro). L'insieme

$$\mathcal{A}nn_R(M) = \{r \mid r \in R, \forall m \in M \quad rm = 0\}$$

è un ideale bilatero di R detto l'*annullatore (sinistro)* di M.
Se $Ann_R(M) = \{0\}$, allora l'R-modulo M si dice *fedele*. Evidentemente ogni modulo fedele è non nullo.
Un anello R si dice *primitivo (sinistro)* se esiste un R-modulo (sinistro) fedele e semplice.

1.4 Osservazione. Siano R un anello, M un R-modulo (sinistro) e sia $D := End_R(M)$. Definiamo sul gruppo abeliano $(M, +)$ la seguente operazione esterna:

$$\forall y \in M, \beta \in D \qquad \beta \cdot y := \beta(y)$$

Allora M è un D-modulo sinistro. Indichiamo con $End_D(M)$ l'anello degli endomorfismi di M come D-modulo sinistro e consideriamo l'omomorfismo:

$$\varphi : R \to End_D(M), \qquad r \mapsto L_r$$

dove L_r è definito nel seguente modo:

$$\forall y \in M \qquad L_r(y) = ry.$$

Per ogni $r \in R$, se $L_r = 0$ allora $rM = 0$ e quindi $ker\varphi = Ann_R(M)$.
Pertanto M è fedele se e solo se φ è un monomorfismo.

1.5 Esempio. Sia V uno spazio vettoriale (anche di dimensione infinita) su un corpo D e sia $R := End_D(V)$. Allora R è un anello primitivo e V è l'R-modulo fedele irriducibile.
Infatti, se $u \in V - \{0\}$ e $v \in V$ allora esiste $f \in End_D(V)$ tale che $f(u) = v$. Pertanto, per ogni elemento non nullo $u \in V$, si ha $Ru = V$ e quindi V non ha R-sottomoduli propri.
Inoltre, per ogni $\theta \in R$, $\theta(V) = 0$ se e solo se $\theta = 0$, cioè $Ann_R(V) = 0$.
Pertanto V è un R-modulo fedele.

Per i moduli irriducibili vale la seguente proprietà:

1.6 Proposizione. *Siano R un anello ed M un R-modulo irriducibile. Se $v \in M - \{0\}$ allora $Rv = M$ e M si dice modulo ciclico.*

Dimostrazione. Dalla semplicità di M segue $Rv = 0$ oppure $Rv = M$.
Supponiamo che $Rv = 0$. Allora, posto

$$N := \{x \mid x \in M,\ Rx = 0\},$$

risulta $N \neq 0$ e quindi, essendo N un sottomodulo di M, $N = M$, cioè $RM = 0$. Ma ciò è impossibile perché M è un R-modulo irriducibile e così $Rv \neq 0$. Pertanto $Rv = M$.

□

1.7 Osservazione. Se R è un anello unitario e M un R-modulo irriducibile, allora M è un R-modulo unitario.

Diamo, ora, la definizione di anello denso:

1.8 Definizione. Sia M uno spazio vettoriale (sinistro) su un corpo D e sia R un sottoanello di $End_D(M)$. R si dice *denso* in $End_D(M)$ se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni sottoinsieme D-indipendente $\{z_1, \ldots, z_n\}$ di M e per ogni arbitrario sottoinsieme $\{y_1, \ldots, y_n\}$ di M, esiste $\vartheta \in R$ tale che, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, vale $\vartheta z_i = y_i$.

In particolare, nel caso di dimensione finita, $End_D(M)$ è l'unico sottoanello denso in quanto vale la seguente:

1.9 Proposizione. *Siano M uno spazio vettoriale su un corpo D, $n \in \mathbb{N}$ tale che $dim_D M = n$ e R un sottoanello di $End_D(M)$. Se R è denso in $End_D(M)$ allora $R = End_D(M)$.*

Dimostrazione. Siano $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di M su D e $f \in End_D(M)$. Siano inoltre $w_1, \ldots, w_n \in M$ tali che

$$\forall\, i \in \underline{n}\rfloor \qquad w_i = f(v_i).$$

Poiché R è denso in $End_D(M)$, esiste $\theta \in R$ tale che, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, $\theta v_i = w_i$. Poichè θ e f coincidono sugli elementi della base, segue che $\theta = f$. Pertanto $End_D(M) \subseteq R$, cioè $End_D(M) = R$.

$\square$

Enunciamo infine il seguente lemma:

1.10 Lemma. *Siano R un anello, V un R-modulo irriducibile e poniamo $D := End_R(V)$. Se W è un D-sottospazio di V di dimensione finita su D e $u \in V - W$, allora esiste $r \in R$ tale che $rW = 0$ e $ru \neq 0$.*

1.11 Teorema. ***(Teorema della densità di Jacobson [8])***
Siano R un anello primitivo, M un R-modulo fedele e irriducibile e poniamo $D := End_R(M)$. Allora R è isomorfo ad un sottoanello denso di $End_D(M)$.

Dimostrazione. Considerato l'omomorfismo

$$\varphi : R \to End_D(M), \qquad r \mapsto L_r,$$

dall'osservazione (**1.4**) e dall'irriducibilità di M, segue subito che $R \cong \varphi(R)$ e quindi resta solo da provare che $\varphi(R)$ è un sottoanello denso in $End_D(M)$. Siano $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in M$ elementi linearmente indipendenti su D e $w_1, \ldots, w_n \in M$. Posto, per ogni $i \in \underline{m}\rfloor$, $W_i := \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$, dalla lineare indipendenza di $v_1, \ldots, v_n$ segue subito che $v_i \notin W_i$. Per il lemma (**1.10**), esiste $r_i \in R$ tale che $r_i w_i = 0$ e $r_i v_i \neq 0$. Poiché $r_i v_i \in M$ e $r_i v_i \neq 0$, da (**1.6**) segue che

$$\forall\, i \in \underline{n}\rfloor \qquad R r_i v_i = M$$

e quindi esistono $t_1, \dots, t_n \in R$ tali che

$$\forall\, i \in \underline{n|} \qquad t_i r_i v_i = w_i.$$

Posto $r := \sum_{i=1}^n t_i r_i \in R$ e osservato che

$$\forall\, i \neq j \qquad t_j r_j v_i \in t_j(r_j W_j) = t_j \cdot 0 = 0,$$

si ha

$$\forall\, i \in \underline{n|} \qquad r v_i = w_i.$$

Pertanto

$$\forall\, i \in \underline{n|} \qquad L_r(v_i) = r v_i = w_i.$$

e, poiché $L_r \in \varphi(R)$, $\varphi(R)$ è denso in $End_D(M)$.

□

E' noto che se F è un campo e V uno spazio vettoriale su F di dimensione finita $n \in \mathbb{N}$ allora $End_F(V) \cong M_n(F)$. Ciò però non vale se F è un corpo.

1.12 Definizione. Sia R un anello. Si dice *anello opposto* di R e si denota con R^{op} l'anello che ha R come sostegno, come addizione quella definita in R e la seguente moltiplicazione $\circ$:

$$\forall\, a, b \in R^{op} \qquad a \circ b := b \cdot a$$

dove $\cdot$ è il prodotto definito in R.
L'applicazione

$$\theta : R \to R^{op}, \qquad r \mapsto r$$

è un *anti-isomorfismo*, cioè è un isomorfismo di gruppi additivi tale che

$$\forall\, r_1, r_2 \in R \qquad \theta(r_1 r_2) = \theta(r_2)\theta(r_1)$$

1.13 Osservazione. Se D è un corpo allora anche D^{op} è un corpo.

1.14 Proposizione. *Siano D un corpo, V uno spazio vettoriale su D e $n \in \mathbb{N}$ tale che $dim_D V = n$. Allora $End_D(V) \cong M_n(D^{op})$.*

Possiamo enunciare, ora, il seguente corollario del Teorema della Densità di Jacobson:

1.15 Corollario. *Siano R un anello primitivo, M un R-modulo fedele e irriducibile e $D := End_R(M)$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $R \cong M_n(D^{op})$ oppure, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono un sottoanello S_n di R ed un epimorfismo φ_n da S_n su $M_n(D^{op})$.*

1.2 Il Teorema di Wedderburn-Artin

1.16 Definizione. Siano R un anello e M un R-modulo sinistro. Si dice che M è *Artiniano sinistro* se e solo se ogni insieme non vuoto di R-sottomoduli di M ha un elemento minimale.
Un anello R è *Artiniano a sinistra* se è un R-modulo Artiniano sinistro.

Analogamente si definiscono i moduli e gli anelli *Artiniani destri.*
Dalla definizione segue subito che un R-modulo M è Artiniano (sinistro) se e solo se soddisfa la *condizione delle catene discendenti (DCC)*, cioè se e solo se per ogni catena

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots A_m \supseteq \dots$$

di R-sottomoduli di M esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $i \geq n$, $A_i = A_n$.

1.17 Osservazioni. Sia R un anello.

(1) Siano M un R-modulo ed N un R-sottomodulo di M. Allora M è Artiniano (sinistro) se e solo se N e M/N sono Artiniani (sinistri).

(2) Siano $k \in \mathbb{N}$ e $M_1, \dots, M_k$ R-moduli. Allora la somma diretta

$$\bigoplus_{i=1}^{k} M_i$$

è Artiniana (sinistra) se e solo se, per ogni $i \in \underline{k}\rfloor$, M_i è Artiniano (sinistro).

1.18 Esempio. Siano D un corpo e $n \in \mathbb{N}$. Allora $M_n(D)$ è un anello Artiniano a destra e a sinistra ed è semplice e primitivo.
Dimostriamo dapprima che $M_n(D)$ è Artiniano a sinistra e a destra.
Per ogni $i, j \in \underline{n}\rfloor$, denotiamo con $e_{ij} \in M_n(D)$ la *matrice elementare* avente l'unità di D nella posizione (i,j) e 0 in tutte le altre. Tali matrici godono della seguente proprietà:

$$\forall\, i, j, p, q \in \underline{n}\rfloor \qquad e_{ij}e_{pq} = \delta_{jp}e_{iq}$$

dove δ_{jp} è il simbolo di Kronecker. Ne segue che, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, l'insieme

$$L_i := M_n(D)e_{ii} = \{(a_{kj}) \in M_n(D) \,|\, \forall\, j \neq i \quad a_{kj} = 0\}$$

è un ideale sinistro minimale di $M_n(D)$ e quindi è un modulo su $M_n(D)$ irriducibile. Pertanto L_i è Artiniano sinistro e, per **(1.17(1))**, anche $M_n(D)$ è Artiniano sinistro.
Inoltre si dimostra che, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, L_i è fedele e quindi $M_n(D)$ è primitivo sinistro.

Procedendo in modo analogo si dimostra che, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, l'insieme $W_i := e_{ii}M_n(D)$ è un ideale destro minimale fedele e che $M_n(D)$ è Artiniano destro e primitivo destro.
Dimostriamo infine che $M_n(D)$ è semplice. Sia I un ideale bilatero non nullo di $M_n(D)$ e sia $x \in I - \{0\}$. Allora, per ogni $i, j \in \underline{n}\rfloor$, esistono $a_{ij} \in D$ tali che $x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}$. Poiché I è bilatero, per ogni $p, q, i_0, j_0 \in \underline{n}\rfloor$, $e_{p\,i_0}\, x\, e_{j_0\,q} \in I$. Ma

$$e_{p\,i_0}\, x\, e_{j_0\,q} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{p\,i_0}e_{ij}e_{j_0\,q} = a_{i_0\,j_0}e_{pq}$$

e quindi, per ogni $p, q \in \underline{n}\rfloor$, $e_{pq} \in I$, cioè $M_n(D) \subseteq I$. Pertanto $I = M_n(D)$.

1.19 Teorema. ***(Teorema di Wedderburn-Artin)***
Sia R un anello. Sono equivalenti:

(i) R è semplice Artiniano a sinistra;

(ii) R è primitivo Artiniano a sinistra;

(iii) Esistono un corpo D ed uno spazio vettoriale V su D di dimensione finita $n \in \mathbb{N}$ tali che $R \cong End_D(V)$;

(iv) Esistono $n \in \mathbb{N}$ ed un corpo Δ tali che $R \cong M_n(\Delta)$.

Dimostrazione. **"(i)⇒(ii)"** Poichè R è Artiniano a sinistra, l'insieme di tutti gli ideali sinistri non nulli di R contiene un ideale sinistro minimale L. Segue che L è irriducibile come R-modulo in quanto gli R-sottomoduli di un ideale sono tutti e soli gli ideali sinistri di R contenuti nell'ideale stesso.
Essendo R un anello semplice e $Ann_R(L)$ un ideale bilatero, si ha che $Ann_R(L) = 0$ oppure $Ann_R(L) = R$. Se fosse $Ann_R(L) = R$ allora $RL = 0$ e quindi, posto

$$I := Ann_R(R) = \{x \mid x \in R,\ Rx = 0\},$$

si avrebbe $I \neq 0$. Ma I è un ideale bilatero di R e così, sempre per la semplicità di R, $I = 0$ oppure $I = R$. Poiché $I \neq 0$ si ha $I = R$ da cui segue $R^2 = 0$. Ciò è impossibile in quanto R è semplice e quindi $Ann_R(L) = 0$. Pertanto L è un R-modulo fedele irriducibile e perciò R è un anello primitivo.
"(ii)⇒(iii)" Poichè R è primitivo, esiste un R-modulo V fedele e irriducibile e sia $D := End_R(V)$. Proviamo che $dim_D V$ è finita.
Supponiamo che tale dimensione sia infinita e quindi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistano $v_1, \ldots, v_n \in V$ linearmente indipendenti su D. Per il Teorema della Densità di Jacobson, R è isomorfo ad un sottoanello denso di $End_D(V)$ e così, posto

$$L_n := \{x \mid x \in R,\ xv_1 = xv_2 = \ldots = xv_n = 0\},$$

si ha $L_n \neq \emptyset$. Inoltre L_n è un ideale sinistro di R e risulta

$$L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_n \supset L_{n+1} \supset \ldots$$

con $L_n \neq L_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, se $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} \in V$ sono linearmente indipendenti, dalla densità di R in $End_D(V)$ segue che esiste $x \in R$ tale che $xv_1 = \ldots = xv_n = 0$ e $xv_{n+1} \neq 0$.
Pertanto R non è Artiniano sinistro e ciò contraddice l'ipotesi.
Segue che $dim_D V$ è finita e quindi, per **(1.9)**, $R \cong End_D(V)$.
"(iii)⇒(iv)" Da **(1.14)** segue che $End_D(V) \cong M_n(D^{op})$ e quindi, per avere la tesi, basta porre $\Delta := D^{op}$.
"(iv)⇒(i)" Segue da **(1.18)**.

□

Vediamo, ora, come sono fatti i moduli irriducibili su anelli di matrici.

1.20 Proposizione. *Siano D un corpo, $n \in \mathbb{N}$ e $R := M_n(D)$. Se V è un R-modulo irriducibile allora esiste $i \in \underline{n}\rfloor$ tale che $V \cong Re_{ii}$.*

Dimostrazione. Poichè R è unitario, V è un R-modulo unitario irriducibile. Se $v \in V - \{0\}$ allora esiste $i \in \underline{n}\rfloor$ tale che $e_{ii}v \in V - \{0\}$. Per **(1.6)**, $Re_{ii}v = V$ e quindi il seguente omomorfismo di R-moduli

$$\varphi : Re_{ii} \to V, \qquad x \mapsto xv$$

è non nullo. Inoltre, dalla dimostrazione di **(1.18)** segue che Re_{ii} è un R-modulo irriducibile e così, per il lemma di Schur, φ è un isomorfismo. Pertanto $V \cong Re_{ii}$.

□

Al fine di caratterizzare i moduli irriducibili di un qualsiasi anello, introduciamo la seguente definizione:

1.21 Definizione. Siano R anello ed L un ideale sinistro di R. L è *regolare* in R se esiste $e \in R$ tale che, per ogni $x \in R$, $x - xe \in L$.
Se R è unitario e 1_R è la sua unità basta porre $e := 1_R$.

1.22 Proposizione. *Siano R un anello e M un R-modulo. Allora M è irriducibile se e solo se esiste un ideale sinistro L massimale e regolare in R tale che $M \cong R/L$.*

Dimostrazione. Se M è irriducibile allora $M \neq 0$ e sia $v \in M - \{0\}$. Per **(1.6)**, $Rv = M$ e quindi il seguente omomorfismo

$$f : R \to M, \qquad x \mapsto xv$$

è un epimorfismo non nullo. Posto $L := ker\, f$, per il teorema di omomorfismo per i moduli, si ha che L è un ideale sinistro di R e $R/L \cong M$.
Inoltre L è massimale. Infatti, sia A un ideale sinistro di R tale che $L \subseteq A$.

Allora, per il teorema di corrispondenza per anelli, A/L è un ideale sinistro di R/L e, essendo $R/L \cong M$, dall'irriducibilità di M segue che $A = L$ oppure $A = R$.
Dimostriamo, infine, che L è regolare. Poiché f è suriettiva, esiste $e \in R$ tale che $f(e) = v$, cioè $ev = v$. Allora, per ogni $x \in R$, $xev = xv$ e così $x - xe \in ker\, f = L$. Segue che L è regolare.
Supponiamo, ora, che esista un ideale sinistro L massimale e regolare in R tale che $M \cong R/L$. Dalla regolarità di L si deduce che $RM \neq 0$ e così dalla massimalità di L segue subito che M è irriducibile.

□

1.23 Osservazione. Siano R un anello e M un R-modulo irriducibile.
Per (**1.22**), esiste un ideale sinistro L massimale e regolare in R tale che $M \cong R/L$. Pertanto

$$\begin{aligned} Ann_R(M) &= Ann_R(R/L) = \{x \mid x \in R,\, r \cdot R/L = 0\} \\ &= \{x \mid x \in R,\, xR \subseteq L\} \end{aligned}$$

Osserviamo che $Ann_R(R/L)$ è un ideale bilatero di R contenuto in L. Infatti, poiché L è regolare, esiste $e \in R$ tale che, per ogni $x \in R$, $x - xe \in L$ e quindi, se $a \in Ann_R(R/L)$, $a - ae \in L$. Ma $ae \in aR \subseteq L$ e quindi $a \in L$, cioè $Ann_R(R/L) \subseteq L$. Inoltre si dimostra che $Ann_R(R/L)$ è il più grande ideale di R contenuto in L.