UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"Ennio De Giorgi"

Simona Fornaro
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

Stefania Maniglia
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

Giorgio Metafune
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

EQUAZIONI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE

Parte prima: teoria L^2 e C^α

QUADERNO 4/2004

Edizioni del Grifo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"Ennio De Giorgi"

Simona Fornaro
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

Stefania Maniglia
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

Giorgio Metafune
Dipartimento di Matematica
Università di Lecce
Lecce - Italia

Equazioni ellittiche del secondo ordine

Parte prima: teoria L^2 e C^α

QUADERNO 4/2004

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"Ennio De Giorgi"

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

I **QUADERNI** del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

1. lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
2. testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del dipartimento o esterni;
3. lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

ISBN: 88-8305-017-7

PREFAZIONE

Questo quaderno è basato sulle lezioni tenute da G. Metafune nel corso di Equazioni Ellittiche per gli studenti di dottorato in Matematica dell'università di Lecce, nell'anno accademico 2001-2002. L'idea guida del corso è stata quella di introdurre ad alcuni metodi classici della teoria delle equazioni ellittiche, senza alcuna pretesa di completezza dei risultati esposti. Per questa ragione si è scelto di trattare solo il caso delle equazioni (lineari) del secondo ordine, evitando dunque di considerare equazioni d'ordine superiore o sistemi. Tuttavia, anche con queste riduzioni, il materiale sarebbe risultato troppo ampio per essere trattato in un solo corso ed è stato necessario selezionare alcuni metodi tra i tanti oggi disponibili. La scelta è caduta sui metodi variazionali e sulle stime di Schauder mentre si è deciso di evitare del tutto la teoria L^p che richiede una preparazione di base in analisi armonica. Naturalmente non vi sono risultati nuovi nel presente quaderno e anche la trattazione del materiale, ormai classico, è largamente ispirata ad altri trattati quali i libri di E. Giusti [2] e di N.V. Krylov [3], con alcune differenze che, ci sembra, motivano la presente pubblicazione.

Vediamo brevemente il contenuto dei diversi capitoli che rispecchiano, nell'ordine di esposizione, l'effettivo svolgimento delle lezioni. Il primo capitolo, di carattere introduttivo, mira a chiarire attraverso vari esempi e controesempi, l'inadeguatezza della norma uniforme nei problemi di regolarità ellittica e introduce ai metodi variazionali del capitolo successivo. In quest'ultimo, dopo aver provato l'esistenza e unicità della soluzione debole del problema di Dirichlet mediante il lemma di Lax-Milgram, si affronta il problema della regolarità con il metodo dei quozienti differenziali di L. Nirenberg prima nell'intero spazio, poi nel semispazio e infine in un aperto regolare, mediante carte locali. Nel terzo capitolo, seguendo l'impostazione del testo di D. Gilbarg e N.S. Trudinger [1], si dimostrano alcuni principi del massimo che forniscono delle stime a priori utili per provare l'unicità della soluzione classica del problema di Dirichlet. Nel capitolo successivo si introducono gli spazi di funzioni hölderiane e si prova una caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane, dovuta a S. Campanato, che risulterà fondamentale nel seguito per provare le stime di Schauder. Nel Capitolo 5 è provata l'esistenza (e unicità) della soluzione del problema di Dirichlet in spazi di funzioni hölderiane. Lo schema dimostrativo poggia sul metodo di continuità, per cui si mira ad ottenere l'esistenza della soluzione per un problema modello, quello relativo al Laplaciano, e opportune stime a priori per un operatore generale. Il problema modello nell'intero spazio e nel semispazio è trattato seguendo il metodo di Campanato ed evitando dunque la stima diretta del potenziale newtoniano come nell'approccio classico. Il caso dei coefficienti variabili è poi affrontato con gli usuali metodi di localizzazione e perturbazione e quello dell'aperto regolare con il metodo delle carte locali. Il problema con derivata obliqua è trattato nel Capitolo 6, esplorando le idee esposte nel libro di Krylov [3] (sezione 5.5) e riducendo le stime a priori per un problema modello alle stime a priori per un opportuno problema di Dirichlet. Ancora una volta, tecniche di localizzazione, perturbazione e carte locali permettono di risolvere il caso generale. Infine, alcune applicazioni ad equazioni non lineari sono raccolte nell'ultimo capitolo.

S. Fornaro
S. Maniglia
G. Metafune
Lecce, 8 ottobre 2004

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Oggetto del nostro studio sono operatori differenziali lineari ellittici del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu(x) + c(x)u(x). \tag{1.1}$$

Assumiamo che i coefficienti a_{ij},b_i e c siano funzioni reali limitate e uniformemente continue in Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e, senza restrizione, che la matrice (a_{ij}) dei coefficienti del secondo ordine sia simmetrica (cioè $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j). Richiediamo inoltre che l'operatore soddisfi la condizione di ellitticità

$$\exists \quad \nu_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Osserviamo che la (1.2) dà una stima dal basso sulla forma quadratica associata alla matrice (a_{ij}), mentre la limitatezza dei coefficienti implica facilmente una stima dall'alto

$$\left| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \right| \leq M \sum_{i,j=1}^{N} |\xi_i\xi_j| \leq MN^2|\xi|^2.$$

Un operatore che soddisfa le condizioni di sopra si dice **uniformemente ellittico**.

E' utile per il seguito richiamare la seguente definizione.

Definizione 1.0.1 *Diciamo che un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è di* **classe $\mathbf{C^k}$**, *con $k \in \mathbb{N}$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $H : \overline{B}_R \to \overline{U}$ diffeomorfismo di classe C^k, tali che*

$$U \cap \Omega = H(B_R^+) \quad e \quad U \cap \partial\Omega = H(\overline{B}_R^+ \cap \{x_N = 0\}).$$

La coppia (U, H) *è detta* **carta locale** *su* Ω.

Osservazione 1.0.2 Componendo eventualmente con un'omotetia, si può sempre prendere $R = 1$ nella definizione precedente.

1.1 Alcuni controesempi all'esistenza e alla regolarità rispetto alla norma uniforme di soluzioni di equazioni ellittiche

L'interesse verso operatori come quello appena introdotto è legato soprattutto alla risoluzione di problemi al contorno del tipo

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

La scelta dello spazio funzionale al quale deve appartenere il dato f ed entro il quale cercare la soluzione è fondamentale per la risolubilità del problema. Per esempio, esso è mal posto in spazi di funzioni continue, nel senso che se $f \in C(\overline{\Omega})$ allora non è assicurata l'esistenza di una soluzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$, neanche quando come A si considera il Laplaciano Δ. L'esempio che segue mira a chiarire questo punto, mostrando peraltro che il problema è di regolarità interna.

Esempio 1.1.1 Poniamoci in $\mathbb{R}^2$ e costruiamo intanto una funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che u_{xx} e u_{yy} sono continue nell'origine, mentre u_{xy} non lo è. Definiamo

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{4^k} (\eta P)(2^k x, 2^k y) \tag{1.4}$$

dove $P(x, y) = xy$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ è tale che $\eta \equiv 1$ in $B_1(0)$, $\eta \equiv 0$ in $B_2(0)^c$ e $0 \leq \eta \leq 1$, e la successione (c_k) è infinitesima con $0 \leq c_k \leq 1$ e $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$.

Per come sono stati scelti P ed η, il prodotto ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate, perciò la serie (1.4) converge totalmente insieme alla serie delle derivate prime; ciò prova che $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Lo stesso argomento non si estende alla serie delle derivate seconde, perciò occorre fare un discorso locale: sia $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Posto $r_0 = |(x_0, y_0)|$, denotiamo con U la sfera di raggio $\frac{r_0}{2}$ centrata in (x_0, y_0), (osserviamo che $(0, 0) \notin U$). In U la serie che definisce u risulta essere una somma finita (perchè da un certo k in poi vale $2^k r_0 \geq 2$), pertanto u è C^∞ al di fuori dell'origine.

A questo punto per studiare il comportamento delle derivate seconde di u vicino allo zero, dividiamo $B_1(0)$ in corone circolari aperte $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2^{r+2}} < |(x,y)| < \frac{1}{2^r}\}$ (non disgiunte). Per (x,y) in C_r risulta

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{4^k}(\eta P)(2^k x, 2^k y) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{c_k}{4^k} 4^k xy + \frac{c_{r+1}}{4^{r+1}}(\eta P)(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) \\ &\quad + \frac{c_{r+2}}{4^{r+2}}(\eta P)(2^{r+2}x, 2^{r+2}y) \end{aligned}$$

e quindi

$$u_{xx}(x,y) = c_{r+1}(\eta P)_{xx}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xx}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y) \to 0$$

se $(x,y) \to 0$. Ne segue che esiste $u_{xx}(0,0)$ ed è pari a 0.

Con le stesse argomentazioni si ottiene che $u_{yy}(0,0) = 0$. Invece

$$u_{xy}(x,y) = \sum_{k=0}^{r} c_k + c_{r+1}(\eta P)_{xy}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xy}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y)$$

esplode per $(x,y) \to (0,0)$ $(r \to \infty)$, perchè per ipotesi il primo termine tende a $+\infty$ e gli altri due sono limitati.

A questo punto poniamo $\Omega := B_r(0)$, $f = \Delta u \in C(\Omega)$. Allora non esiste alcuna funzione v in $C^2(B_r(0))$ tale che $\Delta v = f$.

Se per assurdo esistesse una tale v, si avrebbe $\Delta(u - v) = 0$ in $B_r(0) \setminus \{(0,0)\}$ .Quindi $u - v$ sarebbe armonica in $B_r(0) \setminus \{(0,0)\}$ e limitata, come tale prolungabile ad una funzione armonica in tutto $B_r(0)$. Tale estensione sarebbe pertanto di classe $C^\infty(B_r(0))$ e ciò implicherebbe che la stessa u è $C^2(B_r(0))$, contro quanto provato in precedenza.

L'esempio appena illustrato mostra anche che la possibilità di tenere sotto controllo le singole derivate pure non permette di controllare la limitatezza della derivata mista e anticipa in parte il prossimo risultato generale.

Teorema 1.1.2 (Ornstein) *Siano B, $A_1, \cdots, A_r$, operatori differenziali a coefficienti costanti, omogenei di grado m e linearmente indipendenti. Allora non esiste alcuna costante C tale che per ogni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulti:*

$$\|Bu\|_\infty \le C(\sup_{1 \le i \le r} \|A_i u\|_\infty + \|u\|_\infty).$$

DIM. Definiamo per ogni intero positivo n la funzione

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^{mk}}(\eta P)(2^k x),$$

dove P è un polinomio omogeneo di grado m tale che $B(P) = 1$ e $A_i(P) = 0$ per ogni i (per la sua esistenza si veda l'Esercizio 1.1.4), mentre i coefficienti (c_k) e la funzione η sono presi come nell'esempio precedente. Poichè sono definite come somme finite di funzioni di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, le u_n sono in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dalla definizione di u_n si vede immediatamente che

$$|u_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{mk}}\right) \|\eta P\|_\infty =: K,$$

ossia la successione (u_n) è limitata uniformemente in n. Inoltre, se $|x| \geq 1$ allora $u_n(x) = 0$. Se $|x| < 1$, esiste $r \in \mathbb{N}_0$ tale che $\frac{1}{2^{r+2}} < |x| < \frac{1}{2^r}$. Ne segue che (convenendo di porre $c_k = 0$ se $n < r \leq r+2$)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{2^{mk}} (\eta P)(2^k x) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{c_k}{2^{mk}} 2^{mk} P(x) + \frac{c_{r+1}}{2^{(r+1)m}} (\eta P)(2^{r+1} x) \\ &+ \frac{c_{r+2}}{2^{(r+2)m}} (\eta P)(2^{r+2} x). \end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto della scelta di P e del fatto che ogni A_i è un operatore differenziale omogeneo di grado m, otteniamo che

$$(A_i u_n)(x) = c_{r+1} A_i(\eta P)(2^{r+1}x) + c_{r+2} A_i(\eta P)(2^{r+2}x)$$

e analogamente

$$(Bu_n)(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k + c_{r+1} B(\eta P)(2^{r+1}x) + c_{r+2} B(\eta P)(2^{r+2}x).$$

Siccome ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate e i coefficienti di A_i sono costanti, per ogni n, i, si ha

$$\|u_n\|_\infty + \|A_i u_n\|_\infty \leq K + 2C$$

dove $C = \max\limits_{1 \leq i \leq r} \{\|A_i(\eta P)\|_\infty, \|B(\eta P)\|_\infty\}$, mentre per $n = r$ risulta

$$\|Bu_r\|_\infty \geq \left(\sum_{k=0}^{r} c_k\right) - 2C.$$

Mandando $r \to +\infty$, deduciamo l'asserto. $\square$

Esercizio 1.1.3 Provare che la funzione $f(x, y) = xy \lg(x^2 + y^2)$ in $B_1(0)$ ha le derivate seconde f_{xx} e f_{yy} limitate, mentre f_{xy} è illimitata.

Esercizio 1.1.4 Provare che dato X spazio vettoriale sul campo scalare K, se $f_1, ..., f_n, f$ sono funzionali lineari su X tali che $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$, allora esistono costanti $c_1, ..., c_n \in K$ per cui $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i f_i$. Dedurre da qui l'esistenza del polinomio usato nella dimostrazione del teorema di Ornstein.

1.2 ALCUNE STIME A PRIORI PER IL LAPLACIANO IN L^2

Il teorema di Ornstein è un risultato negativo di regolarità interna. Osserviamo però che la norma considerata nelle stime è la norma $\|\cdot\|_\infty$. La situazione migliora considerando la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

Proposizione 1.2.1 *Per ogni ϕ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulta*

(a) $\|\nabla\phi\|_{L^2} \le \|\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \|D_{ij}\phi\|_{L^2}^2 = \|\Delta\phi\|_{L^2}^2$.

In particolare $\|\phi\|_{H^2} \le C(\|\phi\|_{L^2} + \|\Delta\phi\|_{L^2})$.

DIM. Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per dimostrare (a) è sufficiente usare l'identità

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi\,\Delta\phi = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2$$

e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Integrando per parti risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_{ii}\phi D_{jj}\phi = \int_{\mathbb{R}^N} (D_{ij}\phi)^2,$$

da cui sommando su i, j si ha subito (b).

Infine tenendo conto della disuguaglianza $ab \le 2^{-1}(a^2 + b^2)$ da (a) e (b) si deduce l'ultima stima. $\square$

La proposizione che segue rappresenta un primo risultato di regolarità ellittica in norma L^2 per il Δ.

Proposizione 1.2.2 *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto; supponiamo $\Delta u = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ nel senso delle distribuzioni. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.*

DIM. Sia $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \le \varrho \le 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varrho = 1$, ϱ pari (quest'ultima ipotesi serve per non avere problemi di segno nelle convoluzioni). Se $\varepsilon > 0$, consideriamo le funzioni approssimanti $\varrho_\varepsilon = \varepsilon^{-N}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. E' noto che $u_\varepsilon := \varrho_\varepsilon * u$ appartiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e che converge a u in norma L^2, per $\varepsilon \to 0$.

Siccome $\Delta u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * f$ (vedi Esercizio 1.2.3), si ha anche che Δu_ε converge a f in L^2, quando $\varepsilon \to 0$.

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e indicando con (u_n) la successione così ottenuta, si ha per la Proposizione 1.2.1

$$\|u_n - u_m\|_{H^2} \le C\,(\|u_n - u_m\|_{L^2} + \|\Delta u_n - \Delta u_m\|_{L^2}).$$

Quindi (u_n) è una successione di Cauchy in $H^2(\mathbb{R}^N)$, come tale convergente ad un elemento di $H^2(\mathbb{R}^N)$ che è necessariamente u, perchè $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 1.2.3 Provare che $\Delta(\varrho_\varepsilon * u) = \varrho_\varepsilon * f$ nel senso delle distribuzioni, se $\Delta u = f$ nel senso delle distribuzioni, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

1.3 Alcune stime interpolative in L^2

In questa sezione proviamo alcune disuguaglianze interpolative che permettono di stimare la norma L^2 delle derivate prime di una funzione con le norme della funzione stessa e delle sue derivate seconde. Per dare un'idea, prima di procedere, consideriamo il caso semplice, unidimensionale con la norma uniforme.

Esempio 1.3.1 Per ogni $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ risulta

$$\|u'\|_\infty \le 2\,(\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}). \tag{1.5}$$

Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R})$; se $h > 0$, applicando la formula di Taylor si ha

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(\xi),$$

da cui

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{1}{2}\,h\,u''(\xi),$$

e quindi

$$|u'(x)| \le \frac{2}{h}\|u\|_\infty + \frac{h}{2}\|u''\|_\infty \qquad \forall\, h > 0. \tag{1.6}$$

Prendendo il valore di h che minimizza il secondo membro della (1.6) e sostituendolo nella stessa, si ha

$$|u'(x)| \le 2\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Dall'arbitrarietà di x segue la tesi.

Esercizio 1.3.2 Migliorare la costante con $\sqrt{2}$ nella stima (1.5) prendendo $u(x+h) - u(x-h)$.

Esercizio 1.3.3 Supponiamo che per ogni $v \in C_b^3(\mathbb{R})$ valga la stima

$$\|v'\|_\infty \le c\|v\|_\infty^\alpha \|v'''\|_\infty^\beta \tag{1.7}$$

con $c > 0$ costante. Determinare α e β.

Osservazione 1.3.4 La stima (1.6) con $h = \varepsilon$ oppure $h = \varepsilon^{-1}$ fornisce

$$\|u'\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_\infty + \varepsilon\|u''\|_\infty$$

e

$$\|u'\|_\infty \le \varepsilon\|u\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|u''\|_\infty.$$

Lemma 1.3.5 *Per ogni u in $H^2(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2. \tag{1.8}$$

DIM. Per densità, basta provare l'enunciato per funzioni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tenendo conto della Proposizione 1.2.1 e della disuguaglianza $ab \le 2^{-1}(a^2 + b^2)$, se $\eta > 0$ risulta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\eta}|u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 \eta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{2\eta}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + \frac{\eta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2.
\end{aligned}$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ si ottiene la tesi. □

Osservazione 1.3.6 Se al posto di $\mathbb{R}^N$ si considera un aperto qualunque Ω, allora la stessa tecnica dimostrativa consente di provare la (1.8) per $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (vedi Esercizio 1.3.15). Non è possibile, tuttavia, andare oltre e guadagnare una disuguaglianza simile in tutto $H^2(\Omega)$ (senza cioè alcuna condizione al bordo) anche se Ω è regolare. Per convincersene, basta considerare $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$; allora una stima del tipo del tipo $\|u\|_{H^1} \le C(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2})$ non può valere perchè la successione di funzioni armoniche $u_n(x, y) = z^n$ ne è un chiaro controesempio.

Proposizione 1.3.7 *Sia Ω aperto limitato con bordo C^2 o $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Allora esiste una costante $c_\Omega > 0$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{H^2}^2 + \frac{c_\Omega}{\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2. \tag{1.9}$$

DIM. Data la regolarità di Ω, esiste E, operatore di estensione, cioè $E : H^2(\Omega) \to H^2(\mathbb{R}^N)$ lineare tale che

$$(Eu)_{|\Omega} = u \qquad \text{e} \qquad \|Eu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad k = 0, 1, 2$$

dove $c = c(\Omega)$. Applicando il Lemma 1.3.5 a $v = Eu$, risulta

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \varepsilon \|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{4\,\varepsilon}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq \varepsilon \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{4\,\varepsilon}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \varepsilon\, c^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{4\,\varepsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

da cui segue la tesi ponendo $\eta = \varepsilon\, c^2$ e $c_\Omega = c^4/4$. □

Corollario 1.3.8 *Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\eta \leq 1$ si ha*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \eta \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{\widetilde{c}_\Omega}{\eta}\int_\Omega |u|^2 \tag{1.10}$$

dove $(D^2 u)$ denota la matrice hessiana di u.

DIM. Tenendo conto della Proposizione 1.3.7 si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \varepsilon \left(\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |D^2 u|^2 \right) + \frac{c_\Omega}{\varepsilon}\int_\Omega |u|^2 \\ &= \varepsilon \int_\Omega |D^2 u|^2 + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\frac{c_\Omega}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \int_\Omega |u|^2, \end{aligned}$$

da cui, per $\varepsilon < 1$ segue

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{c_\Omega + 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\int_\Omega |u|^2.$$

Se $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ allora $\frac{1}{1-\varepsilon} \leq 2$ e quindi

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2\,\varepsilon \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{2\widetilde{c}_\Omega}{\varepsilon}\int_\Omega |u|^2$$

Ponendo $\eta = 2\varepsilon \leq 1$ si ha quanto richiesto dall'enunciato. □

Il seguente lemma rappresenta un risultato di omogeneità: sottoponendo il dominio Ω ad un'omotetia, le costanti coinvolte rimangono sostanzialmente indipendenti dalla trasformazione. Consideriamo il caso della palla per semplicità.

Lemma 1.3.9 *Sia $k > 0$ costante tale che per ogni $\varepsilon \leq 1$ e per ogni $u \in H^2(B_1)$ valga la disuguaglianza*

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_1)} \leq \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2(B_1)} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_1)}. \tag{1.11}$$

Allora per ogni $\eta \leq R$ e $u \in H^2(B_R)$ risulta

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \leq \eta \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\eta}\|u\|_{L^2(B_R)}. \tag{1.12}$$

DIM. Presa $u \in H^2(B_R)$, definiamo $v(x) = u(R\,x)$, per $|x| \leq 1$. Allora $v \in H^2(B_1)$ e

$$\nabla v(x) = R\,\nabla u(Rx) \quad \text{e} \quad D^2 v(x) = R^2 D^2 u(Rx).$$

Scrivendo la (1.11) per v e cambiando variabile negli integrali otteniamo

$$R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \leq \varepsilon\, R^2\, \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_R)},$$

da cui segue la tesi, dopo aver diviso per R e aver posto $\eta = \varepsilon\, R$. $\square$

Il seguente lemma sarà utile nella dimostrazione del Teorema 1.3.12.

Lemma 1.3.10 *Definiamo le seminorme*

$$\Phi_k(u) = \sup_{\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1} (1-\sigma)^k R^k \|D^k u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \qquad k = 0, 1, 2. \tag{1.13}$$

Allora esiste $k_1 = k_1(N)$ tale che per ogni $\varepsilon \leq 1$ e per ogni $u \in H^2(B_R)$ si ha

$$\Phi_1(u) \leq \varepsilon\, \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon}\Phi_0(u). \tag{1.14}$$

DIM. Fissato $\gamma > 0$, sia σ tale che

$$\Phi_1(u) \leq (1-\sigma)R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \gamma.$$

Allora dal Corollario 1.3.8 e dal Lemma 1.3.9 si ha

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \varepsilon\, \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \qquad \forall\, \varepsilon \leq \sigma R.$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza precedente per $(1-\sigma)R$ e ponendo $\varepsilon = (1-\sigma)\,R\,\eta$, con $\eta \leq 1$ (così $\varepsilon \leq \sigma R$ siccome $\sigma \geq \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}(1-\sigma)R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &\leq \eta(1-\sigma)^2R^2\|D^2u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\eta}\|u\|_{L^2(B_{\sigma R})}\\ &\leq \eta\,\Phi_2(u) + \frac{k}{\eta}\,\Phi_0(u),\end{aligned}$$

da cui

$$\Phi_1(u) \leq \eta\,\Phi_2(u) + \frac{k}{\eta}\,\Phi_0(u) + \gamma \qquad \forall\,\gamma \ \text{ e } \ \forall \eta \leq 1.$$

Facendo tendere $\gamma \to 0$, si conclude. □

La proposizione che segue generalizza la Proposizione 1.2.1 ad un operatore puro del secondo ordine a coefficienti costanti.

Proposizione 1.3.11 *Sia* $Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij}u$*, con* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *e* $\nu_0 > 0$ *costante di ellitticità. Allora per ogni* $u \in H^2_0(\Omega)$ *risulta*

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{1}{4\pi^2\nu_0}\|Au\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}. \tag{1.15}$$

DIM. Per densità basta provare la stima per un'arbitraria funzione test. Sia pertanto $u \in C^\infty_0(\Omega)$; allora $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ ed è lecito usare la trasformata di Fourier definita da

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i\xi\cdot x}u(x)dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.16}$$

Tenendo conto delle proprietà di cui questa gode rispetto alla derivazione

$$\mathcal{F}(D^\beta u)(\xi) = (2\pi i\xi)^\beta\mathcal{F}u(\xi) \qquad \forall \beta \in {\mathbb{N}_0}^N$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Au)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij}u\right)(\xi) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\mathcal{F}(D_{ij}u)(\xi)\\ &= -4\pi^2\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)\mathcal{F}u(\xi).\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}\left(u - \frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)\left(1 + \frac{1}{\nu_0}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j\right).$$

Prendendo i moduli segue che

$$\left|\mathcal{F}\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi)\right| = |\mathcal{F}u(\xi)|\left(1+\frac{1}{\nu_0}\sum_{i,j=1}^{N}a_{i,j}\xi_i\xi_j\right) \geq |\mathcal{F}u(\xi)|(1+|\xi|^2)$$

e quindi dal teorema di Plancherel otteniamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2} &= \|(1+|\xi|^2)\,\mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2} \leq \left\|\mathcal{F}\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi)\right\|_{L^2} \\ &= \left\|\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)\right\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}+\frac{1}{4\pi^2\nu_0}\|Au\|_{L^2} \qquad (1.17)\end{aligned}$$

che è l'asserto. □

Torniamo adesso a considerare un operatore generale come in (1.1). L'Osservazione 1.3.6 mostra che una stima del tipo $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)})$ con $u \in H^2(\Omega)$, fallisce anche quando Ω è regolare e A è il Laplaciano. Si possono però ottenere delle stime interne come quelle del teorema che segue.

Teorema 1.3.12 *Sia A l'operatore definito in (1.1) e sia $M = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\}$. Allora per ogni aperto Ω_1 a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\Omega_1 \subset\subset \Omega$), esiste una costante $c = c(\Omega, \Omega_1, \nu_0, M)$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ risulta*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq c\,(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (1.18)$$

DIM. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e introduciamo l'operatore

$$(A_0u)(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)(D_{ij}u)(x).$$

Applicando la proposizione precedente ad A_0 otteniamo

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu_0}\|A_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^2_0(\Omega). \qquad (1.19)$$

Sia R_0 tale che se $|x-y| \leq R_0$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\nu_0}{2}$$

(l'esistenza di R_0 è garantita dall'uniforme continuità dei coefficienti); allora

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)(D_{ij}u)(x)-(A_0u)(x)\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)|\,|D_{ij}u(x)| \\ &\leq \frac{\nu_0}{2}|(D^2u)(x)|\end{aligned}$$

quando $|x - x_0| \leq R_0$. Se $u \in H^2(\Omega)$ ha supporto contenuto in $B_R(x_0)$, dove $R \leq R_0$, allora

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u - A_0 u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\nu_0}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\nu_0} \|A_0 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\nu_0} \left\| A_0 u - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\nu_0} \left(\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu_0}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con supporto contenuto in $B_R(x_0)$, $R \leq R_0$ vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.21}$$

A questo punto, poniamo, per semplicità di notazione, $B(x_0, \rho) = B_\rho$; fissato σ con $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, sia $\eta \in C_0^\infty(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ su $B_{\sigma R}$ e

$$|\nabla \eta| \leq \frac{L}{R(1-\sigma)} \quad \text{e} \quad |D^2 \eta| \leq \frac{L}{R^2(1-\sigma)^2}$$

(L non dipende nè da σ nè da R). Se $u \in H^2(\Omega)$, applicando la (1.21) ad ηu si ottiene

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &= \|D^2(\eta u)\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \|D^2(\eta u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\nu_0} \left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\eta u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Siccome

$$D_{ij}(\eta u) = u D_{ij} \eta + D_i u D_j \eta + D_j u D_i \eta + \eta D_{ij} u$$

e $a_{ij} = a_{ji}$, si ha

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(\eta u) = \eta A u - \eta \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u - \eta c u + 2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i \eta D_j u + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} \eta \, u$$

per cui, tenendo conto delle proprietà di η:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq \|Au\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + c_1(M) \Bigg(\|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \Bigg) \\ \leq \; & c_2(M,R) \Bigg(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \Bigg). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Usando la stima (1.22), otteniamo

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \; & c_3(\nu_0, M, R) \Bigg(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})} \\ & + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \Bigg). \end{aligned}$$

Per eliminare a secondo membro il termine con ∇u, non si può interpolare immediatamente ∇u con u e $D^2 u$ perchè i domini di integrazione sono diversi. Il Lemma 1.3.10 consente di superare questa difficoltà. Moltiplichiamo la disuguaglianza di sopra per $R^2(1-\sigma)^2$ e otteniamo, con le notazioni del Lemma 1.3.10

$$\begin{aligned} R^2(1-\sigma)^2 \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \; & c_3(\nu_0, M, R) \big(R^2(1-\sigma)^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} \\ & \frac{2R(1-\sigma)}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})} + \|u\|_{L^2(B_R)} \Big) \\ \leq \; & c_3(\nu_0, M, R) \big(R^2(1-\sigma)^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} \\ & + 2\, \Phi_1(u) + \Phi_0(u) \big). \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per $\sigma \in [1/2, 1]$, otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi_2(u) \leq \; & c_4(\nu_0, M, R) \big(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \Phi_1(u) + \Phi_0(u) \big) \\ \leq \; & c_4(\nu_0, M, R) \left(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \varepsilon \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon} \Phi_0(u) \right). \end{aligned}$$

Prendendo ε in modo che $\varepsilon\, c_4 = \frac{1}{2}$ e tenendo conto del fatto che $\Phi_0(u) = \|u\|_{L^2(B_R)}$ si ha

$$\Phi_2(u) \leq c_5(\nu_0, M, R)(R^2\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Ricordando che $\Phi_2(u) = \sup_{\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1} R^2(1-\sigma)^2\|D^2u\|_{L^2(B_{\sigma R})}$, prendendo $\sigma = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{R^2}{4}\|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq \Phi_2(u) \leq c_5(\nu_0, M, R)(R^2\,\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)})$$

e quindi, dividendo per R^2

$$\|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq \Phi_2(u) \leq c_6(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Applicando infine la stima interpolativa del Corollario 1.3.8 per aperti regolari con $\Omega = B_R$, risulta

$$\|u\|_{H^2(B_{\frac{R}{2}})} \leq c_7(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}). \tag{1.24}$$

Sia ora Ω_1 un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω. Ricopriamo $\overline{\Omega}_1$ con un numero finito m di palle $B_{\frac{R_i}{2}}(x_i)$, con $x_i \in \overline{\Omega}_1$, $R_i \leq R_0$ e $R_i < \mathrm{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ (in modo che siano tutte contenute in Ω). La (1.24) vale, dunque, in ogni palla $B_{R_i}(x_i)$ e quindi

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq \sum_{i=1}^{m}\|u\|_{H^2(B_{\frac{R_i}{2}}(x_i))} \leq c(\nu_0, M, \Omega_1, \Omega)(\|Au\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

cioè la tesi. $\square$

Osservazione 1.3.13 Vale la pena di sottolineare la tecnica dimostrativa adottata nel teorema precedente, nota come *metodo di Korn*. Essa può essere schematizzata nei seguenti passi

- si considera dapprima il caso di un operatore a coefficienti costanti;
- si congelano i coefficienti del secondo ordine in un punto del dominio e si fanno stime per funzioni u con supporto compatto contenuto in una palla piccola;
- si applica il punto precedente a ηu, con η cut-off in una palla piccola;
- si conclude con un argomento di ricoprimento.

Osservazione 1.3.14 E' naturale chiedersi se il risultato appena provato si generalizza anche al caso $p \neq 2$. Per $p = \infty$, il Teorema 1.3.12 è falso, come testimoniano i controesempi della prima sezione, e così anche per $p = 1$.

Invece, quando $1 < p < +\infty$, l'asserto continua a valere esattamente negli stessi termini. Tuttavia è più difficile ottenere l'analogo per $p \neq 2$ della Proposizione 1.3.11, cioè

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right) \quad , \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{1.25}$$

(avere Δ o un operatore a coefficienti costanti con termini solo del secondo ordine è sostanzialmente la stessa cosa). La tecnica per dimostrare la (1.25) si basa su stime di integrali singolari ed è dovuta a Calderon e Zygmund. Superato questo punto, la dimostrazione del teorema con $1 < p < +\infty$ è invece identica a quella appena esposta.

Esercizio 1.3.15 Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Provare che per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2.$$

Capitolo 2

Metodo variazionale per operatori in forma di divergenza

Nel corso di questo capitolo saremo interessati allo studio del seguente operatore in forma di divergenza

$$
\begin{aligned}
Au &= \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u + c\, u \\
&= \operatorname{div}(a\, \nabla u) + b \cdot \nabla u + c\, u
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

e al problema di Dirichlet ad esso connesso

$$
\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}
$$

nelle ipotesi che Ω sia un aperto di $\mathbb{R}^N$ e i coefficienti $a_{ij} \in C_b^1(\overline{\Omega})$ mentre $b_i,\ c \in C_b(\overline{\Omega})$. Assumiamo anche che A sia uniformemente ellittico, cioè che esista una costante $\nu_0 > 0$ tale che

$$
\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\ ,\ \forall x \in \Omega \tag{2.3}
$$

Notiamo che la regolarità dei coefficienti del secondo ordine fa sì che A si possa riscrivere in forma di non divergenza. Una **soluzione** di (2.2) è una funzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ che soddisfa l'equazione differenziale. L'obiettivo di questo capitolo è mostrare che è possibile ottenere una siffatta soluzione regolarizzandone una debole. Il metodo usato è noto come *metodo variazionale* e può essere sintetizzato nel modo seguente:

1) si definisce una soluzione debole, attraverso l'introduzione di forme quadratiche;

2) se ne dimostrano esistenza e unicità, con il teorema di Lax-Milgram;

3) si regolarizza la soluzione ottenuta mediante il metodo delle traslazioni di L. Nirenberg, provando separatamente regolarità all'interno e regolarità fino al bordo in un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$. Infine si stabiliscono risultati di regolarità di ordine superiore, grazie alla quale è possibile pervenire ad una soluzione classica del problema.

2.1 Esistenza e unicità della soluzione debole: teorema di Lax-Milgram

Siano $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tale che $Au = f$; moltiplicando ambo i membri di questa equazione per un'arbitraria funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando per parti, risulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega Au\,\varphi &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i\Big(\sum_{j=1}^N a_{ij} D_j u\Big)\varphi + \int_\Omega \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + \int_\Omega c\,u\,\varphi \\ &= \int_\Omega -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j\varphi + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi \\ &= \int_\Omega f\,\varphi.\end{aligned}$$

Questo calcolo è alla base della seguente definizione.

Definizione 2.1.1 *Chiamiamo* **soluzione debole** *o* **variazionale** *del problema di Dirichlet (2.2) una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j\varphi + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi \tag{2.4}$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (o, equivalentemente per densità, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$).

La scelta dello spazio funzionale $H_0^1(\Omega)$ (più ampio rispetto ad $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$), è sufficiente per dare senso a (2.4), visto che sono coinvolte solo derivate prime di u. Il conto precedente ha infatti mostrato che un ordine di derivazione è stato "scaricato" da u sulle funzioni test. Nulla impedirebbe di scaricare due ordini di derivazione: questo vorrebbe dire considerare una soluzione del problema nel senso delle distribuzioni che è solo L^2; tuttavia, trovare una soluzione in $H_0^1(\Omega)$, come vedremo, è abbastanza facile; ciò giustifica in primo luogo la nostra scelta. Inoltre, una funzione di $H_0^1(\Omega)$

verifica automaticamente le condizioni al bordo di Dirichlet, per cui basta che sia soddisfatta (2.4) perchè sia risolto (debolmente) l'intero problema (per altri esempi di condizioni al bordo si veda l'Esercizio 2.1.5). Osserviamo che se una soluzione debole u appartiene anche ad $H^2(\Omega)$, allora reintegrando per parti in (2.4) risulta $Au = f$ q.o. In realtà, questo è proprio quello che succede quando il dominio è abbastanza regolare.

Introducendo nello spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega)$ la forma bilineare

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, v - c\, u\, v \right) \tag{2.5}$$

si vede che

$$u \text{ è soluzione debole di (2.2)} \iff \forall v \in H_0^1(\Omega)\ :\ a(u,v) = -(f,v)$$

avendo denotato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare di L^2.
L'approccio variazionale è ora basato sul seguente teorema.

Teorema 2.1.2 (Lax-Milgram) *Siano H uno spazio di Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare* **continua** *e* **coerciva** *su H, cioè tale che valgano rispettivamente*

a) esiste $M > 0$ tale che $|a(u,v)| \le M\|u\|\,\|v\| \qquad \forall u,v \in H$;

b) esiste $\alpha > 0$ tale che $a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2 \qquad \forall u \in H$;

Allora, per ogni $f \in H'$, con H' duale topologico di H, esiste un unico $u \in H$, tale che

$$a(u,v) = f(v) \qquad \forall\, v \in H.$$

Inoltre $\|u\| \le \alpha^{-1}\|f\|$.

DIM. Sia u un elemento fissato in H; allora $a(u,\cdot)$ definisce un funzionale lineare continuo su H. Pertanto, il teorema di rappresentazione di Riesz-Frechét assicura che esiste un unico $w \in H$ tale che $a(u,v) = (v,w)_H$ per ogni $v \in H$. Siccome w è univocamente determinato da u, è ben posto il seguente operatore

$$\begin{aligned} S:\quad & H \longrightarrow H \\ & u \longmapsto Su := w. \end{aligned}$$

S è lineare e, siccome risulta

$$|(v,Su)_H| = |a(u,v)| \le M\|u\|\|v\| \qquad \forall\, v \in H\ ,$$

prendendo $v = Su$, si ottiene che $\|Su\| \le M\|u\|$, cioè S è continuo. Inoltre, poichè a è coerciva, per ogni $u \in H$ si ha

$$\alpha\|u\|^2 \le a(u,u) = |a(u,u)| = |(u,Su)_H| \le \|u\|\|Su\|$$

da cui si ottiene che $\|Su\| \geq \alpha \|u\|$.
Quest'ultima disuguaglianza dimostra che S è iniettivo e che ha rango chiuso; se proviamo che $Rg(S)$ è denso potremo concludere che S è suriettivo. Sia $z \in Rg(S)^\perp$. Allora $(z, Su)_H = 0$ per ogni $u \in H$; se in particolare $u = z$, si ha $\alpha \|z\|^2 \leq a(z,z) = |(z, Sz)_H| = 0$, da cui segue che $z = 0$. Quindi S è un isomorfismo.

Sia adesso $f \in H'$. Per il teorema di Riesz-Frechét, esiste un unico $w \in H$ tale che $f(v) = (v, w)_H$, per ogni $v \in H$. Posto $u = S^{-1}w$, risulta

$$f(v) = (v, w)_H = (v, Su)_H = a(u, v)$$

con $\|u\| \leq \alpha^{-1}\|w\| = \alpha^{-1}\|f\|$. $\square$

Osservazione 2.1.3 Se nel teorema di Lax-Milgram si assume che la forma a sia anche simmetrica ($a(u,v) = a(v,u)$), allora a è un nuovo prodotto scalare su H (equivalente a quello dato) e il Teorema di Lax-Milgram non è altro che una riformulazione del Teorema di Riesz-Frechét.

Ci proponiamo, ora, di far vedere che la forma definita in (2.5) è continua e **debolmente coerciva**, cioè è tale che $a(u,u) \geq \alpha \, \|u\|^2_{H^1} + \lambda_0 \, \|u\|^2_{L^2}$ per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$ e per opportune costanti $\alpha > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. A tale scopo cominciamo ad osservare che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, risulta

$$\left| \sum_{i=1}^N a_{ij}(x)\xi_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi| \, ,$$

e quindi

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \right| \leq \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi||\xi_j| \leq \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi|^2 \, .$$

Posto $L = \sup_{x\in\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ si ha allora

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \right| \leq L|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \, , \ \forall x \in \Omega \, .$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N b_i(x)\, D_i u(x) \right| \quad &\leq \quad \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |D_i u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \quad \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla u(x)| \end{aligned}$$

e quindi, posto $K = \sup_{x\in\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} |b_i(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$, risulta

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, D_i u(x)\, u(x) \Big| &\le \int_\Omega K\, |\nabla u(x)||u(x)| = \int_\Omega K\, \sqrt{\varepsilon}\, |\nabla u(x)| \frac{|u(x)|}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&\le \frac{K^2 \varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega |u(x)|^2 \,,
\end{aligned}
$$

avendo usato la disuguaglianza $a\, b \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ nell'ultimo passaggio. Prendendo $\varepsilon = \nu_0/K^2$, si ha

$$
\Big| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, D_i u(x)\, u(x) \Big| \le \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{K^2}{2\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \,.
$$

Pertanto, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$, vale

$$
\begin{aligned}
a(u,u) \;&=\; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, D_i u\, D_j u - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u\, u - \int_\Omega c\, u^2 \\
&\ge\; \nu_0 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \frac{K^2}{2\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \\
&\quad - \sup_{x\in\Omega} c \int_\Omega |u(x)|^2.
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda_0 = \dfrac{K^2}{2\nu_0} + \sup_{x\in\Omega} c + \dfrac{\nu_0}{2}$, si ottiene in definitiva

$$
a(u,u) \ge \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{H_1}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2
$$

che dimostra che a è debolmente coerciva in L^2.

Usando le precedenti disuguaglianze e quella di Hölder, si prova che a è anche continua. Infatti, se $u, v \in H_0^1(\Omega)$ allora

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \;&=\; \Big| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u\, v - \int_\Omega c\, u\, v \Big| \\
&\le L \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \int_\Omega K\, |\nabla u||v| + \|c\|_\infty \int_\Omega |u||v| \\
&\le L \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + K\, \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\le M\, \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}
$$

Per riferimenti futuri, ricordiamo che

$$\begin{aligned} K &= \sup_{x\in\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{N}|b_i(x)|^2\Big)^{\frac12} \\ L &= \sup_{x\in\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}(x)|^2\Big)^{\frac12} \\ \lambda_0 &= \frac{K^2}{2\nu_0} + \sup_{x\in\Omega} c + \frac{\nu_0}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Teorema 2.1.4 *Assumendo valida la notazione precedente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che*

$$\lambda\,(u,v) + a(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

(cioè u è soluzione debole di $\lambda u - Au = f$). Inoltre, se $\lambda > \lambda_0$ si ha

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\|f\|_{L^2}, \qquad \|\nabla u\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2}{\nu_0(\lambda-\lambda_0)}}\|f\|_{L^2}. \tag{2.7}$$

DIM. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda \geq \lambda_0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Consideriamo su $H_0^1(\Omega)$ la forma $\widetilde{a}(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)$, dove a è definita da (2.5). Siccome a è continua, anche $\widetilde{a}$ lo è. Inoltre

$$\widetilde{a}(u,u) = a(u,u) + \lambda\,\|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2 + (\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2 \tag{2.8}$$

cioè $\widetilde{a}$ è coerciva su $H_0^1(\Omega)$. Applicando il teorema di Lax-Milgram relativamente al funzionale $v \mapsto \displaystyle\int_\Omega f\,v$, otteniamo che esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(u,v) + \lambda(u,v) = \int_\Omega f\,v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Proviamo ora le stime (2.7). Prendendo $u = v$ nell'uguaglianza precedente e usando la (2.8) risulta

$$\|f\|_{L^2}\,\|u\|_{L^2} \geq \int_\Omega f\,u = \lambda\int_\Omega |u|^2 + a(u,u) \geq \frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2 + (\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2$$

da cui si ricavano

$$(\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \Longrightarrow \|u\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda-\lambda_0}$$

e

$$\frac{\nu_0}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\lambda-\lambda_0}.$$

□

Il teorema precedente assicura così di poter risolvere, almeno in senso debole, l'equazione $\lambda u - Au = f$, quando λ è abbastanza grande. E' bene notare che questa restrizione su λ è parzialmente un problema legato alla tecnica dimostrativa, perchè il valore λ_0 trovato non è ottimale, e parzialmente una difficoltà intrinseca che non è possibile superare.

Per esempio, il problema unidimensionale

$$\begin{cases} \lambda\, u - u'' = 0 & \text{in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

in corrispondenza di $\lambda_n = -n^2\pi^2$, non ammette un'unica soluzione, dato che accanto alla soluzione nulla ci sono anche le autofunzioni $\sin(n\pi x)$. Se invece $\lambda \geq 0$, allora l'unica soluzione è quella banale. In generale, la situazione può anche essere peggiore, nel senso che i valori di λ per cui non vi è risolubilità (o unicità) possono non essere solo un'infinità numerabile come nel caso considerato.

Esercizio 2.1.5 Siano Ω un aperto limitato di classe C^1 di $\mathbb{R}^N$ e $f \in L^2(\Omega)$. Denotata con ν la normale esterna unitaria a $\partial\Omega$, provare che

(a) se $u \in H^2(\Omega)$ soddisfa

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

allora $\Delta u = f$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$ (la restrizione a $\partial\Omega$ è chiaramente tramite un operatore di traccia);

(b) se $u \in H^2(\Omega)$ soddisfa

$$a(u,v) = -\int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

(con a definita da (2.5)), allora $Au = f$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu^*} = 0$ su $\partial\Omega$, dove $\nu_i^* = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\nu_j$, $i = 1, ..., N$, è la cosiddetta *conormale*.

2.2 Regolarizzazione delle soluzioni deboli

Cominciamo con questa sezione a studiare la regolarità della soluzione debole ottenuta con il teorema di Lax-Milgram.

Relativamente all'operatore A definito in (2.1), introduciamo le seguenti costanti:

$$\begin{aligned} M_0 &= \max\nolimits_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty,\ \|b_i\|_\infty,\ \|c\|_\infty\} \\ N_0 &= \max\nolimits_{i,j} \|\nabla a_{ij}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Abbiamo provato che se $\lambda \geq \lambda_0$, con λ_0 definito in (2.6), allora l'equazione $\lambda u - Au = f \in L^2(\Omega)$ ammette un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$. Se ora inglobiamo $\lambda\, u$ nella parte di ordine zero dell'operatore, allora possiamo considerare u soluzione debole di $-Au = f$, ossia

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, v - c\, u\, v \right) = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Posto $g := f + c\, u + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u \in L^2(\Omega)$ la precedente uguaglianza diventa

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v = \int_\Omega g\, v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

2.2.1 Regolarità all'interno

Come anticipato all'inizio del capitolo, il metodo che useremo per regolarizzare la soluzione debole è basato sui quozienti differenziali.

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, chiamiamo **quoziente differenziale** l'espressione

$$(D_h u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

È immediato verificare che per ogni $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} (D_h u)\, v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u\, D_{-h} v\, dx. \tag{2.10}$$

Se $u \in L^2(\Omega)$ e ω è un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω, allora ha senso considerare $D_h u(x)$ per $x \in \omega$ e $|h| < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$.

Il prossimo lemma mostra una caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di quozienti differenziali.

Lemma 2.2.1 *Sia $u \in L^2(\Omega)$. Sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(i) $u \in H^1(\Omega)$*;*

(ii) esiste $C > 0$ tale che per ogni ω aperto a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\omega \subset\subset \Omega$) e per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$ risulta

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq C.$$

In tal caso si può prendere $C = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

DIM.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supponiamo inizialmente che $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Preso $h \in \mathbb{R}^N$, poniamo $v(t) := u(x+th)$, con $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)\,dt\,.$$

Di conseguenza,

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2\,dt$$

e, integrando su ω

$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2\,dx &\leq |h|^2 \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2\,dt \\ &= |h|^2 \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x+th)|^2\,dx \\ &= |h|^2 \int_0^1 dt \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^2\,dy\,.\end{aligned}$$

Se $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, allora esiste sicuramente un aperto ω' tale che per ogni $t \in [0,1]$ si abbia $\omega + th \subset \omega' \subset\subset \Omega$; dunque

$$\|D_h u\|^2_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\omega')} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Se $u \in H^1(\Omega)$, allora esiste una successione $(u_n)_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^2(\omega')$, per ogni $\omega' \subset\subset \Omega$. Applicando (2.11) a tutte le u_n e passando al limite si ottiene la (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; consideriamo un aperto ω tale che supp$\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$ e sia $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$. Allora

$$\left| \int_\Omega [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_\Omega u(y)[\varphi(y-h) - \varphi(y)]\,dy \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ne segue che

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{|h|}\,dy \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preso $h = te_i$, quando $t \to 0$ si ottiene, per convergenza dominata

$$\left| \int_\Omega u(x)\, D_i\varphi(x)\,dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

sicchè $\varphi \mapsto \displaystyle\int_\Omega u\, D_i\varphi$ definisce un funzionale lineare e continuo su $C_0^\infty(\Omega)$, munito della norma $\|\cdot\|_{L^2}$. Per densità tale funzionale può essere esteso a tutto $L^2(\Omega)$ e applicando il Teorema di Riesz, si determina un'unica funzione $v_i \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u\, D_i\varphi = \int_\Omega v_i\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ne segue che esiste la derivata parziale di u rispetto a x_i nel senso delle distribuzioni ed è data da $-v_i$, con $\|v_i\|_{L^2} \leq C$. Siccome i è arbitrario, si ottiene che $u \in H^1(\Omega)$, che è la nostra tesi. $\square$

Osservazione 2.2.2 Lo stesso risultato vale con $1 < p < \infty$ e si dimostra esattamente allo stesso modo.

Esercizio 2.2.3 Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora, posto $h = te_i$, con $1 \leq i \leq N$, risulta che $D_h u$ converge all'i-sima derivata parziale debole di u per $t \to 0$ in $L^p(\omega)$, per ogni $\omega \subset\subset \Omega$.

Il Lemma seguente è il passo fondamentale per ottenere regolarità all'interno.

Lemma 2.2.4 *Sia $u \in H^1(B_R)$ tale che*

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v = \int_{B_R} g\, v \qquad \forall\, v \in C_0^\infty(B_R)$$

con $g \in L^2(B_R)$. Allora $u \in H^2_{\rm loc}(B_R)$ e per ogni $r < R$ esiste una costante $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r)} \leq K(\|u\|_{H^1(B_R)} + \|g\|_{L^2(B_R)}).$$

DIM. Sia $r < R$ fissato e consideriamo $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tale che supp$\eta \subseteq B_{\frac{R+r}{2}}$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ su B_r. Allora $\eta\, u \in H_0^1(B_R)$ e per ogni $v \in C_0^\infty(B_R)$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i(\eta\, u) D_j v \;&=\; \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, u\, D_i\eta\, D_j v + \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, D_i u\, D_j v \\
&= \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, u\, D_i\eta\, D_j v + \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j(\eta v) \\
&\quad - \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, v\, D_i u\, D_j\eta \\
&= \int_{B_R} g\,\eta\, v - \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, v\, D_i u\, D_j\eta \\
&\quad - \int_{B_R} \sum_{j=1}^N D_j\left(\sum_{i=1}^N a_{ij}\, D_i\eta\, u\right) v = \int_{B_R} \phi\, v
\end{aligned} \tag{2.12}$$

dove

$$\phi = g\,\eta - \sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}\,D_i\eta\,u) - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,D_i u\,D_j\eta.$$

Naturalmente $\phi \in L^2(B_R)$ e

$$\|\phi\|_{L^2(B_R)} \le \|g\|_{L^2(B_R)} + C(r,R,M_0,N_0)\,\|u\|_{H^1(B_R)}. \tag{2.13}$$

Sia $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $|h| < \dfrac{R-r}{4}$. Poniamo $z := \eta u$ e $v := D_{-h}D_h z$. La scelta di h fa si che $v \in H^1_0(B_R)$ (perchè il suo supporto è compatto e contenuto in B_R), per cui v è una funzione test che può essere inserita in (2.12). Da questa segue che

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,D_i z\,D_j(D_{-h}\,D_h z) = \int_{B_R} \phi\,(D_{-h}D_h z).$$

Siccome il quoziente differenziale e la derivata commutano, per la proprietà (2.10) si ha:

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} D_h(a_{ij}\,D_i z)\,D_j(D_h z) = \int_{B_R} \phi\,(D_{-h}D_h z).$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} D_h(a_{ij}\,D_i z)(x) &= D_h a_{ij}(x)\,D_i z(x) + a_{ij}(x+h)\,D_h(D_i z)(x) \\ &= D_h a_{ij}(x)\,D_i z(x) + a_{ij}(x+h)\,D_i(D_h z)(x) \end{aligned}$$

si deduce successivamente

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x+h)\,D_i(D_h z)(x)\,D_j(D_h z)(x) = \\ -&\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} D_h a_{ij}(x)\,D_i z(x)\,D_j(D_h z)(x) + \int_{B_R} \phi(x)\,(D_{-h}D_h z)(x). \end{aligned}$$

Grazie alla condizione di ellitticità, possiamo stimare il primo membro dal basso ottenendo

$$\begin{aligned}
\nu_0 \int_{B_R} |D_h \nabla z|^2 &\leq \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x+h)\, D_i(D_h z)(x)\, D_j(D_h z)(x) \\
&= -\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N D_h a_{ij}(x)\, D_i z(x)\, D_j(D_h z)(x) \\
&\quad + \int_{B_R} \phi(x)\, (D_{-h} D_h z)(x) \\
&\leq C(N_0)\, \|\nabla z\|_{L^2(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_{R'})} \\
&\quad + \|\phi\|_{L^2(B_R)} \|D_{-h} D_h z\|_{L^2(B_{R'})}
\end{aligned}$$

dove R' è un opportuno raggio strettamente minore di R, la cui esistenza è garantita dalla scelta di h. Applicando il Lemma 2.2.1, si ha che $\|D_{-h} D_h z\|_{L^2(B_{R'})} \leq \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\nu_0 \|D_h \nabla z\|^2_{L^2(B_R)} &\leq C(N_0)\, \|z\|_{H^1(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)} \\
&\quad + \|\phi\|_{L^2(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}$ e applicando ancora il Lemma 2.2.1, si deduce che $\nabla z \in H^1(B_R)$, ossia $z \in H^2(B_R)$ e inoltre

$$\|D^2 z\|_{L^2(B_R)} \leq \frac{C(N_0)}{\nu_0}\, \|z\|_{H^1(B_R)} + \frac{1}{\nu_0} \|\phi\|_{L^2(B_R)}.$$

A questo punto, siccome $u \equiv z$ su B_r, abbiamo che $u \in H^2(B_r)$ e , ricordando la stima (2.13),

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r)} \leq C\, (\|u\|_{H^1(B_R)} + \|g\|_{L^2(B_R)})$$

con $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$. □

Segue ora facilmente il seguente teorema di regolarità interna in una palla. Non è possibile dedurre regolarità fino al bordo perchè non stiamo richiedendo alcuna condizione al contorno (si ricordi l'Osservazione 1.3.6).

Teorema 2.2.5 *Sia $u \in H^1(B_R)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(B_R)$. Allora $u \in H^2_{loc}(B_R)$ e per ogni $r < R$ esiste $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(B_r)} \leq C(\|u\|_{H^1(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}).$$

DIM. Basta applicare il lemma precedente con $g = f + c\,u + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u$ che è in $L^2(B_R)$. □

Una conseguenza della tecnica usata è la regolarità globale nell'intero spazio.

Teorema 2.2.6 *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(\nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\,(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}).$$

DIM. E' sufficiente ripetere la dimostrazione del Lemma 2.2.4 senza introdurre il cut-off η e la funzione z, ponendo $v = D_{-h}D_h u$. □

Osservazione 2.2.7 Ricordando le stime del Teorema 2.1.4 e usando il teorema precedente, si può maggiorare direttamente $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ con $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, a meno di una costante moltiplicativa, se $\lambda u - Au = f$, con $\lambda > \lambda_0$.

2.2.2 Partizioni dell'unità

Prima di passare al caso di regolarità interna in un aperto arbitrario Ω, ci occorrono dei risultati tecnici preliminari.

Lemma 2.2.8 *Siano K e Ω sottoinsiemi rispettivamente compatto e aperto di $\mathbb{R}^N$, con $K \subseteq \Omega$. Allora esiste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ su K.*

DIM. Sia $r < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \partial\Omega)$. Poniamo $K_r := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, K) \leq r\}$. Per costruzione, K è un compatto contenuto in Ω. Presa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che supp$\eta \subset B_1(0)$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \eta = 1$, sia $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ la successione di mollificatori corrispondente. Se $\varepsilon < r$, la funzione $\phi = \eta_\varepsilon * \chi_{K_r}$ soddista le condizioni dell'enunciato. □

Lemma 2.2.9 *Siano K un compatto di $\mathbb{R}^N$ e $\{U_i\}_{i=1^r}$ un ricoprimento aperto di K. Allora, per ogni $i = 1, \ldots, r$, esiste un aperto $V_i \subset\subset U_i$ (a chiusura compatta in U_i) tale che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} V_i$.*

DIM. Per ogni $x \in K$, esiste $i \in \{1, \ldots, r\}$ tale che $x \in U_i$; inoltre, siccome U_i è aperto, esiste un intorno sferico di x, B_x, a chiusura contenuta in U_i. Chiaramente, $\{B_x\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K da cui, come conseguenza dell'ipotesi di compattezza, se ne può estrarre uno finito $\{B_{x_j}\}_{j=1}^{s}$. A questo punto, posto

$$V_i := \bigcup \{B_{x_j} \mid B_{x_j} \subseteq U_i\} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, r$$

risulta che ogni V_i è un aperto con $\overline{V_i} \subseteq U_i$ e, siccome $\bigcup_{i=1}^{r} V_i = \bigcup_{j=1}^{s} B_{x_j}$, $\{V_i\}$ è un ricoprimento di K. □

Lemma 2.2.10 (Partizione dell'unità) *Siano dati un compatto K di $\mathbb{R}^N$ e $\{U_i\}_{i=1}^r$, ricoprimento aperto finito di K. Allora esistono delle funzioni $\theta_1, \ldots, \theta_r$ di classe C^∞, verificanti le seguenti proprietà*

(1) supp $\theta_i \subseteq U_i$,

(2) $0 \leq \theta_i \leq 1$,

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^r \theta_i(x) = 1,$ *in un intorno di K.*

Chiamiamo l'insieme $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ una **partizione dell'unità (di classe $\mathbf{C}^\infty$)** *subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i=1}^r$.*

DIM. Il Lemma 2.2.9, applicato due volte, assicura la possibilità di costruire a partire dal primo ricoprimento $\{U_i\}_{i=1}^r$, altri due ricoprimenti di K, $\{V_i\}_{i=1}^r$ e $\{W_i\}_{i=1}^r$, tali che $W_i \subset\subset V_i \subset\subset U_i$. Fissato un indice $i \in \{1, \ldots, r\}$, poniamo $d_i := \min\{\text{dist}(W_i, V_i), \text{dist}(V_i, U_i)\}$. Sia $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, positiva, con supp $\eta_i \subseteq B_{\frac{d_i}{2}}(0)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta_i = 1$.

Se $\psi_i := \eta_i * \chi_{V_i}$, allora $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e supp$\psi_i \subseteq$ supp$\eta_i +$ suppχ_{V_i} $= \overline{B}_{\frac{d_i}{2}}(0) + \overline{V_i} = \left\{x \in \mathbb{R}^N | \text{dist}(x, \overline{V_i}) \leq \dfrac{d_i}{2}\right\} \subseteq U_i$. Inoltre, preso $x \in W_i$, risulta

$$\psi_i(x) = \int_{\overline{B}_{\frac{d_i}{2}}(0)} \chi_{V_i}(x-y)\, \eta_i(y)\, dy = 1$$

grazie alla scelta di d_i.

Siccome $\displaystyle\sum_{i=1}^r \psi_i \geq 1$ su $W := \displaystyle\bigcup_{j=1}^r W_j$, per continuità si avrà $\displaystyle\sum_{i=1}^r \psi_i \geq \frac{1}{2}$ su un certo intorno aperto $\widetilde{W}$ di W. A questo punto, poniamo

$$\theta_i(x) = \frac{\psi_i(x)\, \eta(x)}{\sum_{j=1}^r \psi_j(x)},$$

dove $\eta \in C_0^\infty(\widetilde{W})$ con $\eta \equiv 1$ su W. E' immediato verificare ora che le funzioni $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ soddisfano le proprietà richieste. $\square$

Facciamo a questo punto alcune precisazioni sullo spazio $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. E' chiaro che

$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile $|$ $u_{|K} \in L^p(K)$ per ogni K compatto $\subset \Omega\}$.

Per descrivere $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, ci sono invece due possibilità

$$\{u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \mid D_i u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)\,,\ \forall\, i\}, \tag{2.14}$$

dove $D_i u$ denota l'i-esima derivata distribuzionale di u oppure

$$\{u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid u_{|\Omega'} \in W^{1,p}(\Omega'),\ \forall\,\Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Evidentemente il primo insieme è contenuto nel secondo, poichè $D_i(u_{|\Omega'}) = (D_i u)_{|\Omega'}$. Un argomento basato sulle partizioni dell'unità mostra che vale anche l'altra inclusione.

Lemma 2.2.11 *Sia* $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$, *con* $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *aperti. Se* $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *è tale che* $u|_{\Omega_j} \in W^{1,p}(\Omega_j)$ *per ogni* j, *allora* $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *così come definito in (2.14).*

DIM. Si tratta di far vedere che le derivate distribuzionali di u sono funzioni localmente p-sommabili. Consideriamo $D_1 u$. Per ipotesi, per ogni j esiste $v_j \in L^p(\Omega_j)$ tale che $v_j = D_1(u|_{\Omega_j})$. Proviamo che $v_i = v_j$ q.o. su $\Omega_i \cap \Omega_j$ (se quest'intersezione è non vuota): per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega_i \cap \Omega_j)$ risulta

$$\int_{\Omega_i\cap\Omega_j} v_i\,\phi = \int_{\Omega_i} v_i\,\phi = -\int_{\Omega_i} D_1\phi\,u = -\int_{\Omega_i\cap\Omega_j} D_1\phi\,u = \int_{\Omega_i\cap\Omega_j} v_j\,\phi$$

(avendo sintetizzato nell'ultimo passaggio gli stessi conti ripetuti con j al posto di i). Pertanto $v_i = v_j$ q.o. su $\Omega_i \cap \Omega_j$. E' così ben definita su Ω una funzione v tale che $v|_{\Omega_j} = v_j$ e l'obiettivo è provare che $v = D_1 u$. Se $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, indicato con K il suo supporto, per compattezza è possibile ricoprire K con un numero finito di aperti $\{\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_r}\}$ scelti tra quelli che ricoprono Ω. Se $\{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{\Omega_{i_j}\}$, risulta $\sum_{i=1}^r \psi\,\phi_i = \psi$ e $\sum_{i=1}^r D_1(\psi\,\phi_i) = D_1\psi$, quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\,D_1\psi &= \sum_{j=1}^r \int_{\Omega_{i_j}} u\,D_1(\psi\,\phi_j) = -\sum_{j=1}^r \int_{\Omega_{i_j}} \psi\,\phi_j\,v = -\sum_{j=1}^r \int_\Omega \psi\,\phi_j\,v \\ &= -\int_\Omega \psi\,v\end{aligned}$$

il che completa la dimostrazione. □

2.2.3 Regolarità all'interno (continuazione)

Riprendiamo ora la regolarità ellittica all'interno di un aperto arbitrario.

Proposizione 2.2.12 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *soluzione debole di* $-Au = f$, *con* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Allora* $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

DIM. Sia $B_{2R}(x_0)$ una palla a chiusura compatta contenuta in Ω. Per ipotesi $u \in H^1(B_{2R}(x_0))$ e $f \in L^2(B_{2R}(x_0))$, per cui, applicando il Teorema

2.2.5, deduciamo che $u \in H^2(B_R(x_0))$. Sia ora Ω' un aperto a chiusura compatta in Ω e consideriamo un numero finito di palle $\{B_{R_i}(x_i)\}$ che ricoprono Ω' e tali che $\cup_i B_{2R_i}(x_i) \subset\subset \Omega$. Dal passo precedente abbiamo che $u \in H^2(B_{R_i}(x_i))$, per ogni i, e quindi, tenendo conto del Lemma 2.2.11, deduciamo che $u \in H^2_{\rm loc}(\cup_i B_{R_i}(x_i))$ e pertanto $u \in H^2_{\rm loc}(\Omega')$. Dall'arbitrarietà di Ω' segue la conclusione. □

Il seguente corollario mostra che aumentando la regolarità dei coefficienti dell'operatore e del dato f, aumenta quella della soluzione: precisamente questa ha due ordini di regolarità in più rispetto a f (poichè l'operatore A è del secondo ordine).

Corollario 2.2.13 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$; supponiamo che $a_{ij} \in C^{k+1}(\Omega)$, b_i, $c \in C^k(\Omega)$ e che $f \in H^k_{\rm loc}(\Omega)$. Allora se $u \in H^1_{\rm loc}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione $-Au = f$, risulta $u \in H^{k+2}_{\rm loc}(\Omega)$.*

DIM. Procediamo per induzione su k. Per $k = 0$, la tesi è vera grazie alla Proposizione 2.2.12. Supponiamola vera per k e proviamola per $k + 1$. Assumiamo quindi che $a_{ij} \in C^{k+2}(\Omega)$, b_i, $c \in C^{k+1}(\Omega)$ e che $f \in H^{k+1}_{\rm loc}(\Omega)$. La funzione u verifica per ipotesi

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j \phi - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, \phi - c\, u\, \phi \right) = \int_\Omega f\, \phi$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; in particolare

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j \phi = \int_\Omega g\, \phi \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

con g data da $f + \displaystyle\sum_{i=1}^N b_i\, D_i u + c\, u$. Per ipotesi induttiva $u \in H^{k+2}_{\rm loc}(\Omega)$, per cui $g \in H^{k+1}_{\rm loc}(\Omega)$. Per provare la tesi, facciamo vedere che $\nabla u \in H^{k+2}_{\rm loc}(\Omega)$. Mettiamo $D_r\phi$ al posto di ϕ nell'uguaglianza precedente e otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_{jr} \phi = \int_\Omega g\, D_r \phi = - \int_\Omega (D_r g)\, \phi.$$

Integrando per parti si ha quindi

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega (D_r g)\,\phi &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_r(a_{ij}\,D_i u)\,D_j\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (D_r a_{ij})\,D_i u\,D_j\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_j[D_r(a_{ij})\,D_i u]\,\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_{jr}(a_{ij})\,D_i u\,\phi \\
&\quad + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_r a_{ij}\,D_{ij} u\,\phi.
\end{aligned}$$

Si trova così che $D_r u$ è a sua volta soluzione debole dell'equazione ellittica

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi = \int_\Omega \phi\Big[D_r g + \sum_{i,j=1}^N D_{jr}a_{ij}\,D_i u + \sum_{i,j=1}^N D_r a_{ij}\,D_{ij} u\Big]$$

dove la funzione in parentesi quadre è in $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Applicando allora l'ipotesi induttiva deduciamo che $D_r u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e quindi, data l'arbitrarietà di r, che $\nabla u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, cioè $u \in H^{k+3}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Corollario 2.2.14 (Ipoellitticità) *Se a_{ij}, b_i, c sono di classe $C^\infty(\Omega)$ e anche il dato $f \in C^\infty(\Omega)$, allora $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ soluzione debole di $-Au = f$ è anch'essa di classe $C^\infty(\Omega)$.*

DIM. Basta usare le immersioni di Sobolev, giacchè $u \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni k. □

2.2.4 Regolarità fino al bordo

Di seguito, consideriamo come aperto la semipalla di centro l'origine e raggio R contenuta nel semispazio $\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$, denotata con B_R^+, e facciamo vedere che la soluzione debole del problema di Dirichlet con dato in L^2, è H^2 in una qualunque semipalla di raggio più piccolo. Il procedimento seguito consiste nell'usare il metodo dei quozienti differenziali per stimare le derivate tangenziali di $D_i u$ e l'equazione differenziale per ricavare l'ultima derivata $D_{NN} u$.

Lemma 2.2.15 *Sia $u \in H_0^1(B_R^+)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f \in L^2(B_R^+)$. Se $r < R$ allora esiste una costante $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che per ogni $i = 1, \dots, N-1$ si ha $D_i u \in H^1(B_r^+)$ e*

$$\|D_{ij}u\|_{L^2(B_r^+)} \leq C\,(\|u\|_{H^1(B_R^+)} + \|f\|_{L^2(B_R^+)}) \qquad \forall\, j = 1, ..., N. \tag{2.15}$$

DIM. Identica a quella del Lemma 2.2.4, usando quozienti differenziali, come nel caso dell'intera palla, rispetto a traslazioni tangenziali $h = (h_1, ..., h_{N-1}, 0)$. Infatti lo spazio H_0^1 è invariante rispetto a tali traslazioni nel senso che

$$v \in H_0^1(B_r^+) \quad \Longrightarrow \quad D_h v \in H_0^1(B_R^+)$$

con $|h|$ sufficientemente piccolo. □

La stima di D_{NN} è ottenuta nella proposizione seguente.

Proposizione 2.2.16 *Sia $u \in H_0^1(B_R^+)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f \in L^2(B_R^+)$. Se $r < R$ allora $u \in H^2(B_r^+)$ e*

$$\|D^2u\|_{L^2(B_r^+)} \leq C\,(\|u\|_{H^1(B_R^+)} + \|f\|_{L^2(B_R^+)}), \tag{2.16}$$

dove $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$.

DIM. Per la Proposizione 2.2.12, $u \in H^2_{\text{loc}}(B_R^+)$ e quindi $-Au = f$ q.o. Allora

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u = -f \qquad \text{q.o.}$$

dove $\beta_i = b_i - \sum_{j=1}^N D_j a_{ij}$ e quindi

$$D_{NN}u = \frac{-\Big[\displaystyle\sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u + f\Big]}{a_{NN}}$$

Dalla condizione di ellitticità si ha che $a_{NN} \geq \nu_0$, per cui

$$|D_{NN}u| \leq \frac{1}{\nu_0}\Big|\sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u + f\Big|.$$

La tesi segue subito dal Lemma 2.2.15. □

Segue ora un risultato di regolarità globale nel semispazio analogo a quello già visto in $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 2.2.17 *Sia $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$ ed esiste una costante $C = C(\nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\,(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}).$$

DIM. Come per il Teorema 2.2.6 è sufficiente adattare (e semplificare) la dimostrazione del Lemma 2.2.15 e della Proposizione 2.2.16 al caso del semispazio. □

Definizione 2.2.18 *Se $T = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} = \partial\mathbb{R}^N_+ \equiv \mathbb{R}^{N-1}$, indichiamo con $H^1_T(B^+_R)$ la chiusura nella norma H^1 delle funzioni $u \in C^\infty(\overline{B}^+_R)$ nulle in un intorno di $T \cap \overline{B}^+_R$ (cioè nulle solo vicino al bordo piatto di $\overline{B}^+_R$).*

Osservazione 2.2.19 Se $u \in H^1_T(B^+_R)$ e $\eta \in C^\infty_0(B_{R_1})$ con $R_1 < R$, allora $\eta u \in H^1_0(B^+_R)$. Infatti, per definizione esiste una successione $(u_n) \subseteq C^\infty(\overline{B}^+_R)$ tale che $u_n = 0$ in un intorno di $T \cap \partial B^+_R$ e u_n converge a u in $H^1(B^+_R)$. Ne segue che $\eta u_n \in C^\infty_0(B^+_R)$ e chiaramente $\eta u_n \to \eta u$ in H^1.

Inoltre se h è un vettore tangenziale, cioè $h = (h_1, h_2, \cdots, h_{N-1}, 0)$ e $|h| < R - R_1$ allora il quoziente differenziale $D_h(\eta u)$ appartiene a $H^1_0(B^+_R)$, perchè $D_h(\eta u_n) \in C^\infty_0(B^+_R)$.

Teorema 2.2.20 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f$, con $f \in L^2(B^+_R)$. Allora per ogni $r < R$, $u \in H^2(B^+_r)$ ed esiste una costante $c = c(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|D^2 u\|_{L^2(B^+_r)} \leq c\left(\|f\|_{L^2(B^+_R)} + \|u\|_{H^1(B^+_R)}\right).$$

DIM. Si procede come nel caso di $H^1_0(B^+_R)$ (Proposizione 2.2.16), tenendo conto dell'Osservazione 2.2.19. □

Lemma 2.2.21 *Sia $u \in H^2(B^+_r) \cap H^1_T(B^+_R)$, con $r < R$. Allora per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ si ha che $D_i u \in H^1_T(B^+_r)$.*

DIM. Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\eta \equiv 1$ in B_r e supp $\eta \subset B_{\frac{r+R}{2}}$. Allora $z = \eta u \in H^1_0(B^+_R)$. Inoltre, se $h = te_i$, con $1 \leq i \leq N-1$, per l'Osservazione 2.2.19, si ha che $D_h z \in H^1_0(B^+_R)$, per h sufficientemente piccolo e $D_h z \to D_i z$ in norma H^1, per $t \to 0$ (cfr Esercizio 2.2.3). Ne segue che $D_i z \in H^1_0(B^+_R)$ e siccome $z \equiv u$ in B_r, $D_i u \in H^1_T(B^+_r)$. □

Teorema 2.2.22 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f$. Supponiamo inoltre che $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{B}^+_R)$, $b_i, c \in C^k(\overline{B}^+_R)$ e $f \in H^k(B^+_R)$. Allora $u \in H^{k+2}(B^+_r)$ per ogni $r < R$.*

DIM. Procediamo per induzione su k.

Il caso $k = 0$ è provato dal Teorema 2.2.20. Assumiamo che la tesi sia vera per k e proviamola per $k+1$. Supponiamo pertanto che $a_{ij} \in C^{k+2}(\overline{B}_R^+)$, $b_i, c \in C^{k+1}(\overline{B}_R^+)$ e $f \in H^{k+1}(B_R^+)$. Per ipotesi induttiva $u \in H^{k+2}(B_r^+)$ per ogni $r < R$. Sia ora $s \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ e consideriamo la derivata tangenziale $D_s u$. Per il Lemma 2.2.21 $D_s u \in H^1_T(B_r^+)$, $r < R$, e derivando l'equazione rispetto a x_s risulta

$$\int_{B_r^+} \sum_{i,j} a_{ij} D_i(D_s u) D_j \phi = \int_{B_r^+} v\phi \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(B_r^+)$$

dove $v = D_s(f + cu + \sum_i b_i D_i u) + \sum_{i,j}(D_{js} a_{ij}) D_i u + \sum_{i,j}(D_s a_{ij}) D_{ij} u$ (cf Corollario 2.2.13). Siccome $v \in H^k(B_r^+)$, applicando l'ipotesi induttiva a $D_s u$ deduciamo che $D_s u \in H^{k+2}(B_r^+)$.

Per come è stato scelto s, resta la derivata rispetto a x_N di ordine $k+3$: $D_N^{k+3} u$. Per questa, basta derivare $k+1$ volte l'equazione rispetto a x_N e ricavare $D_N^{k+3} u$. Si trova così $D_N^{k+3} u$ espressa in funzione di tutte le altre derivate, già stimate; da qui la tesi. □

Corollario 2.2.23 *Se a_{ij}, b_i, c, $f \in C^\infty(\overline{B}_R^+)$, allora $u \in C^\infty(\overline{B}_r^+)$ per ogni $r < R$.*

Corollario 2.2.24 *Sia Ω un aperto limitato di classe C^{k+2}, oppure $\Omega = \mathbb{R}^N$, oppure $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Se $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega}), b_i \in C^k(\overline{\Omega}), c \in C^k(\overline{\Omega}), f \in H^k(\Omega)$ allora $u \in H^{k+2}(\Omega)$.*

DIM. Per $\Omega = \mathbb{R}^N$ basta iterare il Teorema 2.2.6.

Per $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ si ripete lo stesso argomento del Teorema 2.2.22 senza fare alcun troncamento.

Per Ω aperto limitato di classe C^{k+2} si procede mediante carte locali e partizioni dell'unità. □

Corollario 2.2.25 *Supponiamo che $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$ sia soluzione debole dell'equazione $\lambda u - \Delta u = f$, con $\lambda > 0$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ è a supporto compatto in $\mathbb{R}^N$ allora $u \in H^k(\mathbb{R}^N_+)$, per ogni k. In particolare $u \in C_b^\infty(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$.*

Lo studio della regolarità delle soluzioni deboli in semipalle consente di passare a quello al bordo di aperti regolari mediante l'uso di carte locali. Il lemma successivo mostra che tramite un cambio di variabili l'operatore di partenza si trasforma in un altro operatore uniformemente ellittico del secondo ordine.

Lemma 2.2.26 *Sia Ω un aperto di classe C^2, sia (U, H) una carta locale su Ω. Sia inoltre $u \in H_0^1(U \cap \Omega)$ tale che*

$$\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{x_i} u D_{x_j} \varphi = \int_{U\cap\Omega} g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(U \cap \Omega) \tag{2.17}$$

dove $g \in L^2(U \cap \Omega)$. *Allora, posto*

$$v(y) := u(H(y)) , \quad y \in B_R^+$$

si ha che $v \in H_0^1(B_R^+)$ *e soddisfa*

$$\int_{B_R^+} \sum_{h,k=1}^N \alpha_{hk} D_{y_k} v D_{y_h} \psi = \int_{B_R^+} \widetilde{g}\, \psi \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(B_R^+) \tag{2.18}$$

dove $\widetilde{g} = (g \circ H)|JacH| \in L^2(B_R^+)$ *e i coefficienti* $\alpha_{hk} \in C^1(B_R^+)$ *verificano la condizione di ellitticità uniforme.*

DIM. Sia $\psi \in C_0^\infty(B_R^+)$; poniamo $\varphi(x) := \psi(J(x))$, dove J indica la funzione inversa di H e $x \in U \cap \Omega$. Allora $\varphi \in C_0^1(U \cap \Omega)$ e

$$D_{x_i} u(x) = \sum_{k=1}^N D_{y_k} v(Jx) D_{x_i} J_k(x), \quad D_{x_j} \varphi(x) = \sum_{h=1}^N D_{y_h} \psi(Jx) D_{x_j} J_h(x).$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} &\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{x_i} u(x) D_{x_j} \varphi(x)\; dx \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{U\cap\Omega} a_{ij}(x) \sum_{h,k=1}^N D_{y_k} v(Jx) D_{x_i} J_k(x) D_{y_h} \psi(Jx) D_{x_j} J_h(x)\; dx \\ &= \sum_{i,j=1}^N \sum_{h,k=1}^N \int_{B_R^+} \big(a_{ij}(H(y)) D_{y_k} v(y) D_{x_i} J_k(H(y)) D_{y_h} \psi(y) D_{x_j} J_h(H(y)) \\ &\qquad\qquad |JacH|\big)\; dy, \end{aligned}$$

in base alle usuali formule sul cambio di variabili in un integrale. Pertanto, posto

$$\alpha_{hk}(y) := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y))\, |JacH|(y)$$

risulta

$$\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{x_i} u(x) D_{x_j} \varphi(x) dx = \int_{B_R^+} \sum_{h,k=1}^N \alpha_{hk}(y) D_{y_k} v(y) D_{y_h} \psi(y) dy. \tag{2.19}$$

Siccome i coefficienti a_{ij} sono di classe C^1 e le funzioni H, J di classe C^2, i nuovi coefficienti α_{hk} appartengono a $C^1(B_R^+)$ e inoltre soddisfano la condizione di ellitticità. Infatti per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, usando il fatto che le matrici iacobiane JacH e JacJ non sono singolari risulta

$$\begin{aligned}\sum_{h,k=1}^{N} \alpha_{hk}\xi_h\xi_k &= \sum_{h,k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{x_i}J_kD_{x_j}J_h\,|JacH|\xi_h\xi_k \\ &= |JacH|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N} D_{x_i}J_k\xi_k\right)\left(\sum_{h=1}^{N} D_{x_j}J_h\xi_h\right) \\ &\geq |JacH|\nu_0\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} D_{x_i}J_k\xi_k\right)^2 \geq \beta|\xi|^2.\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\int_{U\cap\Omega} g\varphi\,dx = \int_{B_R^+}(g\circ H)\psi|JacH|\,dy \tag{2.20}$$

per cui, combinando (2.17), (2.19), e (2.20) si ottiene la tesi. □

Giungiamo infine al risultato più importante di questo capitolo.

Teorema 2.2.27 *Siano Ω aperto limitato di classe C^2, $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di $-Au = f$, $f \in L^2(\Omega)$. Allora $u \in H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $C = C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2} \leq C\,(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}).$$

DIM. Siccome Ω è un aperto di classe C^2, dalla Definizione 1.0.1 segue che per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U_x intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $J_x : \overline{U}_x \to \overline{B}_1$ biiettiva, di classe C^2 con la sua inversa H_x, tali che $J_x(U_x \cap \Omega) = B_1^+$ e $J_x(U_x \cap \partial\Omega) = \overline{B}_1^+ \cap \{x_N = 0\}$. Poniamo $V_x := H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Per ogni $x \in \Omega$ sia $B_{2R_x}(x)$ una palla contenuta in Ω. Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto, possiamo determinare intorni $\{V_{x_i}\}_{i=1,\dots,n_1}$ e palle $\{B_{R_{x_i}}(x_i)\}_{i=n_1+1,\dots,n_2}$ interne ad Ω, tali che

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_1} V_i \,\cup \bigcup_{j=n_1+1}^{n_2} B_{R_{x_j}}(x_j)\,.$$

Poniamo $V_i = V_{x_i}$, $R_j = R_{x_j}$ e $n = n_1 + n_2$.

Sia $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ una partizione dell'unità relativa a questo ricoprimento di $\overline{\Omega}$. Allora, in particolare $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1$ in un intorno di $\overline{\Omega}$, e quindi possiamo scrivere

$$u = \sum_{i=1}^{n}\theta_i u = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{in } \Omega.$$

A questo punto si tratta di provare che $u_i \in H^2(\Omega)$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

Se $i = n_1+1, \ldots, n$ allora $\mathrm{supp}(u_i) \subset B_{R_i}(x_i)$, per cui dal Teorema 2.2.5 applicato alle palle $B_{R_i}(x_i)$ e $B_{2R_i}(x_i)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\|u_i\|_{H^2(\Omega)} &= \|u\,\theta_i\|_{H^2(B_{R_i}(x_i))} \le C_i\,\|u\|_{H^2(B_{R_i}(x_i))} \le \\ &\le C_i\,C(R_i, 2R_i, \nu_0, M_0, N_0)(\|f\|_{L^2(B_{2R_i}(x_i))} + \|u\|_{H^1(B_{2R_i}(x_i))}) \\ &\le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})\end{aligned}$$

Sia adesso $i \le n_1$; la funzione $u_i = \theta_i u$ appartiene ad $H_0^1(U_i \cap \Omega)$, siccome $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\mathrm{supp}\,\theta_i \subseteq V_i$ e soddisfa

$$\int_{U_i\cap\Omega} \sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}\, D_h u_i\, D_k v = \int_{U_i\cap\Omega} g_i\, v \qquad \forall v \in C_0^\infty(U_i \cap \Omega)$$

con $g_i \in L^2(U_i \cap \Omega)$ che verifica $\|g_i\|_{L^2(U_i\cap\Omega)} \le C(M_0, N_0, \Omega)\,[\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}]$ (si veda la dimostrazione del Lemma 2.2.4).

Consideriamo la funzione $v_i := u_i \circ H_i$. Per il Lemma 2.2.26 risulta che $v_i \in H_0^1(B_1^+)$ e risolve un'altra equazione ellittica del secondo ordine, relativa alla semipalla B_1^+. Applicando la Proposizione 2.2.16, deduciamo che $v_i \in H^2(B_{\frac{1}{2}}^+)$ e

$$\|v_i\|_{H^2(B_1^+)} = \|v_i\|_{H^2(B_{\frac{1}{2}}^+)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,[\|\tilde{g}_i\|_{L^2(B_1^+)} + \|v_i\|_{H^1(B_1^+)}]$$

e quindi

$$\|u_i\|_{H^2(U_i\cap\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u_i\|_{H^1(\Omega)}]$$

da cui infine

$$\|u_i\|_{H^2(\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}].$$

Siccome $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ su Ω, concludiamo che $u \in H^2(\Omega)$ e che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H^2(\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

□

Concludiamo adesso con un risultato di regolarità di ordine superiore, di cui non diamo la dimostrazione poichè tecnicamente analoga a quelle precedenti.

Teorema 2.2.28 *Sia Ω aperto limitato di classe C^{k+2} e sia $f \in H^k(\Omega)$. Se $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $b_i \in C^k(\overline{\Omega})$ e $c \in C^k(\overline{\Omega})$, allora la soluzione debole di $-Au = f$ appartiene ad $H^{k+2}(\Omega)$.*

Osservazione 2.2.29 Se $k > \dfrac{N}{2}$ allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (per le immersioni di Sobolev) e diventa come tale soluzione classica del problema di Dirichlet.

CAPITOLO 3

PRINCIPI DEL MASSIMO

3.1 PRINCIPI DEL MASSIMO IN FORMA DEBOLE

Richiamiamo il principio del massimo debole per funzioni subarmoniche regolari.

Teorema 3.1.1 *Sia Ω limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subarmonica, cioè $\Delta u \geq 0$. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Vogliamo estendere tale risultato a operatori della forma

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) \tag{3.1}$$

definiti in $C^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, con i coefficienti b_i, c, $a_{ij} = a_{ji} \in C(\overline{\Omega})$ reali e verificanti la condizione di uniforme ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega\ ,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

per un'opportuna costante $\nu_0 > 0$.

Teorema 3.1.2 (Principio del massimo debole) *Sia $c \equiv 0$ in Ω e sia u in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che $Au \geq 0$ in Ω. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.2}$$

Se invece $Au \leq 0$ allora

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno preliminarmente del seguente risultato di algebra lineare.

Lemma 3.1.3 *Siano $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ due matrici reali e simmetriche, rispettivamente semidefinita positiva e semidefinita negativa. Allora*

$$\mathit{tr}\,(BC) = \sum_{i,j=1}^N b_{ij}c_{ij} \leq 0.$$

DIM. Siccome B è una matrice reale e simmetrica, essa è diagonalizzabile mediante una matrice di passaggio U ortogonale, cioè

$$D = UBU^{-1},$$

con $D = [\beta_1, \dots, \beta_N]$ matrice diagonale degli autovalori di B. Consideriamo la matrice $E = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^N$ data da $E = UCU^{-1}$. Siccome U è ortogonale, E è ancora simmetrica. Inoltre D ed E sono semidefinite positiva e negativa rispettivamente, per cui i loro elementi sulla diagonale principale verificano la proprietà: $\beta_i \geq 0$ e $\gamma_{ii} \leq 0$ per ogni i. Ne segue che

$$\mathrm{tr}(DE) = \sum_{i=1}^N \beta_i\gamma_{ii} \leq 0.$$

A questo punto, risulta

$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(U^{-1}DUU^{-1}EU) = \mathrm{tr}(U^{-1}DEU) = \mathrm{tr}(DE) \leq 0,$$

che è la tesi. □

DIM. (TEOREMA) Proviamo anzitutto che se $Au > 0$ allora u non può avere un massimo interno. Procedendo per assurdo, supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Siccome x_0 è interno, risulta che $\nabla u(x_0) = 0$ e la matrice Hessiana di u in questo punto, $(D_{ij}u(x_0))$, è semidefinita negativa.

L'ipotesi di ellitticità sull'operatore A implica che la matrice $(a_{ij}(x_0))$, reale e simmetrica, è definita positiva, per cui, applicando il Lemma 3.1.3, si deduce che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0.$$

Allora $(Au)(x_0) \leq 0$, il che chiaramente contraddice l'ipotesi $Au > 0$.

Se $Au \geq 0$ ci si può ricondurre al caso precedente introducendo un'opportuna funzione ausiliaria. Precisamente, consideriamo $e^{\lambda x_1}$, dove $\lambda > 0$ è un parametro da determinare. Allora si ha

$$\begin{aligned} A(e^{\lambda x_1}) &= a_{11}(x)\lambda^2 e^{\lambda x_1} + b_1(x)\lambda e^{\lambda x_1} = \lambda e^{\lambda x_1}(b_1(x) + \lambda a_{11}(x)) \\ &\geq \lambda e^{\lambda x_1}(b_1(x) + \lambda\nu_0) \geq \lambda e^{\lambda x_1}(\lambda\nu_0 - \|b_1\|_\infty). \end{aligned}$$

Scelto $\lambda_0 > 0$ in modo tale che $\lambda_0 \nu_0 - \|b_1\|_\infty > 0$ si ottiene pertanto che $Ae^{\lambda_0 x_1} > 0$. A questo punto, sia $u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{\lambda_0 x_1}$. Allora $Au_\varepsilon = Au + \varepsilon A e^{\lambda_0 x_1} > 0$ e applicando quanto dimostrato nella prima parte si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon .$$

Infine, siccome u_ε converge uniformemente ad u in $\overline{\Omega}$, quando $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon &\longrightarrow \max_{\overline{\Omega}} u \qquad \text{per } \varepsilon \to 0 \\ \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon &\longrightarrow \max_{\partial\Omega} u \qquad \text{per } \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

Scambiando u con $-u$ si ottiene il principio del minimo quando $Au \leq 0$. $\square$

Corollario 3.1.4 (Principio del massimo modulo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è tale che $Au = 0$, allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| .$$

DIM. Per conseguire la tesi è sufficiente osservare che

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max \left\{ \max_{\overline{\Omega}} u, -\min_{\overline{\Omega}} u \right\}$$

e applicare il teorema precedente. $\square$

Un'immediata conseguenza del principio del massimo modulo è il teorema di unicità della soluzione per il problema di Dirichlet associato ad A.

A questo punto, è naturale chiedersi cosa succede se viene meno l'ipotesi che $c \equiv 0$: qualora $c \not\equiv 0$, è importante conoscere il suo segno. Per capire il motivo di ciò, prendiamo ad esempio come operatore $\Delta + c$, con c costante positiva. Se valesse un principio del massimo debole allora, con le stesse tappe di prima, arriveremmo a un teorema di unicità per il problema

$$\begin{cases} \Delta u = -c\, u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ma il Laplaciano, in quanto operatore dissipativo, autoaggiunto con risolvente compatto, ammette una successione di autovalori $\lambda_n < 0$, che decrescono a $-\infty$, sicchè i problemi

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda_n\, u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

chiaramente non hanno un'unica soluzione.

Da questo esempio, si comprende che per poter ottenere un principio del massimo quando $c \not\equiv 0$, bisogna supporre necessariamente $c \leq 0$.

Teorema 3.1.5 (Principio del massimo debole) *Sia* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e supponiamo che* $c \leq 0$*. Allora risulta*

(i) $Au \geq 0$ *in* $\Omega \Longrightarrow \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$*,*

(ii) $Au \leq 0$ *in* $\Omega \Longrightarrow \min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$*.*

DIM. (i) Se $u \leq 0$ in Ω, allora la tesi è ovvia. Altrimenti $V = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ è un aperto non vuoto di Ω. Posto $B = A - c$, si ha che $Bu = Au - cu \geq 0$ in V e quindi, dal Teorema 3.1.2

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial V} u^+$$

siccome $u \geq 0$ su $\overline{V}$. Risulta $\max_{\overline{V}} u = \max_{\overline{\Omega}} u$, visto che, fuori di V, $u(x) \leq 0$. Proviamo infine che $\max_{\partial V} u^+ = \max_{\partial\Omega} u^+$. Osserviamo che $\partial V = (\partial V \cap \Omega) \cup (\partial V \cap \partial\Omega)$ e che $u \equiv 0$ su $\partial V \cap \Omega$, $u \leq 0$ su $\partial\Omega \setminus \partial V$. Allora $\max_{\partial V} u^+ = \max_{\partial V \cap \partial\Omega} u^+ = \max_{\partial\Omega} u^+$. Questo prova (i).

(ii) Con un semplice cambio di segno possiamo ricondurci al caso precedente. Infatti

$$\begin{aligned} Au \leq 0 \ \Rightarrow \ A(-u) \geq 0 \ &\Rightarrow \ \max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+ \\ &\Rightarrow \ \min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-. \end{aligned}$$

□

Corollario 3.1.6 (Principio del massimo modulo) *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *è tale che* $Au = 0$ *e se* $c \leq 0$*, allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Anche stavolta scriviamo $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max \left\{ \max_{\overline{\Omega}} u, -\min_{\overline{\Omega}} u \right\}$. Se $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora dalla (i) del Teorema 3.1.5 segue che

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Siccome l'altra disuguaglianza è ovvia, concludiamo che $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

Si procede in modo del tutto analogo se $\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u$. □

Deduciamo adesso un teorema di unicità per il problema di Dirichlet associato ad A e un principio di confronto, utile nelle applicazioni.

Proposizione 3.1.7 *Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e sia $c \leq 0$. Allora*

(i) $Au = Av$ *in* Ω, $u = v$ *su* $\partial\Omega \Rightarrow u = v$ *in* Ω.

(ii) $Au \geq Av$ *in* Ω, $u \leq v$ *su* $\partial\Omega \Rightarrow u \leq v$ *in* Ω.

Proviamo di seguito una stima a priori per l'equazione $Au = f$ che sarà usata nel Capitolo 5. Nella dimostrazione useremo il seguente lemma.

Lemma 3.1.8 *Sia Ω limitato e $c \leq 0$. Esiste $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi > 0$ in Ω e $A\phi \leq -1$ in Ω.*

DIM. Sia $\psi(x) = \cosh \mu x_1$. Allora

$$\begin{aligned} A\psi &= a_{11}\mu^2 \cosh \mu x_1 + b_1 \mu \sinh \mu x_1 + c \cosh \mu x_1 \\ &\geq (\nu_0 \mu^2 - \|b_1\|_\infty \mu - \|c\|_\infty) \cosh \mu x_1. \end{aligned}$$

Fissiamo μ sufficientemente grande e otteniamo $A\psi \geq 1$. Basta adesso prendere $\phi(x) = \cosh \mu R - \cosh \mu x_1$, dove $R > 0$ è tale che $\Omega \subseteq B_R(0)$. □

Proposizione 3.1.9 *Sia Ω limitato, $c \leq 0$. Esiste $C = C(\Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\|u\|_\infty \leq C\|Au\|_\infty + \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Sia $v = u - \|Au\|_\infty \phi - \max_{\partial\Omega} |u|$, dove ϕ è la funzione del Lemma 3.1.8. E' immediato verificare che $Av \geq 0$ in Ω e che $v \leq 0$ su $\partial\Omega$. Per il Teorema 3.1.5, $v \leq 0$ in Ω e quindi $u \leq C\|Au\|_\infty + \max_{\partial\Omega} |u|$, $C = \cosh \mu R$. Scambiando u on $-u$ si conclude la dimostrazione. □

Per il seguito è necessario considerare anche i casi dell'intero spazio e del semispazio.

Proposizione 3.1.10 *Supponiamo $c \leq 0$. Siano $\lambda > 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda u - Au = f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

DIM. Consideriamo la funzione $v(x) = \gamma + |x|^2$, con $\gamma > 0$ parametro da determinare. Risulta allora

$$Av(x) = 2\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) + 2\sum_{i=1}^N b_i(x)x_i + c(x)v(x) \leq \alpha + \beta|x|$$

con α e β costanti positive opportune. Scelto γ in modo tale che

$$\alpha + \beta|x| \leq \lambda(\gamma + |x|^2) = \lambda v(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

(per esempio, se $\eta = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}(\alpha + \beta|x| - \lambda|x|^2)$, basta prendere $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$), si ha

$$Av \le \lambda v \qquad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

Poniamo $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$. Siccome $\lim_{|x|\to\infty} u_\varepsilon(x) = -\infty$, u_ε ha un punto di massimo assoluto in un certo x_0 e quindi

$$Au_\varepsilon(x_0) \le 0. \tag{3.3}$$

Inoltre

$$\lambda u_\varepsilon - Au_\varepsilon = \lambda u - Au - \varepsilon(\lambda v - Av) = f - \varepsilon(\lambda v - Av) \le f. \tag{3.4}$$

Da (3.3) e (3.4) segue allora che

$$\lambda u_\varepsilon(x_0) \le \lambda u_\varepsilon(x_0) - Au_\varepsilon(x_0) \le f(x_0) \le \|f\|_\infty$$

e quindi

$$u(x) - \varepsilon v(x) = u_\varepsilon(x) \le u_\varepsilon(x_0) \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Facendo il limite per $\varepsilon \to 0$ della disuguaglianza precedente otteniamo

$$u(x) \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Le stesse argomentazioni applicate alla funzione $-u$ portano ad avere $\|u\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$, cioè la tesi. □

Osservazione 3.1.11 Il teorema precedente continua a valere anche se i coefficienti sono illimitati richiedendo che

$$\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)x_i \le k(1 + |x|^2), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

per qualche costante $k > 0$.

Come conseguenza del principio del massimo appena provato deduciamo l'unicità di una soluzione limitata dell'equazione $\lambda u - Au = f$.

Corollario 3.1.12 *Sia $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Se $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$ risolvono l'equazione $\lambda u - Au = f$, allora $u_1 \equiv u_2$.*

DIM. Posto $u = u_1 - u_2$, risulta $\lambda u - Au = 0$. Per la Proposizione 3.1.10 vale allora $\|u\|_\infty \le 0$, ossia $u \equiv 0$ e quindi $u_1 \equiv u_2$ in $\mathbb{R}^N$. □

Teorema 3.1.13 *Supponiamo $c \leq 0$, $\lambda > 0$. Siano $u \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C_b(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$, con $u(x', 0) = 0$. Allora, posto $\lambda u - Au = f$, si ha*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

DIM. La dimostrazione è del tutto simile a quella fatta per $\mathbb{R}^N$.

Poniamo $v(x) = \gamma + |x|^2$, e scegliamo γ tale che $Av(x) \leq \lambda v(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_+$. Definiamo $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon v(x)$; siccome $\lim_{|x| \to +\infty} u_\varepsilon(x) = -\infty$, u_ε ammette un punto di massimo assoluto x_0. Supponiamo che $u_\varepsilon(x_0) > 0$ e osserviamo che $x_0 \notin \mathbb{R}^{N-1}$. Pertanto $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$ e

$$Au_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij} u_\varepsilon(x_0) + \sum_{i=1}^N b_i D_i u_\varepsilon(x_0) + c(x_0) u_\varepsilon(x_0) \leq 0$$

(confronta il Lemma 3.1.3 e il Teorema 3.1.2). Ne segue che

$$\begin{aligned} \lambda u_\varepsilon(x_0) &\leq \lambda u_\varepsilon(x_0) - Au_\varepsilon(x_0) \\ &= \lambda u(x_0) - Au(x_0) - \varepsilon(\lambda v(x_0) - Av(x_0)) \\ &\leq f(x_0) \leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

cioè

$$u_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

Se $u_\varepsilon(x_0) \leq 0$, la disuguaglianza precedente è ovvia perchè $u_\varepsilon(x_0) \leq 0 \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$. Allora per ogni x vale

$$u(x) - \varepsilon v(x) = u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

Per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$u(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda} \qquad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{3.5}$$

Applicando le stesse argomentazioni alla funzione $-u$ otteniamo la tesi. □

3.2 PRINCIPI DEL MASSIMO IN FORMA FORTE

Sebbene il principio del massimo debole sia sufficiente per molte applicazioni, spesso è necessario disporre di una versione ”forte” che escluda l'esistenza di un massimo interno per soluzioni non costanti. Un tale principio per il Laplaciano si enuncia nel seguente modo.

Teorema 3.2.1 *Sia Ω un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia u subarmonica in Ω. Se esiste un punto x_0 interno a Ω tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora u è costante.*

Tipicamente la dimostrazione di questo teorema si poggia su un argomento che caratterizza le funzioni subarmoniche e che è rappresentato dalla disuguaglianza del valor medio:

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \implies \forall\, B_R(y) \subset\subset \Omega \quad u(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)dx.$$

Tale proprietà non ha un analogo nel caso di operatori di forma più generale e di conseguenza la dimostrazione del principio del massimo forte per il Laplaciano non può essere estesa al caso generale. In alternativa, scegliamo di seguire il metodo di Hopf, che poggia sul seguente lemma.

Lemma 3.2.2 *Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$. Supponiamo che $Au \geq 0$ in Ω con $c \equiv 0$ e che esista $x_0 \in \partial\Omega$ tale che*

(i) *u è continua in x_0,*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$, per ogni $x \in \Omega$,*

(iii) *$\partial\Omega$ verifica la proprietà della palla interna in x_0, cioè esiste $B_R(y) \subset \Omega$ tale che $x_0 \in \partial B_R(y)$.*

Se esiste la derivata direzionale di u in x_0 rispetto alla normale esterna ν a $B_R(y)$, allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se $c \leq 0$ la stessa conclusione vale a patto che $u(x_0) \geq 0$. Infine se $u(x_0) = 0$, la tesi è vera indipendentemente dal segno di c.

DIM. Per l'ipotesi (iii), esiste una palla $B_R(y) \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B_R(y)$; prendendo eventualmente una palla più piccola $B_{R'}(y') \subseteq B_R(y)$ con centro y' sul segmento $\overline{yx_0}$, possiamo supporre che $\overline{B}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Se $0 < \varrho < R$, consideriamo la corona circolare $\mathcal{C} = B_R(y) \setminus \overline{B}_\varrho(y)$ e definiamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}, \qquad \forall\, x \in \mathcal{C}$$

con α costante positiva da determinare. Osserviamo che $v(x) > 0$ in $\mathcal{C}$ e $v(x) = 0$ su $\partial B_R(y)$. Inoltre $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \Omega \cup \{x_0\}$.

Ora, come conseguenza della condizione di ellitticità sull'operatore A e della limitatezza dei suoi coefficienti, risulta

$$\begin{aligned}(Av)(x) &= e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\\&\quad -2\alpha\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) - 2\alpha\sum_{i=1}^N b_i(x)(x_i-y_i)\\&\quad +c(x)\big(1-e^{-\alpha(R^2-|x-y|^2)}\big)\Big]\\&\geq e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\nu_0|x-y|^2 - 2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sum_{i=1}^N a_{ii}(x)\Big)\\&\quad -2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}|b(x)|\Big)|x-y| - \sup_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|\Big]\\&\geq e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\nu_0\varrho^2 - 2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sum_{i=1}^N a_{ii}(x)\Big)\\&\quad -2\alpha R\sup_{x\in\overline{\Omega}}|b(x)| - \sup_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|\Big]\end{aligned}$$

dove $b=(b_1,...,b_N)$. A questo punto, scegliamo α in modo tale che la quantità scritta tra parentesi risulti positiva. Così si ha $Av\geq 0$ in $\mathcal{C}$. Siccome $u(x)-u(x_0)<0$ in Ω, esiste $\varepsilon>0$ tale che $w(x)=u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\leq 0$ su $\partial B_\varrho(y)\subset\Omega$. Tale disuguaglianza è verificata anche su $\partial B_R(y)$, dove $v=0$. Pertanto la funzione w gode di queste proprietà: $Aw(x)=Au(x)-c(x)u(x_0)+\varepsilon Av(x)\geq -c(x)u(x_0)\geq 0$, per ogni $x\in\mathcal{C}$, nelle ipotesi dell'enunciato, e $w\leq 0$ su $\partial\mathcal{C}$. Il principio del massimo debole (Teorema 3.1.5) implica adesso che $w\leq 0$ in tutto $\mathcal{C}$ (a tale proposito osserviamo che la continuità di w su $\overline{\mathcal{C}}$, richiesta dal principio applicato, è conseguenza di (i) e del fatto che $\overline{\mathcal{C}}\subseteq\Omega\cup\{x_0\}$). Calcolando la derivata normale di w nel punto x_0, si ha

$$\frac{\partial w}{\partial\nu}(x_0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{w(x_0+t\,\nu)-w(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{w(x_0+t\,\nu)}{t}\geq 0$$

da cui segue, come richiesto, che

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\nu}(x_0)=\varepsilon 2\alpha Re^{-\alpha R^2}>0.$$

□

Osserviamo che la disuguaglianza $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\geq 0$ è ovvia perchè x_0 è punto di massimo. La difficoltà nel lemma è ottenere la disuguaglianza stretta $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)>0$.

A questo punto siamo in grado di dimostrare il seguente

Teorema 3.2.3 (Principio del massimo forte) *Sia Ω un aperto connesso limitato e sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Au \geq 0$ (risp. $Au \leq 0$) in Ω.*

- *Se $c \equiv 0$ e $u(x_0) = \max\limits_{\Omega} u$ (risp. $u(x_0) = \min\limits_{\Omega} u$), per qualche $x_0 \in \Omega$, allora u è costante.*
- *Se $c \leq 0$ e $u(x_0) = \max\limits_{\Omega} u \geq 0$ (risp. $u(x_0) = \min\limits_{\Omega} u \leq 0$), con $x_0 \in \Omega$ allora u è costante.*

DIM. Supponiamo per assurdo che u non sia costante e che raggiunga il suo massimo M in un punto x_0 all'interno di Ω. Posto

$$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\} \quad \text{e} \quad E = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

risulta pertanto che $E,\ \Omega^- \neq \emptyset$. Sia $x_1 \in \Omega^-$ e $\gamma : [0,1] \to \Omega$ una curva continua congiungente i punti x_0 e x_1, cioè tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Siccome Ω^- è aperto, esiste $\bar{t} \in]0,1[$ con $\gamma(\bar{t}) \notin \Omega^-$ e $\gamma(t) \in \Omega^-$ se $t \in]\bar{t}, 1]$. Sia $\overline{x} = \gamma(\bar{t}) \in E$ e $y = \gamma(t) \in \Omega$ con $t > \bar{t}$ tale che $\text{dist}(y, \overline{x}) < \text{dist}(y, \partial\Omega)$. Allora $r = \text{dist}(y, E) \leq \text{dist}(y, \overline{x}) < \text{dist}(y, \partial\Omega)$. Consideriamo la palla $B_r(y)$ e un punto $z_0 \in E$ tale che $\text{dist}(y, z_0) = r$. Il punto z_0 soddisfa ora le ipotesi del lemma precedente relativamente all'aperto Ω^-. Siccome $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(z_0) > 0$ (ν è la normale esterna a $B_r(y)$), allora $\nabla u(z_0) \neq 0$. Questo è però impossibile in un punto di massimo interno. $\square$

CAPITOLO 4

SPAZI DI FUNZIONI HÖLDERIANE

Nel corso di questa seconda parte il nostro studio è rivolto al problema di Dirichlet associato ad un operatore differenziale uniformemente ellittico del secondo ordine con coefficienti α-hölderiani. L'intento è quello di provare che sotto opportune ipotesi di regolarità dell'aperto, in corrispondenza di un dato di classe $C^{0,\alpha}$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet di classe $C^{2,\alpha}$ (si ha dunque regolarità massimale).

Prima di procedere, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Cominciamo col presentare nella sezione che segue alcune informazioni utili sulle funzioni hölderiane.

4.1 PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE FUNZIONI HÖLDERIANE

Definizione 4.1.1 *Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e $0 < \alpha \leq 1$. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definiamo* **modulo di α-hölderianità** *di u la quantità*

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Denotata con $C_b(\Omega)$ la classe delle funzioni continue e limitate in Ω, chiamiamo spazio delle funzioni α-hölderiane l'insieme

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C_b(\Omega) : [u]_\alpha < +\infty\}.$$

In particolare $C^{0,1}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni lipschitziane in Ω.

La restrizione su α non è casuale dato che se Ω è connesso le uniche funzioni u per cui $[u]_\alpha < +\infty$ con $\alpha > 1$ sono le costanti (vd Esercizio 4.1.16).

Se $[u]_\alpha < +\infty$ allora $[u]_\alpha$ è la più piccola costante c tale che $|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha$, per ogni $x, y \in \Omega$.

E' immediato verificare che $[\cdot]_\alpha$ definisce una seminorma in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ($[u]_\alpha = 0$ per ogni funzione costante u). Invece $\|u\|_\alpha := \|u\|_\infty + [u]_\alpha$ è una norma e lo spazio $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_\alpha)$ è completo (vd Esercizio 4.1.17).

Osservazione 4.1.2 Se $u \in C_b(\Omega)$ verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha, \qquad |x-y| \leq \varrho_0,\ x, y \in \Omega$$

per qualche $\varrho_0 > 0$, allora $[u]_\alpha < +\infty$.

Infatti se $|x-y| \geq \varrho_0$, risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_\infty \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2\|u\|_\infty}{\varrho_0^\alpha}|x-y|^\alpha,$$

per cui $[u]_\alpha \leq \max\left\{c, \frac{2\|u\|_\infty}{\varrho_0^\alpha}\right\}$.

L'osservazione appena fatta consente di stabilire una relazione d'inclusione tra spazi di funzioni hölderiane con diversi esponenti.

Proposizione 4.1.3 *Se $\beta < \alpha$ allora $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$.*

DIM. Sia $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Essendo $\beta < \alpha$, risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_\alpha |x-y|^\alpha \leq [u]_\alpha |x-y|^\beta$$

se $x, y \in \Omega$, $|x-y| \leq 1$. L'osservazione precedente implica la tesi. □

Direttamente dalla definizione discende che ogni funzione hölderiana è uniformemente continua e come tale prolungabile con continuità al bordo del suo insieme di definizione. Pertanto

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Proposizione 4.1.4 *Se Ω è limitato allora l'inclusione $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ è compatta, per ogni $0 < \alpha \leq 1$.*

DIM. E' stato già osservato che ogni $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ appartiene a $C(\overline{\Omega})$ essendo in particolare uniformemente continua. Resta quindi da provare che l'inclusione è compatta. Sia $(u_n) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$ tale che $[u_n]_\alpha \leq 1$ e $\|u_n\|_\infty \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, se $\delta > 0$, si ha

$$\omega(u_n, \delta) \leq [u_n]_\alpha \delta^\alpha \leq \delta^\alpha \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

dove $\omega(u_n, \delta) = \sup\{|u_n(x) - u_n(y)| : |x-y| \leq \delta\}$ è il modulo di continuità della funzione u_n. Pertanto la successione (u_n) è equicontinua e equilimitata. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) che converge uniformemente in $\overline{\Omega}$. □

Proposizione 4.1.5 *Sia* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$ *tale che* u_n *converge uniformemente a una data* u *e* $[u_n]_\alpha \leq C$*, per qualche costante* $C > 0$*. Allora* $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *e* $[u]_\alpha \leq C$ *(cioè la palla di* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *è chiusa nella norma* $\|\cdot\|_\infty$*).*

DIM. Chiaramente $u \in C_b(\Omega)$. Per ogni $x, y \in \Omega$ risulta

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Passando al limite puntualmente si ha quanto richiesto. □

Definizione 4.1.6 *Se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0,1]$*, definiamo*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C_b^k(\Omega) : D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \textit{ per ogni } \beta \textit{ con } |\beta| = k\},$$

dove $C_b^k(\Omega)$ *è lo spazio delle funzioni derivabili con continuità* k *volte e limitate in* Ω *con tutte le derivate. Posto*

$$\|u\|_{k,\alpha} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_\alpha$$

con $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$*, risulta che* $(C^{k,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{k,\alpha})$ *è spazio di Banach.*

Osserviamo che l'hölderianità delle derivate non implica in generale quella della funzione. Ciò dipende dalla natura geometrica dell'aperto Ω: come vedremo, se questo risulta regolare in qualche senso, l'inclusione $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ risulta verificata per ogni k.

Un problema simile legato alle proprietà geometriche di Ω è rappresentato dall'immersione $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Proposizione 4.1.7 *Se* Ω *è un aperto convesso di* $\mathbb{R}^N$*, allora per ogni* $\alpha \in (0,1]$ *risulta che* $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$*.*

DIM. Sia $u \in C_b^1(\Omega)$. Fissati $x, y \in \Omega$, per il teorema di Lagrange, esiste $\xi \in \Omega$ tale che

$$u(x) - u(y) = \nabla u(\xi) \cdot (y - x).$$

Pertanto

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_\infty |x - y|.$$

Ciò implica che u appartiene a $C^{0,1}(\Omega)$ e quindi, per la Proposizione 4.1.3, ad ogni $C^{0,\alpha}(\Omega)$. □

In particolare, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, $C_b^1(\mathbb{R}^N)$ è incluso in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Osserviamo comunque che $C_b^1(\mathbb{R}^N)$ non è denso in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ (vd Esercizio 4.1.18).

Se viene meno l'ipotesi di convessità di Ω, il risultato precedente è falso in generale, come mostrano i due controesempi seguenti.

Esempio 4.1.8 Sia Ω un quadrato aperto privato di un segmento, per esempio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1;\ y \notin \left]\frac{1}{2}, 1\right[\text{ se } x = \frac{1}{2}\right\}.$$

Prendiamo una funzione u che sia limitata insieme alle derivate parziali prime in Ω e che valga identicamente 0 e 1 da parti opposte rispetto al segmento mancante. In tal modo u non è in $C^{0,\alpha}$ per alcun α: su due punti arbitrariamente vicini in Ω ma separati dal segmento mancante, la differenza dei valori di u è costantemente uguale a 1.

Esempio 4.1.9 Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1,\ y < 2|x|^{\frac{1}{2}}\}$ e u la funzione così definita

$$u(x,y) = \begin{cases} (sign\, x) y^\beta & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

con $1 < \beta < 2$.

Chiaramente $u \in C^1_b(\Omega)$. Presi per $x > 0$ punti del tipo $(x, |x|^{\frac{1}{2}})$ e $(-x, |x|^{\frac{1}{2}})$ a distanza $2x$, risulta

$$u(x, |x|^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{\beta}{2}}, \quad u(-x, |x|^{\frac{1}{2}}) = -x^{\frac{\beta}{2}}.$$

Se $\frac{\beta}{2} < \alpha$ allora u non è α-hölderiana in Ω, pur essendo in $C^1_b(\Omega)$.

In entrambi i controesempi appena mostrati, l'inclusione di $C^1_b(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ fallisce perchè la distanza euclidea utilizzata nella definizione di $C^{0,\alpha}(\Omega)$ non tiene conto della geometria dell'aperto considerato. Per questo è opportuno introdurre la nozione di distanza geodetica.

Definizione 4.1.10 *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e siano $x, y \in \Omega$. Definiamo* **distanza geodetica** *tra x e y in Ω la quantità*

$$d_\Omega(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ curva } C^1 \text{ a tratti congiungente } x \text{ e } y \text{ in } \Omega\},$$

essendo $l(\gamma)$ la lunghezza di γ.

Naturalmente $d_\Omega(x,y) \geq |x-y|$. Se Ω è convesso allora d_Ω coincide con la distanza euclidea.

Definizione 4.1.11 *Ω si dice* **di tipo** *α, con $0 < \alpha \leq 1$, se esiste $M > 0$ tale che*

$$d_\Omega(x,y) \leq M|x-y|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Ω si dice **regolare** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_\Omega(x,y) \leq \varepsilon$ per ogni $x, y \in \Omega$ con $|x-y| < \delta$.*

Chiaramente se Ω è di tipo α per qualche α allora è regolare. Inoltre si dimostra che se $\partial\Omega$ è lipschitziano allora Ω è di tipo 1.

L'interesse verso questi aperti è giustificato dalla seguente proposizione che indebolisce l'ipotesi di convessità della Proposizione 4.1.7.

Proposizione 4.1.12 *(a) Se Ω è di tipo α, con $0 < \alpha \le 1$, allora $C^1_b(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

(b) Se Ω è regolare allora $C^1_b(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, dove $BUC(\Omega)$ indica la classe delle funzioni limitate e uniformemente continue in Ω.

DIM. (a) Siano $u \in C^1_b(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Siano $x, y \in \Omega$ e γ una curva C^1 a tratti contenuta in Ω tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $l(\gamma) \le d_\Omega(x, y) + \varepsilon$. Posto $v(t) := u(\gamma(t))$, risulta

$$u(y) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 \nabla u(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt,$$

da cui

$$|u(y) - u(x)| \le \|\nabla u\|_\infty \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|dt = \|\nabla u\|_\infty l(\gamma) \le \|\nabla u\|_\infty (d_\Omega(x, y) + \varepsilon).$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ e usando che Ω è di tipo α otteniamo che $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Per la seconda parte di (a) basta applicare quanto appena provato alle derivate di ordine $k-1$ di un'arbitraria funzione di $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

(b) Si procede esattamente come in (a). □

Spesso è utile saper prolungare una funzione $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ ad una funzione $\tilde{u} \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ al fine di trasferire a u delle proprietà valide in $\mathbb{R}^N$. Naturalmente quest'estensione non si può costruire sempre, ma è possibile per aperti sufficientemente regolari.

Ricordando la Definizione 1.0.1, un aperto Ω è di classe $C^{k,\alpha}$ se le trasformazioni H, J sono di classe $C^{k,\alpha}$ nei rispettivi domini.

Teorema 4.1.13 *Sia Ω un aperto limitato con bordo $\partial\Omega$ di classe $C^{k,\alpha}$. Allora esiste*

$$E : C^{k,\alpha}(\Omega) \to C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

operatore lineare tale che per ogni $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ risulta

(1) $Eu = u$ in Ω,

(2) $\|Eu\|_{C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \le K \|u\|_{C^{r,\alpha}(\Omega)}$ per ogni $r \le k$.

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato generale mentre sottoliniamo con il seguente corollario ciò che sarà utile per i nostri interessi.

Corollario 4.1.14 *Se Ω è un aperto limitato con bordo di classe $C^{k,\alpha}$ allora $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ per ogni $0 < \alpha \leq 1$.*

DIM. Se $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ allora $Eu \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Siccome $\mathbb{R}^N$ è convesso, per la Proposizione 4.1.7 si ha $Eu \in C^{k-1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. In particolare $u = Eu|_\Omega \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$. □

Esercizio 4.1.15 Provare che la funzione $f(x) = |x|^\alpha$, con $0 < \alpha \leq 1$, è α-hölderiana.

Esercizio 4.1.16 Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e $\alpha > 1$. Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora u è costante (basta provare che esiste ∇u e che $\nabla u \equiv 0$).

Esercizio 4.1.17 Provare che $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\infty + [\cdot]_\alpha$ è una norma in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e che lo spazio $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_\alpha)$ è completo.

Esercizio 4.1.18 Provare che

$$\overline{C_b^1(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}} = \left\{ u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \ : \ \lim_{\delta \to 0} \sup_{0<|x-y|<\delta} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \right\}$$

(Suggerimento: usare convoluzioni).

Esercizio 4.1.19 Sia $(u_n) \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\|u_n\|_\alpha \leq C$. Provare che esiste (u_{n_k}) sottosuccessione di (u_n) convergente uniformemente sui compatti ad una funzione $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\|u\|_\alpha \leq C$.

4.2 ALCUNE DISUGUAGLIANZE INTERPOLATIVE

Definizione 4.2.1 *Siano X, Y e Z spazi di Banach tali che $Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$. Scriveremo che $Y \in J_\theta(X, Z)$, con $0 \leq \theta \leq 1$, se esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\|z\|_Y \leq c\, \|z\|_X^{1-\theta} \|z\|_Z^\theta \qquad z \in Z. \tag{4.1}$$

Osserviamo che la stima (4.1) implica per ogni $\eta > 0$ esiste $c_\eta > 0$ tale che

$$\|z\|_Y \leq \eta \|z\|_Z + c_\eta \|z\|_X. \tag{4.2}$$

Infatti, per la disuguaglianza di Young risulta per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|z\|_Y \leq c\, (\|z\|_X^{1-\theta}\, \varepsilon^{-1})(\|z\|_Z^\theta\, \varepsilon) \leq c \left(\theta\, \|z\|_Z \varepsilon^{\frac{1}{\theta}} + (1-\theta) \|z\|_X \varepsilon^{\frac{1}{\theta - 1}} \right),$$

che è la (4.2). Da notare che si può scegliere in modo arbitrario di rendere piccolo il contributo di $\|z\|_X$ o di $\|z\|_Z$ (dipende da ciò che si riesce a controllare meglio).

Viceversa, a partire da (4.2) si può ottenere (4.1) conoscendo la dipendenza di c_η da η. Basta infatti minimizzare rispetto a η la quantità a secondo membro di (4.2).

In questo linguaggio la stima (a) della Proposizione 1.2.1 del primo capitolo dicono che $H^1(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{2}}(L^2(\mathbb{R}^N), H^2(\mathbb{R}^N))$.

Esempio 4.2.2 Sia Ω un aperto di misura finita e siano $r \le p \le q$. Allora è noto che $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Sia ora $\theta \in [0,1]$ tale che $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r}$. Per la disuguaglianza di Hölder si ha che

$$\|f\|_p \le \|f\|_q^{1-\theta}\|f\|_r^{\theta} \qquad \forall f \in L^q(\Omega)$$

cioè $L^p(\Omega) \in J_{1-\theta}(L^r(\Omega), L^q(\Omega))$.

Se $\beta \in \mathbb{R}^+$ scriviamo $\beta = k + \alpha$, dove $k = [\beta] \in \mathbb{N}$ è la parte intera di β. Definiamo quindi

$$C^\beta(\Omega) := C^{k,\alpha}(\Omega),$$

se $\alpha > 0$ e

$$C^\beta(\Omega) = C_b^k(\Omega)$$

se $\alpha = 0$.

Enunciamo a questo punto il teorema più importante di questa sezione.

Teorema 4.2.3 *Siano α, β e γ numeri reali tali che $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma$. Allora*

$$C^\beta(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\left(C^\alpha(\mathbb{R}^N), C^\gamma(\mathbb{R}^N)\right). \tag{4.3}$$

DIM. Dimostriamo il teorema solo in alcuni casi particolari (che sono poi quelli che useremo più spesso).

(a) $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_\alpha(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^1(\mathbb{R}^N))$, $0 < \alpha < 1$.

Occorre provare che $\|u\|_\alpha \le c\|u\|_0^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$, per ogni $u \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$ con $\|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty$. Stimiamo separatamente $\|u\|_\infty$ e $[u]_\alpha$.

Siccome $\|u\|_\infty \le \|u\|_1$ segue subito che $\|u\|_\infty \le \|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$. Inoltre valgono

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \|\nabla u\|_\infty |x-y|^{1-\alpha},$$

e

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le 2\|u\|_\infty |x-y|^{-\alpha}.$$

Usando entrambe queste disuguaglianze abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \left[\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right]^\alpha \left[\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right]^{1-\alpha} \\ &\le \|\nabla u\|_\infty^\alpha |x-y|^{\alpha(1-\alpha)}(2\|u\|_\infty)^{1-\alpha}|x-y|^{-\alpha(1-\alpha)} \end{aligned}$$

da cui segue che $[u]_\alpha \le 2^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|\nabla u\|_\infty^\alpha \le 2^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$.

(b) $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_\alpha(C_b^1(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Basta applicare (a) alle derivate parziali prime.

(c) $C_b^1(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Applicando la formula di Taylor, possiamo scrivere

$$u(x+th) = u(x) + \nabla u(x)\cdot th + \frac{1}{2}t^2(D^2u(\xi)h,h) \qquad |h|\le 1,\ t\in[0,1]$$

da cui segue

$$\nabla u(x)\cdot h = \frac{u(x+th)-u(x)}{t} + \frac{t}{2}(D^2u(\xi)h,h).$$

Prendendo l'estremo superiore su tutti i vettori h tali che $|h|\le 1$ si ha

$$\|\nabla u\|_\infty \le \frac{2}{t}\|u\|_\infty + \frac{t}{2}\|D^2u\|_\infty.$$

La tesi segue ora minimizzando il secondo membro dell'ultima disuguaglianza rispetto a t.

(d) $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1+\alpha}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
E' sufficiente applicare i primi due casi dimostrati:

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c\,\|u\|_2^\alpha\|u\|_1^{1-\alpha} \le c_1\|u\|_2^\alpha\|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{1-\alpha}{2}} = c_1\|u\|_2^{\frac{1+\alpha}{2}}\|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

(e) $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{\alpha}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Applicando il primo caso e poi il terzo al termine $\|u\|_1^\alpha$ si ha

$$\|u\|_\alpha \le c\,\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha \le c_1\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{\frac{\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{\alpha}{2}} = c_1\|u\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{\alpha}{2}}.$$

(f) $C_b^2(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{1+\alpha}}(C_b^1(\mathbb{R}^N), C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Ricorriamo di nuovo allo sviluppo di Taylor e scriviamo

$$\begin{aligned} u(x+th)-u(x) &= th\cdot\nabla u(x) + \frac{1}{2}t^2[(D^2u(\xi)h,h) + (D^2u(x)h,h) \\ &\quad -(D^2u(x)h,h)] \end{aligned}$$

con $|h|\le 1$ e $t\in[0,1]$. Quindi

$$(D^2u(x)h,h) = 2\frac{u(x+th)-u(x)}{t^2} - \frac{2}{t}h\cdot\nabla u(x) + ((D^2u(x)-D^2u(\xi))h,h).$$

Applicando il teorema di Lagrange si ha

$$(D^2u(x)h,h) = 2\frac{\nabla u(\eta)\cdot h}{t} - \frac{2}{t}h\cdot\nabla u(x) + (D^2u(x)-D^2u(\xi)h,h),$$

per qualche η tra x e $x+th$. Allora

$$|(D^2u(x)h,h)| \le \frac{4}{t}\|\nabla u\|_\infty + [D^2u]_\alpha t^\alpha,$$

avendo tenuto conto che $|x-\xi|<t$. Prendendo l'estremo superiore su tutti gli h con $|h|\le 1$ si ha in definitiva

$$\|D^2u\|_\infty \le \frac{4}{t}\|\nabla u\|_\infty + [D^2u]_\alpha t^\alpha.$$

Minimizzando t si ottiene la tesi. □

Corollario 4.2.4 *Sia Ω aperto limitato di classe C^γ. Allora*

$$C^\beta(\Omega) \in J_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\left(C^\alpha(\Omega), C^\gamma(\Omega)\right) \tag{4.4}$$

con $0\le\alpha\le\beta\le\gamma$.

DIM. Data la regolarità di Ω esiste E operatore di estensione tale che $\|Eu\|_{C^r(\mathbb{R}^N)} \le K\,\|u\|_{C^r(\Omega)}$ per ogni $r\le\gamma$. Per ogni $u\in C^\gamma(\overline{\Omega})$ si ha dunque

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^\beta(\Omega)} &= \|Eu\|_{C^\beta(\Omega)} \le \|Eu\|_{C^\beta(\mathbb{R}^N)} \le c\,\|Eu\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\|Eu\|_{C^\gamma(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\\ &\le c\,K\|u\|_{C^\alpha(\Omega)}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\|u\|_{C^\gamma(\Omega)}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\end{aligned}$$

grazie al teorema precedente. □

Corollario 4.2.5 *Sia Ω un aperto di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $c_\varepsilon>0$ tale che*

$$\|u\|_\alpha, \|u\|_{1,\alpha}, \|u\|_2 \le \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty \qquad \forall\, u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$$

(dove la dipendenza di c_ε da ε cambia per le varie norme che compaiono nel primo membro della disuguaglianza precedente). In particolare se $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ allora $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ e $\|\cdot\|_\infty + [D^2\cdot]_\alpha$ sono norme equivalenti.

DIM. Ricordiamo che per definizione $\|u\|_{2,\alpha} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha$. Per il corollario precedente $C^\beta(\Omega) \in J_{\frac{\beta-a}{\gamma-a}}\left(C^a(\Omega), C^\gamma(\Omega)\right)$. Se prendiamo $\gamma=2+\alpha$ e $a=0$ per ogni $0\le\beta\le 2+\alpha$ otteniamo che $C^\beta(\Omega)\in J_{\frac{\beta}{2+\alpha}}\big(C_b(\Omega), C^{2+\alpha}(\Omega)\big)$. In particolare per $\beta=\alpha$, $\beta=1+\alpha$, $\beta=2$ si ottiene la prima parte dell'enunciato.

Usando poi le stime corrispondenti ai casi $\beta=1$, $\beta=2$, possiamo scrivere per ogni $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha} &= \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha\\ &\le \|u\|_\infty + [D^2u]_\alpha + \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty.\end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon=\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \le \widetilde{c}\,(\|u\|_\infty + [D^2u]_\alpha)$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Esercizio 4.2.6 Provare che $C^1_b(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{1+\alpha}}(C_b(\mathbb{R}^N), C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N))$.

4.3 Caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane.

Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Omega$ e $\varrho > 0$. Poniamo $\Omega(x_0, \varrho) = \Omega \cap B_\varrho(x_0)$. Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, si vede facilmente che

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq \omega_N [u]^2_\alpha \varrho^{N+2\alpha}, \tag{4.5}$$

dove ω_N è la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. La stima ottenuta è significativa per $\varrho \to 0$, poichè dà esplicitamente l'andamento dell'integrale a primo membro.

Se indeboliamo le ipotesi su u e richiediamo soltanto che u sia limitata, allora l'unica stima possibile è

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq 4\|u\|^2_\infty \omega_N \varrho^N.$$

Assumendo u uniformemente continua invece

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq \omega^2(u, \varrho)\omega_N \varrho^N$$

dove $\omega(u, \varrho) \to 0$ se $\varrho \to 0$.

E' chiaro quindi che la convergenza a zero della quantità integrale considerata è tanto più veloce quanto più è regolare la funzione u. Se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, evidentemente non ha senso fare valutazioni puntuali. In questo caso, sostituiamo $u(x_0)$ con la media integrale di u su $\Omega(x_0, \varrho)$. Definiamo

$$u_{x_0,\varrho} := \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} u(y)dy \tag{4.6}$$

dove $|\Omega(x_0, \varrho)|$ denota la misura di Lebesgue dell'insieme $\Omega(x_0, \varrho)$. Proviamo che se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora una stima come (4.5) continua a valere sostituendo $u(x_0)$ con $u_{x_0,\varrho}$. Infatti

$$u(x_0) - u_{x_0,\varrho} = \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} (u(x_0) - u(y))dy$$

da cui segue che

$$|u(x_0) - u_{x_0,\varrho}| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(y) - u(x_0)|dy \leq [u]_\alpha \varrho^\alpha.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare e la stima appena ricavata abbiamo

$$|u(x)-u_{x_0,\varrho}| \le |u(x)-u(x_0)|+|u(x_0)-u_{x_0,\varrho}| \le 2[u]_\alpha \varrho^\alpha \qquad \text{se } |x-x_0| \le \varrho.$$

Elevando al quadrato e integrando su $\Omega(x_0,\varrho)$ otteniamo infine

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho})|^2 dx \le 4[u]_\alpha^2 \omega_N \varrho^{N+2\alpha}, \qquad \forall \varrho > 0. \tag{4.7}$$

E' interessante far vedere che vale anche il viceversa, per cui (4.7) caratterizza completamente le funzioni hölderiane.

Definizione 4.3.1 *Fissiamo $\lambda > 0$. Se $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, definiamo la seminorma*

$$|u|_\lambda^2 := \sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ \varrho>0}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho}|^2 dx. \tag{4.8}$$

Chiamiamo **spazi di Campanato** *gli spazi*

$$L^{2,\lambda}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : |u|_\lambda < +\infty\}.$$

Ogni $L^{2,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di Banach se munito della norma $\|\cdot\|_\lambda^2 = \|\cdot\|_2^2 + |\cdot|_\lambda^2$.

Richiedendo che $\sup_{x_0\in\Omega,\varrho>0} \frac{1}{\varrho^\lambda}\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)|^2 < +\infty$ si ottengono i cosiddetti spazi di Morrey.

E' utile per il seguito introdurre delle varianti della seminorma appena introdotta e di quella hölderiana. Precisamente, fissiamo $R_0 > 0$ e poniamo

$$|u|_{\lambda,R_0}^2 := \sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ 0<\varrho\le R_0}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho}|^2 dx \tag{4.9}$$

e

$$[u]_{\alpha,R_0} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ 0<|x-y|\le R_0}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha}. \tag{4.10}$$

Per avere la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane richiediamo una proprietà di regolarità all'aperto Ω.

Definizione 4.3.2 *Diciamo che Ω è* **di tipo (A)** *se esiste $A > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \Omega$ e $\varrho > 0$ risulta*

$$|\Omega(x_0,\varrho)| \ge A\varrho^N.$$

Notiamo che tale proprietà è significativa quando x_0 è vicino a $\partial\Omega$. Se $\partial\Omega$ è un bordo piatto allora $|\Omega(x_0,\varrho)| \geq \frac{1}{2}|B_\varrho(x_0)| = \frac{1}{2}\omega_N\varrho^N$. Si può provare che se $\partial\Omega$ è lipschitziano allora Ω è di tipo (A).

Se $\varrho > 0$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, poniamo

$$(V_\varrho u)(x) := \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} u(y)dy \tag{4.11}$$

Proposizione 4.3.3 *Siano Ω di tipo (A) e supponiamo $1 \leq p < \infty$. Valgono allora le seguenti affermazioni*

(1) $V_\varrho : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad \|V_\varrho\| \leq \left(\frac{\omega_N}{A}\right)^{\frac{1}{p}}$*;*

(2) $\lim\limits_{\varrho\to 0} V_\varrho u = u$ in $L^p(\Omega)$*;*

(3) $V_\varrho u \in C(\Omega)$*, per ogni* $u \in L^p(\Omega)$*.*

DIM. (1) Sia $u \in L^p(\Omega)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo

$$|(V_\varrho u)(x)|^p \leq \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} |u(y)|^p dy.$$

Integrando su Ω e usando il Teorema di Fubini risulta

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(V_\varrho u)(x)|^p dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} |u(y)|^p dy\, dx \\
&= \int_\Omega |u(y)|^p \int_{\Omega(y,\varrho)} \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|} dx\, dy \\
&\leq \int_\Omega \frac{|u(y)|^p \omega_N \varrho^N}{A\varrho^N} dy \\
&= \frac{\omega_N}{A}\int_\Omega |u(y)|^p dy = \frac{\omega_N}{A}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

(2) Se $u \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $V_\varrho u$ converge a u per $\varrho \to 0$ in $L^p(\Omega)$. In generale se $u \in L^p(\Omega)$, basta argomentare per densità, notando che grazie a (1), la famiglia di operatori $(V_\varrho)_\varrho$ è equilimitata in norma.

(3) Per provare che $V_\varrho u$ è una funzione continua in Ω, basta provare che le funzioni $f(x) = |\Omega(x,\varrho)|$ e $g(x) = \int_{\Omega(x,\varrho)} u(y)dy$ sono entrambe continue. Infatti

$$\big||\Omega(x,\varrho)| - |\Omega(y,\varrho)|\big| \leq \big|\Omega(x,\varrho) \triangle \Omega(y,\varrho)\big| \leq \big|B_\varrho(x) \triangle B_\varrho(y)\big|,$$

da cui mandando $y \to x$ si ha la continuità di $f(x)$ (per convergenza dominata).

Inoltre

$$\left| \int_{\Omega(x,\varrho)} u(z)dz - \int_{\Omega(y,\varrho)} u(z)dz \right| \leq \int_{\Omega(x,\varrho)\triangle\Omega(y,\varrho)} |u(z)|dz.$$

Siccome $|\Omega(x,\varrho) \triangle \Omega(y,\varrho)| \to 0$ per $y \to x$, per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue il secondo membro della disuguaglianza precedente tende a 0 per $y \to x$. Da qui la continuità della funzione $g(x)$ e quindi la tesi. $\square$

Veniamo ora al teorema più importante di questa sezione.

Teorema 4.3.4 *Siano Ω un aperto di tipo (A) e $N < \lambda \leq N+2$. Allora esiste $c = c(\lambda, A) > 0$ tale che per ogni $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ esiste $v \in C(\Omega)$ con $v = u$ q.o. e*

$$[v]_{\alpha,\frac{R_0}{2}} \leq c(\lambda, A)|v|_{\lambda,R_0} \qquad \forall R_0 > 0 \tag{4.12}$$

dove $\alpha = \frac{\lambda-N}{2}$. Inoltre, se Ω è limitato gli spazi $L^{2,\lambda}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\Omega)$ sono isomorfi.

DIM. Sia $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e fissiamo $r \leq R \leq R_0$. Allora, se $z \in \Omega$, si ha

$$|u_{x,R} - u_{x,r}| \leq |u_{x,R} - u(z)| + |u(z) - u_{x,r}|.$$

Elevando al quadrato la disuguaglianza precedente e tenendo conto del fatto che $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ segue che

$$|u_{x,R} - u_{x,r}|^2 \leq 2|u_{x,R} - u(z)|^2 + 2|u(z) - u_{x,r}|^2.$$

Integrando in $z \in \Omega(x,r)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} |\Omega(x,r)||u_{x,R} - u_{x,r}|^2 &\leq 2\left(\int_{\Omega(x,R)} |u_{x,R} - u(z)|^2 dz \right. \\ &\qquad \left. + \int_{\Omega(x,r)} |u(z) - u_{x,r}|^2 dz\right) \\ &\leq 2\left(|u|^2_{\lambda,R_0} R^\lambda + |u|^2_{\lambda,R_0} r^\lambda\right) \leq 4R^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}. \end{aligned}$$

Ora, poichè Ω è per ipotesi di tipo (A) possiamo stimare $|\Omega(x,r)|$ e avere

$$|u_{x,R} - u_{x,r}|^2 \leq \frac{4R^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}}{Ar^N} \leq \left(\frac{4}{A}\right) R^\lambda\, r^{-N}\, |u|^2_{\lambda,R_0}. \tag{4.13}$$

Posto $R_i = R2^{-i}$, da (4.13) discende che

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}}|^2 \leq \frac{4}{A} R_i^\lambda R_{i+1}^{-N}\, |u|^2_{\lambda,R_0} = 2^N \frac{4}{A} R^{\lambda-N} 2^{-i(\lambda-N)}\, |u|^2_{\lambda,R_0}$$

da cui, ponendo $c(A)^2 = 2^N 4/A$

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}}| \leq c(A)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}. \tag{4.14}$$

A questo punto, osserviamo che grazie alla scelta di λ la serie $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}$ è convergente. Pertanto la serie di funzioni

$$\sum_{i=0}^{\infty} (u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}})$$

converge totalmente in Ω e quindi anche uniformemente. Siccome si tratta di una serie telescopica, otteniamo che la successione $(u_{x,R_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in Ω per $i \to \infty$ ad una certa v_R. Siccome $u_{x,R_i} = (V_{R_i}u)(x)$ è continua per il punto (3) della Proposizione 4.3.3, anche v_R è continua Ω. Inoltre per il punto (2) della stessa proposizione, u_{x,R_i} ha un'estratta che converge q.o. a u. Per unicità del limite deve essere $u = v_R$. Infine osserviamo che la funzione limite non dipende da R: se $R_1 \neq R_2$ allora in ogni caso $v_{R_1} = u$ e $v_{R_2} = u$ q.o. Ma, essendo v_{R_i} continue, necessariamente $v_{R_1} \equiv v_{R_2}$. Poniamo allora $v = v_R$.

Sommando (4.14) segue che per ogni $i, p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+p}}| \leq c(A,\lambda)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}$$

dove $c(A,\lambda)$ contiene la somma della serie $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}$.

Prendendo $i = 0$ e mandando $p \to \infty$ otteniamo

$$|u_{x,R} - v(x)| \leq C(A,\lambda)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}, \tag{4.15}$$

per ogni $R \leq R_0$ e $x \in \Omega$.

Adesso prendiamo $x, y \in \Omega$ a distanza $|x-y| \leq \frac{R_0}{2}$ e sia $R = |x-y|$. Siccome per ogni $z \in \Omega$ risulta

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq 2|u_{x,2R} - u(z)|^2 + 2|u(z) - u_{y,2R}|^2$$

integrando su $\Omega(x,2R) \cap \Omega(y,2R) \supseteq \Omega(x,R) \cup \Omega(y,R)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
|\Omega(x,2R) \cap \Omega(y,2R)||u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 &\leq 2\int_{\Omega(x,2R)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz + \\
&\quad\; 2\int_{\Omega(y,2R)} |u(z) - u_{y,2R}|^2 \\
&\leq 4(2R)^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}.
\end{aligned}$$

Sfruttando l'ipotesi che Ω è di tipo (A) segue che

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq \frac{42^\lambda}{A} \frac{R^\lambda}{R^N} |u|^2_{\lambda,R_0} \leq c_1(\lambda,A)|u|^2_{\lambda,R_0} R^{\lambda-N}.$$

Pertanto

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq c_1(\lambda, A)|u|_{\lambda,R_0}|x-y|^{\frac{\lambda-N}{2}}, \qquad |x-y| \leq \frac{R_0}{2}. \tag{4.16}$$

Per concludere teniamo conto delle stime (4.15) e (4.16) per ottenere per $|x-y| \leq \frac{R_0}{2}$ e con $R = |x-y|$

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &\leq |v(x) - u_{x,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| + |u_{y,2R} - v(y)| \\ &\leq C(A,\lambda)|u|_{\lambda,R_0}(|x-y|^{\frac{\lambda-N}{2}}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Abbiamo in definitiva provato che

$$[v]_{\alpha,\frac{R_0}{2}} \leq C(\lambda, A)|u|_{\lambda,R_0} = C(\lambda, A)|v|_{\lambda,R_0} \tag{4.18}$$

con $\alpha = \frac{\lambda-N}{2}$.

Per completare l'isomorfismo degli spazi $L^{2,\lambda}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\Omega)$, con $\lambda = \alpha + 2N$ e Ω limitato, osserviamo che $|u|_\lambda \leq C(N)[u]_\alpha$ (segue da (4.7)) e $\|u\|_{L^2} \leq |\Omega|^{1/2}\,\|u\|_\infty$ per cui $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{2,\lambda}(\Omega)$. Viceversa, se $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e v è come nell'enunciato, allora preso $y \in \Omega$ tale che $v(y) = v_\Omega$ con v_Ω media integrale di v in Ω, applichiamo (4.17) e deduciamo che

$$|v(x)| \leq |v_\Omega| + c(\lambda, A)(\mathrm{diam}\Omega)^\alpha |v|_\lambda \leq |\Omega|^{-1/2}\|v\|_{L^2} + c(\lambda, A)(\mathrm{diam}\Omega)^\alpha|v|_\lambda,$$

che insieme a (4.18) dà l'altra inclusione. $\square$

4.4 Richiami sugli spazi di Sobolev

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1. E' noto che

$$\begin{aligned} p < N &\quad\Rightarrow\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega), \\ p = N &\quad\Rightarrow\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q < +\infty, \\ p > N &\quad\Rightarrow\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Poichè Ω è limitato l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Ciò consente di provare la seguente disuguaglianza di Poincarè.

Proposizione 4.4.1 *Siano Ω aperto limitato connesso di $\mathbb{R}^N$ con bordo di classe C^1 e $p \in [1, +\infty]$. Allora esiste una costante $c = c(\Omega, N, p) > 0$ tale che*

$$\left(\int_\Omega |u - u_\Omega|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.19}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.

DIM. Per assurdo supponiamo che esista una successione $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ con $(u_n)_\Omega = 0$ (ciò è sempre possibile a meno di considerare $v_n = u_n - (u_n)_\Omega$) tale che per ogni n

$$\int_\Omega |u_n|^p \geq n \int_\Omega |\nabla u_n|^p.$$

Non è restrittivo assumere che $\|u_n\|_p = 1$. Segue che

$$\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |u_n|^p + \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Allora (u_n) è una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ che è immerso con compattezza in $L^p(\Omega)$. Pertanto esiste una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ che converge a u in $L^p(\Omega)$, per qualche $u \in L^p(\Omega)$. Naturalmente u è ancora a media nulla e $\|u\|_p = 1$. Siccome $\|\nabla u_{n_k}\|_p^p \leq \frac{1}{n_k}$ si ha complessivamente che $u_{n_k} \to u$ e $\nabla u_{n_k} \to 0$ in $L^p(\Omega)$. Segue che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u = 0$. Poichè Ω è connesso questo implica che u è costante. Ma u ha media nulla, quindi $u \equiv 0$ in Ω, mentre $\|u\|_p = 1$. □

La dipendenza della costante della stima (4.19) dall'aperto Ω non è esplicita. Se però Ω è una palla allora è possibile stabilire come tale costante dipenda dal raggio.

Proposizione 4.4.2 *Se c_R è la costante in $\Omega = B_R$ della Proposizione 4.4.1 allora $c_R = R\,c_1$.*

DIM. Se $u \in H^1(B_R)$ definiamo

$$v(x) = u(Rx) \qquad |x| < 1.$$

Allora $v \in H^1(B_1)$. Osserviamo inoltre che

$$u_R = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(x)dx = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} v\left(\frac{x}{R}\right) dx = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} v(y)dy = v_1.$$

Dalla Proposizione 4.4.1 si ha

$$\int_{B_1} |v(x) - v_1|^2 dx \leq c_1^2 \int_{B_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

e quindi, poichè $\nabla v(x) = R\nabla u(Rx)$ e $v_1 = u_R$

$$\int_{B_1} |u(Rx) - u_R|^2 dx \leq c_1^2 \int_{B_1} R^2 |\nabla u(Rx)|^2 dx.$$

Cambiando nuovamente variabile troviamo pertanto

$$\int_{B_R} |u(y) - u_R|^2 dy \leq c_1^2 R^2 \int_{B_R} |\nabla u(y)|^2 dy.$$

□

Osservazione 4.4.3 In analogia al caso $p = 2$ possiamo definire la seminorma

$$|u|^p_{\lambda,p} := \sup_{\substack{\varrho>0 \\ x_0\in\Omega}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{x_0,\varrho}|^p dx \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Con la stessa tecnica si può provare che se $N < \lambda \leq N+p$ e $\alpha = \frac{\lambda - N}{p}$ allora $[\cdot]_\alpha$ e $|\cdot|_{\lambda,p}$ sono equivalenti. Tale generalizzazione è interessante perchè permette di dimostrare in modo semplice il seguente teorema.

Teorema 4.4.4 *Se $p > N$ allora*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

DIM. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, applicando la disuguaglianza di Poincarè abbiamo che

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{x_0,\varrho}|^p \quad \leq \quad c_1^p \varrho^p \int_{B_\varrho(x_0)} |\nabla u|^p \leq c_1^p \varrho^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{\varrho^p} \int_{B_\varrho(x_0)} |u - u_{x_0,\varrho}|^p \leq c_1^p \|\nabla u\|_p^p.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di $\varrho > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ otteniamo

$$|u|_{p,p} \leq c_1 \|\nabla u\|_p < +\infty.$$

Per l'equivalenza di $[\cdot]_\alpha$ e $|\cdot|_{p,p}$ con $\alpha = \frac{p-N}{p}$ segue che $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Esercizio 4.4.5 Provare l'Osservazione 4.4.3.

CAPITOLO 5

STIME DI SCHAUDER PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET

5.1 ORIENTAMENTO

D'ora in poi indicheremo con A l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu(x) + c(x)u(x), \qquad x \in \Omega$$

con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ per $\alpha \in (0,1)$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2, \qquad x \in \Omega,\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

con $\nu_0 > 0$. Indichiamo con $k_0 = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha\}$.

Il motivo per cui escludiamo il caso $\alpha = 1$ si può spiegare intuitivamente se si tiene conto che la norma di $C^1(\overline{\Omega})$ è sostanzialmente la norma uniforme per le derivate prime.

I punti cruciali nella risoluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

sono rappresentati dai seguenti teoremi.

Teorema 5.1.1 (Stime di Schauder) *Sia Ω aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$. Allora esiste una costante $C = C(\nu_0, k_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $u_{|\partial\Omega} = 0$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C\,\|Au\|_\alpha. \tag{5.2}$$

Teorema 5.1.2 (Problema di Dirichlet per il Δ) *Sia Ω aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste (unica) $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Riguardo al Teorema 5.1.1, osserviamo che senza restrizioni sul segno di c si può provare una stima del tipo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C \left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_\infty \right).$$

Insieme questi risultati permettono di risolvere il problema di Dirichlet per un operatore qualunque. Ciò è possibile grazie al metodo di continuità provato di seguito.

Teorema 5.1.3 (Metodo di continuità) *Siano X, Y spazi di Banach, L_0 ed L_1 operatori lineari e continui da X in Y. Consideriamo gli operatori lineari*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \qquad t \in [0,1],$$

e supponiamo che esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|L_t x\|_Y \geq C \|x\|_X, \quad x \in X,\ t \in [0,1]. \tag{5.3}$$

Se L_0 è suriettivo allora anche L_1 è suriettivo (e quindi bigettivo per la stima (5.3)).

DIM. Osserviamo che la stima (5.3) implica che ogni L_t è iniettivo.

Sia $E = \{t \in [0,1] : L_t \text{ è bigettivo}\}$. Per ipotesi $0 \in E$, per cui $E \neq \emptyset$. Se $t_0 \in E$ allora L_{t_0} è bigettivo, e per (5.3), $\|L_{t_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$.

Inoltre $L_t = L_{t_0}\left(I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\right)$. Segue allora che L_t è invertibile se e solo se $I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)$ è invertibile. Ciò è assicurato se $\|(t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\| < 1$ e per questo è sufficiente che $|t-t_0| < \frac{C}{\|L_1\|+\|L_0\|}$. Posto $\delta = \frac{C}{2(\|L_1\|+\|L_0)}$ e preso $t_0 = 0 \in E$, per quanto provato si ha che $[0,\delta] \subset E$. Ripartendo da δ e ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene che $[\delta, 2\delta] \subset E$, e così via. Dopo un numero finito di passi si avrà che $[0,1] \subset E$, quindi la tesi. □

Il teorema che segue sintetizza i risultati precedenti e risponde completamente al problema della risolubilità di (5.1).

Teorema 5.1.4 *Sia Ω limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Consideriamo gli spazi di Banach

$$X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\}, \quad Y = C^{0,\alpha}(\Omega)$$

(X con la norma indotta da $C^{2,\alpha}(\Omega)$) e gli operatori

$$\begin{aligned} L_0 &= \Delta : X \to Y \\ L_1 &= A : X \to Y \\ L_t &= (1-t)\Delta + tA \end{aligned}$$

I Teoremi 5.1.2 e 5.1.1 implicano rispettivamente che L_0 è invertibile e che vale la stima $\|u\|_X \leq C(\nu_t, k_t, \Omega)\, \|L_t u\|_Y$. Siccome $a_{ij}^t = (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij}$, $b_i^t = tb_i$ e $c^t = tc$, per ogni $t \in [0,1]$ risulta

$$\begin{aligned} &\|a_{ij}^t\|_\alpha \leq (1-t) + tk_0 \leq \max\{1, k_0\} \\ &\|b_i^t\|_\alpha \leq tk_0 \leq k_0 \\ &\|c_i^t\|_\alpha \leq tk_0 \leq k_0 \end{aligned}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^t(x)\xi_i\xi_j \geq (1-t)|\xi|^2 + \nu_0 t|\xi|^2 \geq \min\{1, \nu_0\}|\xi|^2.$$

Pertanto le costanti $C(\nu_t, k_t, \Omega)$ della stima si possono prendere indipendenti da t. E' lecito ora applicare il metodo di continuità per concludere la dimostrazione. $\square$

Il nostro obiettivo è dunque dimostrare i Teoremi 5.1.1 e 5.1.2.

Al fine di semplificare la notazione, se B_R denota una palla di raggio R, scriveremo u_R al posto di $u_{x_0,R}$, dove x_0 è il centro della palla, che risulta fissato, e $u_{x_0,R}$ è definito in (4.6).

5.2 Stime di Schauder per equazioni a coefficienti costanti

Consideriamo l'operatore a coefficienti costanti $A = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $|a_{ij}| \leq M_0$ e $\nu_0 > 0$ costante di ellitticità.

Teorema 5.2.1 (Disuguaglianza di Caccioppoli) *Sia B_R una palla aperta di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $u \in H^1(B_R)$ risolva l'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u = 0$$

in B_R. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$ si ha

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R} |u|^2 \tag{5.4}$$

DIM. Osserviamo innanzitutto che l'esistenza di una soluzione $H^1(B_R)$ dell'equazione considerata non è un'ipotesi restrittiva poichè è garantita dal teorema di Lax-Milgram. Infatti, essendo i coefficienti costanti, l'operatore può essere scritto in forma di divergenza. Inoltre il Corollario 2.2.14 assicura che tale soluzione è C^∞ all'interno di B_R, per cui l'equazione in particolare è soddisfatta puntualmente.

Per ogni $\phi \in H_0^1(B_R)$ si ha che

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0. \tag{5.5}$$

Fissato $r < R$, prendiamo $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ in B_r e $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{L}{R-r}$, per qualche $L > 0$. Scegliendo $\phi = \eta^2 u \in H_0^1(B_R)$ in (5.5) e tenendo conto dell'ellitticità dell'operatore, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j(\eta^2 u) = \int_{B_R} \eta^2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j u \\ &\quad +2\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta \\ &\geq \nu_0 \int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 + 2\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \nu_0 \int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2 &\leq -2\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, u\, D_i u D_j \eta \\ &\leq c(M_0) \int_{B_R} |\eta||\nabla u||u||\nabla \eta| \\ &\leq c(M_0) \left(\int_{B_R} |\eta|^2 |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u|^2 |\nabla \eta|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(M_0) \frac{L}{R-r} \left(\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\nu_0 \left(\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c(M_0) \frac{L}{R-r} \left(\int_{B_R} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Siccome $\eta \equiv 1$ in B_r si ha infine

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{B_r} \eta^2 |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{B_R} \eta^2 |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c(M_0)}{\nu_0} \frac{L}{R-r} \left(\int_{B_R} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Vediamo ora come è possibile iterare la disuguaglianza di Caccioppoli. Nelle ipotesi del teorema precedente siccome u è di classe C^∞ all'interno di B_R, l'uguaglianza $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$ vale puntualmente in B_R. Derivando l'equazione otteniamo che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(D_k u) = 0 \qquad \text{in } B_R$$

per ogni $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Applicando ora (5.4) prima a $D_k u$ e poi a u con una scelta opportuna dei raggi, abbiamo

$$\int_{B_r} |\nabla D_k u|^2 \leq \frac{c}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^2} \int_{B_{\frac{r+R}{2}}} |D_k u|^2 \leq \frac{c^2}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^4} \int_{B_R} |u|^2.$$

Poichè la disuguaglianza precedente vale per ogni derivata parziale prima di u possiamo scrivere

$$\int_{B_r} |D^2 u|^2 \leq \frac{c^2}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^4} \int_{B_R} |u|^2.$$

Se deriviamo l'equazione h volte e dividiamo l'intervallo (r, R) in h parti uguali di lunghezza $\frac{R-r}{h}$, applicando h volte la disuguaglianza di Caccioppoli otteniamo

$$\int_{B_r} |D^h u|^2 \leq \frac{c^h}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^{2h}} \int_{B_R} |u|^2.$$

Quindi vale che

$$\|u\|_{H^h(B_r)} \leq c(\nu_0, M_0, r, R, h) \|u\|_{L^2(B_R)}.$$

Se $h > \frac{N}{2}$, per le immersioni di Sobolev risulta che $H^k(B_r) \hookrightarrow L^\infty(B_r)$, pertanto

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} = \sup_{x \in B_r} |u(x)| \leq c(\nu_0, M_0, r, R)\, \|u\|_{L^2(B_R)}. \tag{5.6}$$

Osservazione 5.2.2 Se $|\Omega| < \infty$ e $u \in L^2(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega |u-\lambda|^2 \geq \int_\Omega |u-u_\Omega|^2, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

dove u_Ω è la media integrale di u in Ω. In particolare per $\lambda = 0$ si ha $\int_\Omega |u|^2 \geq \int_\Omega |u-u_\Omega|^2$. Infatti, basta scrivere

$$\int_\Omega |u-\lambda|^2 = \int_\Omega u^2 - 2\lambda \int_\Omega u + \lambda^2|\Omega| = f(\lambda)$$

e notare che la funzione f ammette minimo in $\lambda = u_\Omega$.

L'osservazione appena fatta e la disuguaglianza di Caccioppoli consentono di dimostrare il seguente lemma.

Lemma 5.2.3 *Supponiamo che $u \in H^1(B_R)$ sia soluzione di $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u = 0$ in B_R. Allora esistono costanti $c_2 = c_2(\nu_0, M_0) > 0$ e $c_3 = c_3(\nu_0, M_0) > 0$ tali che per ogni $r < R$ si ha*

(i) $\displaystyle\int_{B_r} |u|^2 \leq c_2 \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_R} |u|^2$*;*

(ii) $\displaystyle\int_{B_r} |u-u_r|^2 \leq c_3 \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u-\lambda|^2$ *per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (in particolare per $\lambda = u_r$).*

DIM. (i) Fissiamo dapprima $R = 1$. Se $r \leq \frac{1}{2}$ risulta

$$\int_{B_r} |u|^2 \leq \omega_N r^N \sup_{B_{\frac{1}{2}}} |u|^2 \leq c(\nu_0, M_0) r^N \int_{B_1} |u|^2,$$

avendo usato la stima (5.6) con $r = \frac{1}{2}$ ed $R = 1$. Se $1 > r \geq \frac{1}{2}$ allora $1 \leq 2r$ e quindi risulta

$$\int_{B_r} |u|^2 \leq 2^N r^N \int_{B_1} |u|^2.$$

Nel caso $R = 1$ basta allora prendere $c_2 = \max\{c(\nu_0, M_0), 2^N\}$.

Passiamo ora al caso generale. A meno di traslazioni possiamo supporre che il centro della palla sia $x_0 = 0$. Sia $v(x) = u(Rx)$, per $|x| < 1$. Vale allora che

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}v(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}R^2 D_{ij}u(Rx) = 0, \qquad |x| < 1,$$

cioè v soddisfa l'equazione in B_1. Applicando il caso provato alla funzione v otteniamo

$$\int_{B_{\frac{r}{R}}} |v|^2 \leq c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_1} |v|^2.$$

Ricambiando variabile otteniamo la disuguaglianza (i).

(ii) Dimostriamo dapprima il caso particolare $\lambda = 0$.

Sia $r \leq \frac{R}{2}$. Allora applicando nell'ordine la disuguaglianza di Poincarè, il punto (i) a ∇u con raggi r e $\frac{R}{2}$, e la disuguaglianza di Caccioppoli si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u-u_r|^2 &\leq c\,r^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2 \leq cr^2 c_2\, 2^N \left(\frac{r}{R}\right)^N \int_{B_{\frac{R}{2}}} |\nabla u|^2 \\
&= C(\nu_0, M_0) \frac{r^{N+2}}{R^N} \int_{B_{\frac{R}{2}}} |\nabla u|^2 \\
&\leq C(\nu_0, M_0) \frac{r^{N+2}}{R^N} \frac{1}{\left(R-\frac{R}{2}\right)^2} \int_{B_R} |u|^2 \\
&= c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u|^2.
\end{aligned}$$

Se $r \geq \frac{R}{2}$, allora tenendo conto dell'Osservazione 5.2.2 risulta

$$\int_{B_r} |u-u_r|^2 \leq 2^{N+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_r} |u|^2 \leq 2^{N+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u|^2.$$

Così (ii) vale quando $\lambda = 0$ con $c_3 = \max\{C(\nu_0, M_0), 2^{N+2}\}$.

Per ottenere la tesi nel caso generale basta applicare quanto appena provato alla funzione $u - \lambda$. □

Passiamo ora a provare stime interne nel caso non omogeneo

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f$$

in B_R.

Se $f \in L^2(B_R)$ allora il metodo variazionale assicura intanto di poter trovare un'unica funzione $w \in H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ tale che $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} w = f$. Infatti, la forma quadratica associata

$$a(u,v) = \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j v \qquad u, v \in H_0^1(B_R)$$

è chiaramente continua. Inoltre è coerciva poichè per l'ellitticità dell'operatore e per la disuguaglianza di Poincarè risulta

$$a(u,u) = \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j u \geq \nu_0 \int_{B_R} |\nabla u|^2 \geq \nu_0 c_R \|u\|_{H^1(B_R)}.$$

Pertanto, applicando il teorema di Lax Milgram possiamo affermare che esiste un'unica funzione $w \in H^1_0(B_R)$ soluzione debole dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} w = f$$

e che vale la stima

$$\|w\|_{H^1(B_R)} \leq \frac{1}{\nu_0 c_R} \|f\|_{L^2(B_R)}.$$

Il Teorema 2.2.27 che $w \in H^2(B_R)$ e che

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^2(B_R)} &\leq c(\nu_0, M_0, R) \left(\|f\|_{L^2(B_R)} + \|w\|_{H^1(B_R)} \right) \\ &\leq c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R)}. \end{aligned}$$

In particolare, dalla definizione di $\| \cdot \|_{H^2(B_R)}$, segue che

$$\|D^2 w\|_{L^2(B_R)} \leq c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R)} \tag{5.8}$$

In realtà la costante c che compare nella disuguaglianza (5.8) non dipende da R. Infatti, posto $v(x) = u(Rx)$ per $|x| < 1$, si ha che $v \in H^1_0(B_1) \cap H^2(B_1)$ e soddisfa l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} v(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} R^2 D_{ij} u(x) = R^2 f(Rx) =: g(x).$$

Usando la stima (5.8) otteniamo $\|D^2 v\|^2_{L^2(B_1)} \leq c(\nu_0, M_0, 1) \|g\|^2_{L^2(B_1)}$, ossia

$$\int_{B_1} R^4 |D^2 u(Rx)|^2 dx \leq c(\nu_0, M_0, 1) \int_{B_1} R^4 f^2(Rx) dx.$$

Semplificando R^4 e facendo il cambio di variabile $y = Rx$ giungiamo alla conclusione.

Teorema 5.2.4 *Sia $u \in H^2(B_R)$ e $f = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f$. Allora esistono due costanti $c_4 = c_4(\nu_0, M_0) > 0$ e $c_5 = c_5(\nu_0, M_0) > 0$ tali che per ogni $r < R$ risulta*

(i) $\displaystyle\int_{B_r} |D^2 u|^2 \leq c_4 \left(\left(\frac{r}{R} \right)^N \int_{B_R} |D^2 u|^2 + \int_{B_R} |f|^2 \right)$;

(ii) $$\int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 \leq c_5 \left(\left(\frac{r}{R} \right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right).$$

DIM. Proviamo (ii). La dimostrazione di (i) è simile. Introduciamo la funzione $z(x) = u(x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N x_i x_j (D_{ij}u)_R$. Allora $D_{ij}z = D_{ij}u - (D_{ij}u)_R$, e quindi

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} z = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (D_{ij}u)_R = f - f_R.$$

Sia $w \in H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ la soluzione variazionale di $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} w = f - f_R$. Per (5.8) sappiamo che

$$\|D^2 w\|_{L^2(B_R)} \le c(\nu_0, M_0) \|f - f_R\|_{L^2(B_R)}. \tag{5.9}$$

Allora $v := z - w \in H^2(B_R)$ e $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} v = 0$, cioè v soddisfa l'equazione omogenea. Derivando quest'ultima abbiamo $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(D^2 v) = 0$, essendo $D^2 v$ una qualunque derivata seconda di v. Possiamo così applicare a $D^2 v$ la stima (ii) del Lemma 5.2.3 e ottenere

$$\int_{B_r} |D^2 v - (D^2 v)_r|^2 \le c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 v - (D^2 v)_R|^2. \tag{5.10}$$

Poichè $D^2 z - (D^2 z)_r = D^2 u - (D^2 u)_r$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &= \int_{B_r} |D^2 z - (D^2 z)_r|^2 \\ &\le 2\int_{B_r} |D^2 v - (D^2 v)_r|^2 + 2\int_{B_r} |D^2 w - (D^2 w)_r|^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

avendo anche tenuto conto che $z = v + w$ e che vale la disuguaglianza $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$. Applicando poi le stime (5.10) e (5.9) e l'Osservazione 5.2.2 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &\le c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 v - (D^2 v)_R|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_r} |D^2 w|^2 \right) \\ &\le c(\nu_0, M_0) \left(2\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 z - (D^2 z)_R|^2 \right. \\ &\quad + 2\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 w - (D^2 w)_R|^2 \\ &\quad \left. + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right) \\ &\le c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_R} |f - f_R|^2 \right). \end{aligned}$$

□

5.3 Stime per operatori a coefficienti variabili

Prima di provare le stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$ vediamo come le stime del Teorema 5.2.4 si generalizzano al caso di coefficienti variabili.

Sia data l'equazione

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f$$

dove $f \in L^2(\Omega)$ e i coefficienti a_{ij} sono funzioni uniformemente continue in Ω. Denotiamo con

$$M_0 := \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty\}$$

$$\omega(\delta) := \max_{i,j}\{\omega(a_{ij}, \delta)\}, \quad \delta > 0$$

essendo $\omega(a_{ij}, \delta)$ il modulo di continuità di a_{ij}.

Data la regolarità dei coefficienti, l'operatore non può essere scritto in forma di divergenza e pertanto la nozione di soluzione debole usata finora non è più applicabile. Considereremo perciò soluzioni in senso più forte e precisamente funzioni $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per le quali l'equazione $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f$ è soddisfatta q.o.

Fissiamo $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ e consideriamo $A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) D_{ij}$. Allora

$$\begin{aligned} A_0 u &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} u \\ &= f + \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} u =: F. \end{aligned}$$

Applicando la stima (ii) del Teorema 5.2.4 all'operatore A_0 si ha

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |D^2 u - (D^2 u)_R|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \int_{B_R(x_0)} |F - F_R|^2 \right). \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'Osservazione 5.2.2 e di come è definita F abbiamo poi

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |F - F_R|^2 &\leq \int_{B_R(x_0)} |F - f_R|^2 \leq 2 \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 \\ &\quad + 2\omega^2(R) \int_{B_R(x_0)} |D^2 u|^2. \end{aligned}$$

Risulta così provato che

$$\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le \tag{5.12}$$
$$c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R(x_0)} |D^2u - (D^2u)_R|^2 + \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 \right.$$
$$\left. +\omega^2(R)\int_{B_R(x_0)} |D^2u|^2\right)$$

5.4 Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$. Risolubilità

Sia A l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)D^iu(x) + c(x)u(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, per $\alpha \in (0,1)$ e

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \nu_0|\xi|^2, \qquad x,\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

dove $\nu_0 > 0$. Indichiamo con $k_0 = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha\}$.

Teorema 5.4.1 (Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$) *Esiste $c = c(\nu_0, k_0, \alpha) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \alpha)([Au]_\alpha + \|u\|_\infty). \tag{5.13}$$

DIM. Supponiamo dapprima $b_i \equiv c \equiv 0$. Posto $Au = f$, applichiamo la stima (5.12) ad una palla arbitraria $B_R(x_0)$ tenendo conto che $\omega(R) \le [a_{ij}]_\alpha R^\alpha$ per qualche i, j, e otteniamo così

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &\le c(\nu_0, k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R(x_0)} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\ &\qquad \left. + \int_{B_R(x_0)} |f - f_R|^2 + R^{2\alpha}\int_{B_R(x_0)} |D^2u|^2\right) \\ &\le c(\nu_0, k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2 R^{2\alpha+N} + [f]_\alpha^2 R^{2\alpha+N}\right. \\ &\qquad \left. + \|D^2u\|_\infty R^{2\alpha+N}\right), \qquad \forall\, r < R. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dalla disuguaglianza precedente con $R = pr$, $p > 1$ si ottiene

$$\int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \quad \leq \quad c(\nu_0, k_0) r^{N+2\alpha}\big(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\big)$$

e quindi

$$\frac{1}{r^{N+2\alpha}} \int_{B_r(x_0)} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \quad \leq \quad c(\nu_0, k_0) \left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right).$$

Prendendo ora l'estremo superiore su tutti gli $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e usando il Teorema 4.3.4 otteniamo

$$[D^2u]^2_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left(p^{2\alpha-2}[D^2u]^2_\alpha + p^{N+2\alpha}[f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty p^{N+2\alpha}\right).$$

Scegliendo p grande abbastanza affinchè $c(\nu_0, k_0, \alpha)p^{2\alpha-2} = \frac{1}{2}$ abbiamo infine

$$[D^2u]^2_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([f]^2_\alpha + \|D^2u\|^2_\infty\right).$$

Veniamo al caso generale in cui b_i, c_i non sono necessariamente nulli. Applicando l'ultima stima ottenuta all'operatore $A_0u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u$ si ha

$$\begin{aligned} [D^2u]_\alpha &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([A_0u]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right) \\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au - \sum_{i=1}^N b_iD_iu - cu]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au]_\alpha + \|u\|_{1,\alpha} + \|D^2u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Ricordando la stima interpolativa $\|\cdot\|_2 \leq \varepsilon\|\cdot\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|\cdot\|_\infty$ (vedi Corollario 4.2.5), otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &= \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au]_\alpha + \|u\|_{2,0}\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha) \left([Au]_\alpha + \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Per avere la tesi, basta ora scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $c(\nu_0, k_0, \alpha)\varepsilon = \frac{1}{2}$, così che risulta

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)([Au]_\alpha + \|u\|_\infty).$$

□

Al fine di applicare il metodo di continuità, come anticipato, è necessario eliminare il termine $\|u\|_\infty$ dalla stima (5.13). Ciò è possibile a patto di richiedere una restrizione sul segno del coefficiente di ordine zero. In tal caso, infatti, vale il principio del massimo 3.1.10.

Corollario 5.4.2 *Siano $c \le 0$ e $\lambda > 0$. Allora esiste $c = c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\|(\lambda - A)u\|_{\alpha}. \tag{5.15}$$

DIM. Applicando la stima (5.13) e le stime interpolative del Corollario 4.2.5 risulta

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha} &\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|Au\|_{\alpha} + \|u\|_{\infty}\right)\\ &\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|(\lambda - A)u\|_{\alpha} + \lambda\|u\|_{\alpha} + \|u\|_{\infty}\right)\\ &\le c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|(\lambda - A)u\|_{\alpha} + \lambda\varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + \lambda c_{\varepsilon}\|u\|_{\infty} + \|u\|_{\infty}\right)\end{aligned}$$

per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$. Scegliamo ε tale che $\lambda\,\varepsilon\, c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$, raccogliamo a primo membro e per la Proposizione 3.1.10 otteniamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha} &\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\left(\|(\lambda - A)u\|_{\alpha} + \|u\|_{\infty}\right)\\ &\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\left(\|(\lambda - A)u\|_{\alpha} + \frac{1}{\lambda}\|(\lambda - A)u\|_{\infty}\right)\\ &\le c(\nu_0, k_0, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_{\alpha}.\end{aligned}$$

□

Per applicare il metodo di continuità occorre ora provare la suriettività di un operatore modello. Nel teorema seguente si vede che tale operatore è dato da $\lambda - \Delta$. Osserviamo che la scelta di Δ non è utile poichè l'equazione $\Delta u = f$ con $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ non ammette soluzioni limitate in $\mathbb{R}^N$. Basti pensare per esempio al caso unidimensionale $u'' = 1$.

Teorema 5.4.3 *Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u = f$, $\lambda > 0$.*

DIM. L'unicità segue dal Corollario 3.1.12. Proviamo l'esistenza.

Supponiamo dapprima $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Applicando la trasformata di Fourier all'equazione otteniamo

$$\lambda\hat{u}(\xi) + |\xi|^2\hat{u} = \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è la classe di Schwartz. Ne segue che $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Quindi esiste $u = (\hat{u})^{\vee} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u = f$.

Sia ora $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con supp$f \subset B_R(0)$. Fissiamo $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^N}\phi = 1$, $\operatorname{supp}\phi \subset B_1(0)$. Posto $f_{\varepsilon} = \phi_{\varepsilon} * f$, risulta che $f_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e $f_{\varepsilon} \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$. Inoltre è facile verificare che

$$[f_{\varepsilon}]_{\alpha} \le [f]_{\alpha}, \qquad \|f_{\varepsilon}\|_{\infty} \le \|f\|_{\infty}.$$

Per ogni ε sia $u_{\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ soluzione di $(\lambda - \Delta)u_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}$. Applicando il Corollario 5.4.2 vale

$$\|u_{\varepsilon}\|_{2,\alpha} \le c(\alpha, \lambda)\|f_{\varepsilon}\|_{\alpha} \le c(\alpha, \lambda)\|f\|_{\alpha}.$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, si ha

$$\|u_n\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha. \tag{5.16}$$

Applicando il Teorema di Ascoli-Arzelà (vedi Esercizio 4.1.19) si trovano una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ ed una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tali che u_{n_k} converge a u uniformemente sui compatti fino alle derivate seconde. Passando al limite per $k \to \infty$ nella stima (5.16) si vede che

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$$

per cui di fatto $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. A questo punto, passando puntualmente al limite per $k \to \infty$ nell'equazione $(\lambda - \Delta)u_{n_k}(x) = f_{n_k}(x)$ otteniamo che $(\lambda - \Delta)u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, cioè u è soluzione.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ in $B_1(0)$ e supp$\phi \subset B_2(0)$. Poniamo $f_n(x) = f(x)\phi\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)\phi_n(x)$. Allora

$$\begin{gathered} f_n(x) \to f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \\ \text{supp} f_n \subset B_{2n}(0) \\ \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \\ [f_n]_\alpha \leq \|f\|_\infty[\phi_n]_\alpha + [f]_\alpha\|\phi_n\|_\infty \leq C\,\|f\|_\alpha \end{gathered}$$

poichè $[\phi_n]_\alpha \leq n^{-\alpha}[\phi]_\alpha \leq [\phi]_\alpha$.

Per ogni n, sia $u_n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $(\lambda - \Delta)u_n = f_n$. Per le stime di Schauder risulta $\|u_n\|_{2,\alpha} \leq c(\alpha, \lambda)\|f_n\|_\alpha \leq c(\alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$. A questo punto, la conclusione segue applicando lo stesso argomento di compattezza di prima. □

Arriviamo finalmente al teorema di esistenza per un operatore arbitrario.

Teorema 5.4.4 (Esistenza) *Supponiamo $c \leq 0$, $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\lambda u - Au = f$.*

DIM. Con la notazione del Teorema 5.1.3, poniamo

$$\begin{aligned} &L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A \\ &L_t = (1-t)(\lambda - \Delta) + t(\lambda - A) = \lambda - [(1-t)\Delta + tA]. \end{aligned}$$

Applicando il Corollario 5.4.2 per l'operatore $A_t = (1-t)\Delta + tA$ si ha

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c\,\|L_t u\|_\alpha, \quad u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

con c indipendente da t (cf Teorema 5.1.4). I Teoremi 5.4.3 e 5.1.3 implicano la tesi. □

Definiamo $u = (\lambda - A)^{-1} f = R(\lambda, A) f$ per $\lambda > 0$ e $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$(\lambda - A)^{-1} : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N).$$

La stima del Corollario 5.4.2 implica che

$$\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\|f\|_\alpha$$

da cui segue

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{C^{0,\alpha} \hookrightarrow C^{2,\alpha}} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda).$$

Nella proposizione che segue rendiamo esplicita la dipendenza da λ.

Proposizione 5.4.5 *Supponiamo che $c \leq 0$ e $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

(i) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$;

(ii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_\alpha \qquad (\lambda \geq 1).$

DIM. (i) è stato già provato nella Proposizione 3.1.10. Per provare (ii), usiamo le stime di Schauder del Corollario 5.4.2 con $\lambda = 1$ e otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\|u - Au\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda_0 u - Au\|_\alpha + \lambda_0\|u\|_\alpha\right)$$

con $\lambda \geq 1$. Siccome $\|u\|_\alpha \leq c(\alpha)\|u\|_{2,\alpha}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\|u\|_\infty^{\frac{2}{2+\alpha}}$ (Teorema 4.2.3) risulta

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_{2,\alpha}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\,\varepsilon\,\|u\|_\infty^{\frac{2}{2+\alpha}}\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (5.17)\\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_{2,\alpha}\,\varepsilon^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} + \lambda\|u\|_\infty\varepsilon^{-\frac{2+\alpha}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon = \eta^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\,\lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}}$, l'ultimo membro della disuguaglianza precedente diventa

$$c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \eta\|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_\infty c(\eta)\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Prendiamo η in modo che $\eta\, c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$ e raccogliendo tutto a primo membro otteniamo

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda^{\frac{2+\alpha}{2}}\|u\|_\infty\right)\\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|\lambda u - Au\|_\infty\right)\\
&\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|\lambda u - Au\|_\alpha,
\end{aligned}$$

avendo applicato anche la Proposizione 3.1.10. □

Corollario 5.4.6 *Sia $r \leq 2+\alpha$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta $\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha$, $\lambda \geq 1$. In particolare*

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|f\|_\alpha \qquad (r=\alpha)$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_{1+\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha \qquad (r=1+\alpha)$$

Dim. Poichè $C^r(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{r}{2+\alpha}}(C_b(\mathbb{R}^N), C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N))$ dal Teorema 4.2.3, si ha che

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \leq c\left(\|(\lambda - A)^{-1}f\|_{2+\alpha}^{\frac{r}{2+\alpha}}\|(\lambda - A)^{-1}f\|_\infty^{1-\frac{r}{2+\alpha}}\right)$$

e applicando la proposizione precedente possiamo ancora maggiorare con

$$c\left(\|f\|_\alpha\lambda^{\frac{\alpha}{2}\frac{r}{2+\alpha}}\lambda^{-\frac{2+\alpha-r}{2+\alpha}}\right) = c\|f\|_\alpha\lambda^{\frac{r}{2}-1}$$

□

5.5 Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N_+$

Stabiliamo la notazione che useremo nel corso di tutta questa sezione.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N : x_N > 0\}\\
&T = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} = \partial\mathbb{R}^N_+ \equiv \mathbb{R}^{N-1}\\
&C^{0,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) : u(x', 0) = 0\ ,x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}\\
&C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) : u \in C^{0,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)\}\\
&B^+_R(x_0) = \{x \in B_R(x_0) : x_N > 0\} \qquad x_0 \in \mathbb{R}^{N-1},\ R > 0.
\end{aligned}$$

Infine, ricordiamo che avevamo indicato con $H^1_T(B^+_R)$ la chiusura nella norma H^1 delle funzioni $u \in C^\infty(\overline{B^+_R})$ nulle in in intorno di $T \cap \overline{B}^+_R$ (cioè nulle solo vicino al bordo piatto di $\overline{B^+_R}$) (Definizione 2.2.18).

Anche nel caso del semispazio, seguiremo il seguente programma:

- provare stime di Schauder in $C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ (prescrivendo quindi dei valori al bordo);

- provare l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per l'operatore $\lambda - \Delta$;

- dedurre mediante il metodo di continuità l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per un operatore qualunque.

Come al solito, l'operatore che prendiamo in considerazione è il seguente

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u + cu$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, $\nu_0 > 0$ costante di ellitticità. Supponiamo che tutti i coefficienti abbiano norma limitata da una certa costante $k_0 > 0$.

Il nostro obiettivo è il seguente teorema.

Teorema 5.5.1 (Stime di Schauder in $\mathbb{R}^N_+$) *Esiste una costante $C > 0$ che dipende da ν_0 e k_0 tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C \left([Au]_\alpha + \|u\|_\infty\right). \tag{5.18}$$

Prima di dimostrare il teorema appena enunciato, vediamo quando nella stima (5.18) si può eliminare il termine $\|u\|_\infty$ per avere le stime che servono per far funzionare il metodo di continuità. Anche in questo caso occorre un principio del massimo.

Corollario 5.5.2 *Se $c \leq 0$ e $\lambda > 0$ allora esiste una costante $C = C(\nu_0, k_0, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ vale*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C\|(\lambda - A)u\|_\alpha.$$

DIM. Per il Teorema 5.5.1, se $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$, si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\nu_0, k_0)\left([Au]_\alpha + \|u\|_\infty\right) \\ &\leq c(\nu_0, k_0)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \lambda\|u\|_\alpha + \|u\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Usiamo ora la stima interpolativa $\lambda\|u\|_\alpha \leq \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$ con ε tale che $\varepsilon c(\nu_0, k_0) = \frac{1}{2}$, e otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \lambda)\left(\|\lambda u - Au\|_\alpha + \|u\|_\infty\right).$$

Da qui concludiamo grazie al Teorema 3.1.13. □

Affrontiamo il secondo punto del nostro programma.

Teorema 5.5.3 *Sia $\lambda > 0$. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - \Delta u = f$.*

DIM. L'unicità discende come sempre dal principio del massimo 3.1.13.

Supponiamo $f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$. Siccome in particolare $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ possiamo ricondurci alla teoria L^2 del secondo capitolo. La forma quadratica associata all'operatore $\lambda - \Delta$ è

$$a(u,v) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} uv + \int_{\mathbb{R}^N_+} \nabla u \nabla v.$$

Risulta
$$a(u,u) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} u^2 + \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^2,$$
sicchè a è coerciva su $H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$. Per il Teorema di Lax-Milgram esiste un'unica $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - \Delta u = f$. Data la regolarità di f, $u \in C^\infty_b(\mathbb{R}^N_+)$ (vedi Corollario 2.2.14), e quindi in particolare $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

Prendiamo ora $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ con supp$f \subset B^+_R$. Estendiamo f ad una funzione pari in $\mathbb{R}^N$, definendo
$$\tilde f(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0 \\ f(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0 \end{cases}$$
Si verifica facilmente che $\|\tilde f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)}$. Regolarizziamo $\tilde f$, prendendo come funzioni approssimanti $f_\varepsilon = \tilde f * \phi_\varepsilon$, dove (ϕ_ε) è una successione di mollificatori. Allora $f_\varepsilon \to \tilde f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$ e
$$\|f_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tilde f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)}.$$
Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema
$$\begin{cases} \lambda u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u_\varepsilon = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{5.19}$$
costruita al passo precedente. Il Corollario 5.5.2 implica
$$\|u_\varepsilon\|_{2,\alpha} \leq c(\lambda)\|f_\varepsilon\|_\alpha \leq c(\lambda)\|f\|_\alpha. \tag{5.20}$$
Discretizzando ε e usando il Teorema di Ascoli-Arzelà si trovano una successione (u_n) ed una funzione u tale che $u_n \to u$ uniformemente sui compatti di $\overline{\mathbb{R}}^N_+$ insieme alle derivate prime e seconde. Passando al limite prima nella disuguaglianza (5.20) e poi nel problema (5.19) si ha rispettivamente che $\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\lambda)\|f\|_\alpha$, per cui $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, e
$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$
Infine, se $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, consideriamo la successione $f_n(x) = f(x)\phi\left(\frac{x}{n}\right)$, dove $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$, supp$\phi \subset B_2(0)$, $\phi \equiv 1$ su $B_1(0)$, $0 \leq \phi \leq 1$. Osservando che $\|f_n\|_\alpha \leq c\|f\|_\alpha$, c indipendente da n, risolviamo il problema di Dirichlet relativo ad ogni f_n. Dalla successione delle soluzioni, con lo stesso argomento di compattezza visto prima, estraiamo una sottosuccessione che converge alla soluzione del problema relativo a f in $\mathbb{R}^N_+$. $\square$

Parallelamente al caso di $\mathbb{R}^N$ deduciamo a questo punto la risolubilità del problema di Dirichlet per un operatore qualunque e le stime sul risolvente. Le dimostrazioni sono le stesse.

Teorema 5.5.4 *Supponiamo $c \le 0$ e $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $\lambda u - Au = f$.*

Proposizione 5.5.5 *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente valgono le seguenti stime*

(i) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_\infty \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_\alpha$

(ii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_\alpha, \qquad \lambda \ge 1$

(iii) $\|(\lambda - A)^{-1} f\|_r \le c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha \qquad \lambda \ge 1,\ 0 \le r \le 2+\alpha,$

per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$.

Rimangono da provare le stime di Schauder. Per questo, ripercorriamo con le dovute modifiche le tappe del caso $\mathbb{R}^N$ andando a considerare dapprima un operatore puro del secondo ordine a coefficienti costanti, poi variabili fino a prendere un operatore completo.

Osservazione 5.5.6 Se Ω è un aperto di classe C^1 e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \le p < \infty$, sono equivalenti

(i) $u = 0$ su $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

(cioè per funzioni continue l'appartenenza a $W^{1,p}_0(\Omega)$ si traduce nell'annullamento in senso classico su $\partial\Omega$).

Consideriamo l'operatore

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u$$

con le ipotesi

$$a_{ij} \in \mathbb{R},\ |a_{ij}| \le M_0,\ \nu_0 > 0.$$

Supponiamo che $u \in H^1_T(B^+_R)$ sia soluzione debole dell'equazione $Au = 0$, cioè

$$\int_{B^+_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0, \qquad \forall \phi \in H^1_0(B^+_R).$$

Allora per il Corollario 2.2.25 $u \in C^\infty(\overline{B}^+_r)$ per ogni $r < R$, e quindi, per l'Osservazione 5.5.6, $u(x', 0) = 0$. Anche per le derivate tangenziali $(i = 1, \ldots N-1)$ risulta

$$D_i u(x', 0) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Inoltre, per ogni multiindice α vale

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(D^\alpha u) = 0.$$

Rispetto al caso $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N_+$ abbiamo una complicazione poichè, derivando, l'equazione continua ad essere soddisfatta mentre la condizione al bordo viene preservata solo dalle derivate tangenziali. Per superare questa difficoltà, come già visto per la regolarità L^2, otterremo per le derivate tangenziali le stime necessarie e per quella normale useremo l'equazione.

Teorema 5.5.7 (Disuguaglianza di Caccioppoli) *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione debole dell'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0)$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B^+_r} |\nabla u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B^+_R} |u|^2. \tag{5.21}$$

DIM. Sia $\eta \in C^\infty_0(B_R)$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ su B_r e $|\nabla \eta| \leq \frac{L}{R-r}$. Per ipotesi $\int_{B^+_R} \sum_{i,j}^N a_{ij} D_i u D_j \phi = 0$ per ogni $\phi \in H^1_0(B^+_R)$. Scegliendo $\phi = \eta^2 u \in H^1_0(B^+_R)$ (perchè $u \in H^1_T(B^+_R)$), otteniamo

$$0 = \int_{B^+_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u(\eta^2 D_j u + 2\eta u D_j \eta)$$

da cui

$$\int_{B^+_R} \eta^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i u D_j u = -2 \int_{B^+_R} \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}\, \eta\, D_i u)(D_j \eta\, u).$$

Per l'uniforme ellitticità dell'operatore e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz risulta poi

$$\nu_0 \int_{B^+_R} \eta^2 |\nabla u|^2 \leq c(M_0) \left(\int_{B^+_R} |\nabla u|^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B^+_R} |\nabla \eta|^2 u^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\nu_0 \left(\int_{B^+_R} \eta^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c(M_0) L}{R-r} \left(\int_{B^+_R} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui segue la tesi ricordando che $\eta \equiv 1$ su B_r. □

Nel caso di $\mathbb{R}^N$ per iterare la disuguaglianza di Caccioppoli bastava applicare l'analoga di (5.21) alle derivate superiori di u. Qui, come già detto, le derivate superiori in generale soddisfano la stessa equazione soddisfatta da u ma non la condizione al bordo.

Lemma 5.5.8 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$ soluzione di $Au = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0, k)$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B_r^+} |D^k u|^2 \leq \frac{c}{(R-r)^{2k}} \int_{B_R^+} |u|^2. \tag{5.22}$$

DIM. Procediamo per induzione su k. Il caso $k = 1$ è la disuguaglianza di Caccioppoli provata nel teorema precedente. Supponiamo la tesi vera per k e proviamo che vale per $k+1$. Fissiamo $i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ e consideriamo la derivata tangenziale $D_i u$. Allora

$$A(D_i u) = 0 \qquad e \qquad D_i u \in H^1_T(B^+_{R'}) \quad R' < R.$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a $D_i u$ e la disuguaglianza di Caccioppoli a u e otteniamo

$$\int_{B_r^+} |D^k D_i u|^2 \leq \frac{c(\nu_0, M_0, k)}{(R-r)^{2k}} \int_{B^+_{\frac{R+r}{2}}} |D_i u|^2 \leq \frac{c(\nu_0, M_0, k)}{(R-r)^{2(k+1)}} \int_{B_R^+} |u|^2$$

con $1 \leq k \leq N, 1 \leq i \leq N-1$. L'unica derivata che rimane da stimare è D_N^{k+1} (derivata di ordine $k+1$ unicamente rispetto all'ultima variabile). Deriviamo $k-1$ volte rispetto x_N l'equazione $Au = 0$ e abbiamo

$$D_N^{k+1} u = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} D_{ij} (D_N^{k-1} u),$$

da cui concludiamo, dato che tutte le derivate che compaiono a secondo membro sono state già stimate. □

Osservazione 5.5.9 Nella notazione del Lemma 5.5.8, se $k > \frac{N}{2}$, grazie alle immersioni di Sobolev si ha

$$\|D^2 u\|_{L^\infty(B_r^+)} \leq c(r) \|D^2 u\|_{H^k(B_r^+)} \leq C(\nu_0, M_0, k, r, R) \|u\|_{L^2(B_R^+)} \tag{5.23}$$

per ogni $r < R$.

Il seguente lemma è simile alla disuguaglianza di Poincarè.

Lemma 5.5.10 *Sia $u \in H^1_T(B^+_R)$. Allora*

$$\int_{B_R^+} |u|^2 \leq R^2 \int_{B_R^+} |D_N u|^2.$$

DIM. Per densità, basta dimostrare la tesi per $u \in C^1(\overline{B_R^+})$ tale che $u(x',0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo scrivere

$$u(x', x_N) - u(x', 0) = \int_0^{x_N} D_N u(x', s) ds,$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|u(x', x_N)|^2 \le x_N \int_0^{x_N} |D_N u(x', s)|^2 ds \le R \int_0^{\sqrt{R^2 - |x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds.$$

Integrando tra 0 e $\sqrt{R^2 - |x'|^2}$ rispetto a x_N si ha

$$\int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |u(x', x_N)|^2 dx_N \le R^2 \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds.$$

Integrando quindi su $|x'| \le R$ otteniamo

$$\int_{|x'|\le R} dx' \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |u(x', x_N)|^2 dx_N \le$$
$$R^2 \int_{|x'|\le R} dx' \int_0^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} |D_N u(x', s)|^2 ds$$

cioè, per il Teorema di Fubini

$$\int_{B_R^+} |u|^2 \le R^2 \int_{B_R^+} |D_N u|^2$$

che è proprio la tesi. □

L'importanza dei teoremi che stiamo provando non riguarda la regolarità delle soluzioni, perchè per equazioni a coefficienti costanti abbiamo a disposizione la teoria variazionale, che risponde completamente al problema. Ci occorrono invece stime esplicite che estenderemo poi alle equazioni a coefficienti non costanti, per le quali l'approccio variazionale non è possibile sotto le ipotesi assunte.

Teorema 5.5.11 *Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H^1_T(B_R^+)$ soluzione di $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$*

$$\int_{B_r^+} |D^2 u - (D^2 u)_r|^2 \le c \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2 u - \lambda|^2 \tag{5.24}$$

per ogni matrice $\lambda = (\lambda_{ij})$, dove $(D^2 u)$ indica la matrice Hessiana di u.

DIM. Prendiamo $R = 1$, $r \leq \frac{1}{2}$. Consideriamo dapprima derivate tangenziali, quindi sia $j \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$. Definiamo

$$v = D_j u - x_N \lambda_{jN} \ \in H^1_T(B^+_R).$$

Vale che

$$\begin{aligned} D_i v &= D_{ij} u \quad \text{se } i < N \\ D_N v &= D_{jN} u - \lambda_{jN} \\ D_{hi} v &= D_{hi}(D_j u). \end{aligned}$$

Pertanto $Av = 0$ e inoltre

$$D_i v - (D_i v)_r = D_{ij} u - (D_{ij} u)_r.$$

Applicando a v nell'ordine la disuguaglianza di Poincarè, la stima (5.23) e il Lemma 5.5.10 otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{B^+_r} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 &\leq c\, r^2 \int_{B^+_r} |D^2 v|^2 \leq c\, r^{2+N} \sup_{B^+_r} |D^2 v|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{2+N} \int_{B^+_{\frac{1}{2}}} |v|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D_N v|^2. \end{aligned}$$

Riscrivendo tale disuguaglianza in termini di u abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B^+_r} |D_{ij} u - (D_{ij} u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D_{jN} u - \lambda_{jN}|^2 \\ &\leq c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B^+_1} |D^2 u - \lambda|^2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

per $j < N$, $1 \leq i \leq N$. Rimane ancora una volta da stimare $D_{NN} u$. Dall'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = 0$ ricaviamo

$$\begin{aligned} D_{NN} u &= -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} D_{ij} u, \\ (D_{NN} u)_r &= -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} (D_{ij} u)_r \end{aligned}$$

e quindi

$$D_{NN} u - (D_{NN} u)_r = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} \left(D_{ij} u - (D_{ij} u)_r \right).$$

Usando (5.25), otteniamo

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le c(\nu_0, M_0) r^{N+2} \int_{B_1^+} |D^2u - \lambda|^2$$

così la tesi è completamente provata se $r \le \frac{1}{2}$ e $R = 1$.

Se $r \ge \frac{1}{2}$ ed $R = 1$ risulta

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le \int_{B_r^+} |D^2u - \lambda|^2 \le 2^{N+2} r^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2u - \lambda|^2.$$

Per avere la tesi nel caso generale ricorriamo come sempre a un cambiamento di variabili: poniamo $v(x) = u(Rx)$ per $|x| \le 1$, applichiamo la disuguaglianza appena dimostrata alla funzione v con $r' = \frac{r}{R}$ e infine cambiamo di nuovo variabile. □

Osservazione 5.5.12 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f & \text{in } B_R^+ \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R^+ \end{cases}$$

con $f \in L^2(B_R^+)$.

Sappiamo che il metodo variazionale fornisce un'unica soluzione $u \in H^2(B_R^+) \cap H_0^1(B_R^+)$ per la quale vale la stima

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(B_R^+)} &\le c(\nu_0, M_0, R) \left(\|f\|_{L^2(B_R^+)} + \|u\|_{H^1(B_R^+)} \right) \\ &\le c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R^+)}. \end{aligned}$$

In particolare

$$\|D^2u\|_{L^2(B_R^+)} \le c(\nu_0, M_0, R) \|f\|_{L^2(B_R^+)}. \tag{5.26}$$

Con la stessa dimostrazione del caso dell'intera palla (vedi (5.8)), si prova che nella (5.26) la costante c non dipende da R.

Passiamo a considerare il problema non omogeneo.

Teorema 5.5.13 *Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$ soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f,$$

con $f \in L^2(B_R^+)$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, M_0) > 0$ tale che per ogni $r < R$

$$\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 \le c \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2 + \int_{B_R^+} |f - f_R|^2 \right). \tag{5.27}$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria $z(x) = u(x) - \frac{x_N^2}{2a_{NN}} f_R \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$. Risulta

$$
\begin{aligned}
&D_{ij} z = D_{ij} u \quad (i,j) \neq (N,N), \\
&D_{NN} z = D_{NN} u - \tfrac{f_R}{a_{NN}}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
D_{ij} z - (D_{ij} z)_r = D_{ij} u - (D_{ij} u)_r
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} z &= \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij} D_{ij} u + a_{NN} D_{NN} u - a_{NN} \frac{f_R}{a_{NN}} \\
&= \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u - f_R = f - f_R.
\end{aligned}
$$

Scriviamo $z = v + w$ dove $w \in H^2(B_R^+) \cap H_0^1(B_R^+)$ è la soluzione variazionale dell'equazione $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} w = f - f_R$ e $v = z - w \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$ per differenza risolve l'equazione omogenea. Sappiamo, per l'Osservazione 5.5.12, che

$$
\|D^2 w\|_{L^2(B_R^+)} \leq c(\nu_0, M_0) \|f - f_R\|_{L^2(B_R^+)}
$$

e per il Teorema 5.5.11 che

$$
\int_{B_r^+} |D^2 v - (D^2 v)_r|^2 \leq c(\nu_0, M_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R^+} |D^2 v - (D^2 v)_R|^2.
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r^+} |D^2 w - (D^2 w)_r|^2 &\leq \int_{B_r^+} |D^2 w|^2 \leq \int_{B_R^+} |D^2 w|^2 \\
&\leq c(\nu_0, M_0) \int_{B_R^+} |f - f_R|^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|D^2 v - (D^2 v)_R|^2 &\leq 2|D^2 z - (D^2 z)_R|^2 + 2|D^2 w - (D^2 w)_R|^2 \\
&= 2|D^2 u - (D^2 u)_R|^2 + 2|D^2 w - (D^2 w)_R|^2.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &= \int_{B_r^+} |D^2z - (D^2z)_r|^2 \\
&= \int_{B_r^+} |D^2v - (D^2v)_r + D^2w - (D^2w)_r|^2 \\
&\leq 2\int_{B_r^+} |D^2v - (D^2v)_r|^2 + 2\int_{B_r^+} |D^2w - (D^2w)_r|^2 \\
&\leq c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\
&\qquad\left. + \int_{B_R^+} |f - f_R|^2\right).
\end{aligned}
$$

□

Passiamo a considerare adesso il caso dei coefficienti variabili. Supponiamo che i coefficienti a_{ij} del nostro operatore siano funzioni uniformemente continue e poniamo $\omega(\delta) = \max_{i,j}\omega(a_{ij},\delta)$, $M_0 = \max_{i,j}\|a_{ij}\|_\infty$. Sia $u \in H^2(B_R^+) \cap H_T^1(B_R^+)$ tale che

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u = f.$$

Consideriamo la semipalla B_R^+ centrata nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$. Possiamo allora scrivere

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) D_{ij} u = f + \sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\right) D_{ij} u := F$$

e applicando la disuguaglianza (5.27) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r^+} |D^2u - (D^2u)_r|^2 &\leq c(\nu_0, M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+} |D^2u - (D^2u)_R|^2\right. \\
&\qquad\left. + \int_{B_R^+} |F - F_R|^2\right).
\end{aligned}
$$

Siccome

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R^+} |F - F_R|^2 &\leq \int_{B_R^+} |F - f_R|^2 \\
&\leq 2\int_{B_R^+} |f - f_R|^2 + 2\int_{B_R^+} \left|\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\right) D_{ij} u\right|^2 \\
&\leq 2\int_{B_R^+} |f - f_R|^2 + 2\,\omega^2(R)\int_{B_R^+} |D^2u|^2
\end{aligned}
$$

otteniamo in definitiva

$$\begin{aligned}\int_{B_r^+} |D^2u-(D^2u)_r|^2 \quad &\leq \quad c(\nu_0,M_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R^+}|D^2u-(D^2u)_R|^2\right.\\ &\left.+\int_{B_R^+}|f-f_R|^2+\omega^2(R)\int_{B_R^+}|D^2u|^2\right).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Abbiamo a questo punto tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema 5.5.1. Prendiamo dunque un operatore completo

$$A=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}+\sum_{i=1}^N b_iD_i+c$$

con coefficienti α-hölderiani in $\mathbb{R}^N$ $(0<\alpha<1)$. Siano ν_0 la costante di ellitticità e k_0 tale che

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0.$$

Dimostrazione del Teorema 5.5.1.
Supponiamo dapprima $b_i\equiv c\equiv 0$.

Sia $u\in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$. Il nostro obiettivo è provare una stima del tipo

$$\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_r|^2\leq c\,r^{N+2\alpha}([Au]_\alpha+\|u\|_\infty)$$

(usando la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane) dove

$$\Omega(x_0,r)=B_r(x_0)\cap\mathbb{R}^N_+.$$

Sia $r<R$, sicchè $\Omega(x_0,r)\subset\Omega(x_0,R)$. Esaminiamo separatamente vari casi.

Primo caso: $x_0\in\mathbb{R}^{N-1}$.

In queste ipotesi $\Omega(x_0,r)=B_r^+(x_0)$ e possiamo applicare la stima (5.28). Allora

$$\begin{aligned}\int_{B_r^+}|D^2u-(D^2u)_r|^2 \quad &\leq \quad c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2R^{N+2\alpha}+[f]_\alpha^2R^{N+2\alpha}\right.\\ &\left.+\|D^2u\|_\infty^2R^{N+2\alpha}\right),\end{aligned}$$

dove

$$f=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}u.$$

Secondo caso: $B_R(x_0)\subset\mathbb{R}^N_+$.

Questa volta $\Omega(x_0,r)=B_r$ e per la stima (5.12) risulta

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|D^2u-(D^2u)_r|^2 &\le c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|D^2u-(D^2u)_R|^2\right.\\ &\quad\left.+\int_{B_R}|f-f_R|^2+\omega^2(R)\int_{B_R}|D^2u|^2\right)\\ &\le c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2R^{N+2\alpha}+[f]_\alpha^2R^{N+2\alpha}\right.\\ &\quad\left.+\|D^2u\|_\infty^2R^{N+2\alpha}\right). \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Terzo caso: $B_R(x_0)\not\subseteq\mathbb{R}^N_+$ e $x_0^N<r$ ($x_0=(x_0',x_0^N)$).

Consideriamo $B^+_{2r}(x_0')$, la semipalla di raggio $2r$ centrata in $(x_0',0)$. Siccome questa contiene $\Omega(x_0,r)$ risulta

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\le \int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{B^+(x_0',2r)}|^2\\ &\le \int_{B^+(x_0',2r)}|D^2u-(D^2u)_{B^+(x_0',2r)}|^2\end{aligned}$$

e a questo punto siamo nella stessa situazione del primo caso: possiamo riscrivere la stessa stima con $2R$ al posto di R e $2r$ al posto di r.

Quarto caso: $B_R(x_0)\not\subseteq\mathbb{R}^N_+$ e $r<x_0^N<R$.

Consideriamo la palla $B'=B_{R'}(x_0)$ centrata nel punto x_0 e di raggio $R'=x_0^N$. Utilizzando i casi già discussi, usiamo la stima (5.12) tra $B_r(x_0)$ e B', quindi la stima del passo 3 tra B' e $B^+_{2R'}(x_0')$, infine la stima (5.28) tra $B^+_{2R'}(x_0')$ e $B^+_{2R}(x_0')$ per ottenere

In definitiva, abbiamo provato che per ogni $r<R$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\le c(\nu_0,k_0)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}[D^2u]_\alpha^2R^{N+2\alpha}\right.\\ &\quad\left.+[f]_\alpha^2R^{N+2\alpha}+\|D^2u\|_\infty^2R^{N+2\alpha}\right)\end{aligned}$$

Ponendo $R=pr$ con $p>1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{N+2\alpha}}\int_{\Omega(x_0,r)}|D^2u-(D^2u)_{\Omega(x_0,r)}|^2 &\le c(\nu_0,k_0)\left(p^{2\alpha-2}[D^2u]_\alpha^2\right.\\ &\quad\left.+[f]_\alpha^2p^{N+2\alpha}+\|D^2u\|_\infty^2p^{N+2\alpha}\right)\end{aligned}$$

Prendendo il sup su $r>0$ e $x_0\in\mathbb{R}^N_+$ otteniamo

$$[D^2u]_\alpha^2\le c(\nu_0,k_0,\alpha)\left(p^{2\alpha-2}[D^2u]_\alpha^2+[f]_\alpha^2p^{N+2\alpha}+\|D^2u\|_\infty^2p^{N+2\alpha}\right)$$

per ogni $p>1$. Scegliamo ora p sufficientemente grande affinchè $c(\nu_0,k_0,\alpha)$ $p^{2\alpha-2}=\frac{1}{2}$. Ciò implica che

$$[D^2u]_\alpha^2\le c(\nu_0,k_0,\alpha)\left([f]_\alpha^2+\|D^2u\|_\infty^2\right).$$

Passiamo ora al caso generale in cui sono presenti i coefficienti b_i e c. Ponendo $A_0 u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u$ e tenendo conto della prima parte risulta

$$\begin{aligned}[D^2u]_\alpha &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([A_0u]_\alpha + \|D^2u\|_\infty\right)\\ &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \|u\|_{1,\alpha} + \|D^2u\|_\infty\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left([Au]_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Usiamo la stima interpolativa $\|u\|_2 \leq \varepsilon \|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon \|u\|_\infty$ (Teorema 4.2.3), scegliamo ε tale che $\varepsilon c(\nu_0, k_0, \alpha) = \frac{1}{2}$ e raccogliamo infine tutto a primo membro per avere la stima dell'enunciato. □

5.6 Stime di Schauder in un aperto limitato regolare

Consideriamo un aperto limitato Ω con bordo $C^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ e come sempre l'operatore uniformemente ellittico

$$A = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c \tag{5.30}$$

avente i coefficienti α-hölderiani in Ω. Supponiamo

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0, \quad \nu_0 > 0.$$

Definiamo

$$C_0^{2,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right\}.$$

Vogliamo estendere i coefficienti dell'operatore A in tutto $\mathbb{R}^N$ in modo che le estensioni risultino di classe $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e il nuovo operatore sia ancora uniformemente ellittico.

Se $\Omega = B_R$, allora possiamo definire estensioni radiali ponendo

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{se } |x| \leq R \\ a_{ij}\left(\frac{x}{|x|}R\right) & \text{se } |x| > R. \end{cases}$$

Analogamente per b_i e c.

Si verifica facilmente che le norme hölderiane al più raddoppiano e che la costante di ellitticità ν_0 rimane invariata.

Se $\Omega = B_R^+$, mediante una riflessione possiamo ricondurci in B_R e da qui di nuovo con un'estensione radiale costruiamo dei coefficienti definiti in tutto $\mathbb{R}^N$. Anche in tal caso è facile verificare che le norme hölderiane e la costante ν_0 si modificano al più per fattori moltiplicativi.

Pertanto se $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$ e supp$u \subseteq B_r$ con $r < R$, allora di fatto $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e applicando le stime di Schauder in tutto $\mathbb{R}^N$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha,B_R} = \|u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|\tilde{A}u\|_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\right) \qquad (5.31) \\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|Au\|_{\alpha,B_R} + \|u\|_{\infty,B_R}\right) \end{aligned}$$

dove $\tilde{A}$ è l'operatore avente per coefficienti $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}$.

E' facile così dedurre stime di Schauder in una palla a partire da quelle in $\mathbb{R}^N$, ma per una classe di funzioni molto più piccola di $C_0^{2,\alpha}(B_R)$, dato che le funzioni considerate si annullano al bordo insieme alle derivate prime e seconde, proprietà questa che in generale non è verificata da una qualunque funzione di $C_0^{2,\alpha}(B_R)$.

Analogamente se $u \in C^{2,\alpha}(B_R^+)$ è tale che $u = 0$ su $\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^{N-1}$ e supp$u \subset B_r^+$ con $r < R$ allora $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^N)$ e possiamo usare le stime di Schauder nel semispazio con l'operatore $\tilde{A}$ per avere

$$\|u\|_{2,\alpha,B_R^+} \leq c(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|Au\|_{\alpha,B_R^+} + \|u\|_{\infty,B_R^+}\right). \qquad (5.32)$$

Queste stime, che non sono ancora sufficienti per i nostri scopi, ci permetteranno di far funzionare il metodo delle carte locali.

Consideriamo Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$. Sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ una trasformazione bigettiva di classe $C^{2,\alpha}$ con inversa $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$ di classe $C^{2,\alpha}$ tale che $H(\partial\Lambda) = \partial\Omega$.

Data $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Allora $v \in C^{2,\alpha}(\Lambda)$ e se u si annulla su $\partial\Omega$ v si annulla su $\partial\Lambda$. Dunque è ben definita la seguente applicazione

$$M : C_0^{2,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Lambda), \qquad u \mapsto Mu = v \qquad (5.33)$$

con $(Mu)(y) = u(H(y))$. Si può facilmente verificare che M è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$\begin{gathered} M^{-1} : C_0^{2,\alpha}(\Lambda) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega) \\ (M^{-1}v)(x) = v(Jx) \end{gathered}$$

Consideriamo l'operatore

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x)$$

definito in Ω. Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A}v(y) = \sum_{h,k=1}^{N} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_{k=1}^{N} \beta_k D_{y_k} v(y) + \gamma(y) v(y) \tag{5.34}$$

dove

$$\begin{aligned}
&\alpha_{hk}(y) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)),\\
&\beta_k(y) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_k(H(y)) + \sum_{i=1}^{N} b_i(H(y)) J_k(H(y)),\\
&\gamma(y) = c(H(y)).
\end{aligned}$$

Le ipotesi relative al cambio di variabile assicurano che

$$\alpha_{hk},\ \beta_k,\ \gamma\ \in C^{0,\alpha}(\Gamma).$$

Inoltre

$$\tilde{k_0} \leq c_1(J)\, k_0 \qquad\qquad \tilde{\nu_0} \geq c_2(J)\, \nu_0$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A. Osserviamo infine che nella notazione introdotta si ha

$$Au(x) = \tilde{A}v(Jx)$$

cioè

$$Au = M^{-1}\tilde{A}Mu.$$

Teorema 5.6.1 (Stime di Schauder in Ω) *Sia Ω un aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$. Allora esiste una costante $c = c(\nu_0, k_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ si ha*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0, k_0, \Omega) \left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_\infty\right). \tag{5.35}$$

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha}, \quad H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$

$$H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega.$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Per ogni $x \in \Omega$ esiste $B_{2R_x}(x) \subset \Omega$. Per compattezza si ha

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{R_i}(x_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora

$$u = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u \qquad \text{e quindi} \qquad \|u\|_{2,\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i u\|_{2,\alpha}.$$

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i u \in C^{2,\alpha}(B_{2R_{x_i}}(x_i))$ e $\text{supp}(\eta_i u) \subset B_{R_{x_i}}(x_i)$. Applicando (5.31) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} &= \|\eta_i u\|_{2,\alpha,B_{2R_{x_i}}(x_i)} \\
&\leq c(\nu_0,k_0,\alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,B_{2R_{x_i}}(x_i)} + \|\eta_i u\|_{\infty,B_{2R_{x_i}}(x_i)}\right) \\
&\leq c(\nu_0,k_0,\alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right) \\
&\leq c(\nu_0,k_0,\alpha,\Omega)\left(\|Au\|_{\alpha} + \|u\|_{2}\right). \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Sia adesso $n_1+1 \leq i \leq n$. Operiamo il seguente cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)) = M_i(\eta_i u)(y)$$

e osserviamo che $v_i \in C_T^{2,\alpha}(B_1^+)$ e $\text{supp}(\eta_i u) \subset V_i = H_i(B_{\frac{1}{2}})$. Pertanto possiamo applicare (5.32) a v_i e avere

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_{2,\alpha,B_1^+} &\leq c(\nu_0,k_0,H_i)\left(\|\tilde{A}v_i\|_{\alpha,B_1^+} + \|v_i\|_\infty\right) \\
&\leq c(\nu_0,k_0,H_i)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,U_{x_i}} + \|\eta_i u\|_\infty\right) \\
&\leq c(\nu_0,k_0,H_i)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} \leq c(\nu_0,k_0,\Omega)\left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Sommando su $i = 1,\cdots,n$

$$\|u\|_{2,\alpha,\Omega} \leq c(\nu_0,k_0,\Omega)\left(\|Au\|_\alpha + \|u\|_2\right).$$

Concludiamo la dimostrazione applicando la disuguaglianza interpolativa $\|u\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$ e scegliendo ε tale che $\varepsilon c(\nu_0,k_0,\Omega) = \frac{1}{2}$. □

Osservazione 5.6.2 Ricordiamo che il nostro obiettivo è risolvere il problema

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se $c \leq 0$, allora il principio del massimo in un aperto limitato assicura l'unicità della soluzione nella classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Come sempre, la parte più laboriosa è quella relativa all'esistenza.

Corollario 5.6.3 *Nelle ipotesi del Teorema 5.5.1 e se $c \leq 0$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\nu_0,k_0,\Omega)\|Au\|_\alpha,$$

per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$.

DIM. Basta usare il Teorema 5.5.1 e la Proposizione 3.1.9. □

Possiamo ora dimostrare il teorema di esistenza per la soluzione del problema di Dirichlet per un operatore generale in un aperto limitato regolare.

Teorema 5.6.4 (Esistenza) *Sia Ω un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $Au = f$.*

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha}, \quad H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$

$$H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega.$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$.

Per ogni $x \in \Omega$ sia $B_{2R_x}(x) \subset \Omega$. Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito per $\overline{\Omega}$

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{R_i}(x_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}. \tag{5.37}$$

Poniamo $n = n_1 + n_2$ e prendiamo $(\eta_i^2)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa a tale ricoprimento.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Allora possiamo scrivere $f = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 f$. Fissiamo $\lambda > 0$.

Se $i \le N_1$ allora $\eta_i f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, supp$(\eta_i f) \subseteq B_{R_{x_i}}(x_i)$. Estendiamo radialmente l'operatore A dalla palla $B_{R_{x_i}}(x_i)$ a tutto $\mathbb{R}^N$ e indichiamo con $R(\lambda)$ il risolvente dell'operatore così ottenuto. Osserviamo che $R(\lambda) : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := \eta_i \cdot R(\lambda)(\eta_i f)$$

e notiamo che

$$R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} R_i(\lambda)f \subseteq B_{R_i}(x_i).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= (\lambda - A)\eta_i R(\lambda)(\eta_i f) \\
&= \eta_i(\lambda - A)R(\lambda)(\eta_i f) + [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) \\
&= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f
\end{aligned}$$

dove $[\cdot,\cdot]$ indica il commutatore e per definizione

$$S_i(\lambda)f = [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f).$$

Cerchiamo di stimare quest'ultimo operatore. E' immediato verificare che $[\lambda - A, \eta_i I] = -[A, \eta_i I]$. Inoltre

$$[A, \eta_i I]g = A(\eta_i g) - \eta_i(Ag) = B_i g$$

dove B_i è un operatore differenziale al più del primo ordine i cui coefficienti dipendono da quelli di A e dalla funzione η_i. Ne segue che

$$\|[A, \eta_i I]g\|_\alpha \leq c(k_0, \eta_i)\|g\|_{1,\alpha}$$

e quindi, prendendo $g = R(\lambda)(\eta_i f)$ e applicando il Corollario 5.4.6 otteniamo

$$\begin{aligned}\|S_i(\lambda)f\|_\alpha &\leq c(k_0, \eta_i)\|R(\lambda)(\eta_i f)\|_{1,\alpha} \\ &\leq c(k_0, \eta_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|\eta_i f\|_\alpha \\ &\leq c(k_0, \eta_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha\end{aligned} \tag{5.38}$$

se $\lambda \geq 1$.

Sia ora $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Poniamo

$$v(y) = (\eta_i f)(H_i(y)) = M_i(\eta_i f)(y)$$

dove M_i è definito in (5.33). Allora $v \in C^{0,\alpha}(B_1^+)$ e supp$v \subset B_{\frac{1}{2}}$. Indichiamo con $\tilde{A}$ l'operatore ottenuto effettuando il cambiamento di variabili dato da M_i, cioè $\tilde{A} = M_i A M_i^{-1}$. Risulta

$$R_i(\lambda)f := M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}M_i(\eta_i f)\right) \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$$
$$\mathrm{supp}\, R_i(\lambda)f \subset V_{x_i}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= M_i^{-1}(\lambda - \tilde{A})M_i M_i^{-1}M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right) \\ &= M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)M_i(\eta_i f)\right) \\ &\quad + M_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right)\right) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f\end{aligned} \tag{5.39}$$

dove ora $S_i(\lambda) = M_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(M_i(\eta_i f)\right)\right)$. Come prima, se $\lambda \geq 1$ applicando la Proposizione 5.5.5 risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, H_i)\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_\alpha. \tag{5.40}$$

A questo punto poniamo

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega).$$

Osserviamo che

$$(\lambda - A)V(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f = f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f$$

e quindi

$$(\lambda - A)V(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad (\lambda - A)V(\lambda) = I + \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda).$$

Ora, grazie a (5.38) e a (5.40) possiamo scegliere λ_0 tale che $\sum_{i=1}^{n} \|S_i(\lambda_0)\|_\alpha \le \frac{1}{2}$. Ciò assicura che l'operatore $I + \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda_0)$ è invertibile in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con inverso $W(\lambda_0)$ tale che $\|W(\lambda_0)\| \le 2$. Inoltre siccome

$$(\lambda_0 - A)V(\lambda_0)W(\lambda_0) = I$$

su $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $\lambda_0 - A$ è iniettivo, risulta $(\lambda_0 - A)^{-1} = V(\lambda_0)W(\lambda_0)$.

Se $0 \le \lambda \le \lambda_0$, le stime di Schauder per l'operatore $A - \lambda$ forniscono una costante $c = c(\nu_0, k_0, \lambda_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ si ha

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\nu_0, k_0, \lambda_0, \Omega)\|(\lambda - A)u\|_\alpha. \tag{5.41}$$

La stima (5.41) permette di applicare il metodo di continuità agli operatori

$$L_0 = \lambda_0 - A, \quad L_1 = -A$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 5.6.5 In $\mathbb{R}^N$ e in $\mathbb{R}^N_+$ abbiamo dimostrato per il risolvente di A la seguente stima

$$\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r \le c(\nu_0, k_0)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha,$$

con $\lambda \ge 1$ e $0 \le r \le \alpha + 2$. La stessa continua a valere in un aperto Ω regolare. Infatti, nella notazione del teorema precedente, risulta $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A) = V(\lambda)W(\lambda)$, con $V(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda)$, dove $R_i(\lambda)$ è sostanzialmente il risolvente nello spazio o nel semispazio per il quale sappiamo che vale $\|R_i(\lambda)g\|_r \le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|g\|_\alpha$ e $\|W(\lambda)\| \le 2$. Pertanto se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, si ha

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - A)^{-1}f\|_r &= \|V(\lambda)W(\lambda)f\|_r \\
&\le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|W(\lambda)f\|_r \\
&\le 2c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{r}{2}-1}\|f\|_\alpha.
\end{aligned}$$

5.7 Problema di Dirichlet non omogeneo

In questa sezione supponiamo che $c \le 0$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.42}$$

Se $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, ponendo $v = u - g$ si vede che

$$\begin{cases} Av = Au - Ag = f - Ag & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

per cui risolvendo questo problema (e lo sappiamo fare) si trova la soluzione di (5.42) semplicemente prendendo $u = v + g$. Inoltre, abbiamo la stima

$$\|v\|_{2,\alpha} \leq c\|f - Ag\|_\alpha \leq c\left(\|f\|_\alpha + \|Ag\|_\alpha\right) \leq c\left(\|f\|_\alpha + \|g\|_{2,\alpha}\right).$$

Tuttavia l'ipotesi $g \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ è abbastanza innaturale, nel senso che la regolarità richiesta è eccessiva. Per esempio nel caso particolare del Laplaciano

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è sufficiente che $g \in C(\partial\Omega)$. Vediamo allora come procedere nel caso generale.

Per risolvere il problema (5.42) cerchiamo la soluzione nella forma $u = v + w$, dove v e w devono soddisfare rispettivamente

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Aw = 0 & \text{in } \Omega \\ w = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Il primo dei due problemi è quello che sappiamo già risolvere. Ci concentriamo dunque sul secondo. Richiamiamo per questo il Lemma 3.1.5.

Lemma 5.7.1 *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soddisfa $-Au \geq 0$ in Ω e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \geq 0$ in Ω.*

Introduciamo l'*operatore di Green*

$$\mathcal{G} : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$$
$$g \mapsto \mathcal{G}(g)$$

dove $u = \mathcal{G}(g)$ è l'unica soluzione classica del problema

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.43}$$

$\mathcal{G}$ è ben posto per quanto osservato prima ed è lineare per l'unicità della soluzione del problema (5.43).

La seguente proposizione elenca altre proprietà di $\mathcal{G}$.

Proposizione 5.7.2 *Siano g, g_1 e g_2 $\in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Allora risulta*

(1) $g \geq 0 \Rightarrow \mathcal{G}(g) \geq 0$;

(2) $g_1 \le g_2 \Rightarrow \mathcal{G}(g_1) \le \mathcal{G}(g_2)$*;*

(3) $\|\mathcal{G}(g)\|_\infty \le \|g\|_\infty k$*, dove* $k = \|\mathcal{G}(1)\|_\infty$.

DIM. La dimostrazione del punto (1) segue dal lemma richiamato poco sopra osservando che, posto $u = \mathcal{G}(g)$, risulta $Au = 0$ e $u = g \ge 0$ al bordo.

(2) segue dalla linearità di $\mathcal{G}$ e da (1).

Per (3) si ha infine

$$\begin{aligned} -\|g\|_\infty 1 \le g(x) \le \|g\|_\infty 1 \quad &\Rightarrow \quad -\|g\|_\infty \mathcal{G}(1) \le \mathcal{G}(g) \le \|g\|_\infty \mathcal{G}(1) \\ &\Rightarrow \quad \|\mathcal{G}(g)\|_\infty \le \|g\|_\infty k \end{aligned}$$

□

Per il nostro obiettivo è utile il seguente teorema, che dimostreremo in seguito.

Teorema 5.7.3 (Stime di Schauder interne) *Sia* $0 < \alpha < 1$*. Consideriamo l'operatore*

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

definito in Ω *aperto qualunque di* $\mathbb{R}^N$ *e tale che*

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \le k_0, \quad \nu_0 > 0$$

(non facciamo restrizioni sul segno di c*). Allora per ogni* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *esiste una costante* $c = c(\nu_0, k_0, \alpha, \mathit{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)) > 0$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha,\Omega_0} \le c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega) \left(\|Au\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right). \tag{5.44}$$

Proposizione 5.7.4 *Sia* Ω *di classe* $C^{2,\alpha}$ *e supponiamo* $c \le 0$*. Allora per ogni* $g \in C(\partial\Omega)$ *esiste un'unica* $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tale che*

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. L'unicità della soluzione segue dal principio del massimo 5.7.1. Dimostriamo l'esistenza. Siano $g \in C(\partial\Omega)$ e $\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$ estensione di g. Consideriamo una successione $(g_n) \subset C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $g_n \to \tilde{g}$ uniformemente in $\overline{\Omega}$. Per ogni n, $u_n = \mathcal{G}(g_n) \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ risolve

$$\begin{cases} Au_n = 0 & \text{in } \Omega \\ u_n = g_n & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e si ha

$$\|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega} = \|\mathcal{G}(g_n) - \mathcal{G}(g_m)\|_{\infty,\Omega} \le k\|g_n - g_m\|_{\infty,\partial\Omega}.$$

Ne segue che u_n converge a una funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ uniformemente in $\overline{\Omega}$ e siccome $u_{n|\partial\Omega} = g_n$ risulta $u_{|\partial\Omega} = g$.

Fissiamo $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Dal Teorema 5.7.3 sappiamo che

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{2,\alpha,\Omega_0} &\leq c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega)\left(\|Au_n - Au_m\|_{\alpha,\Omega} + \|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega}\right) \\ &= c(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega_0, \Omega)\|u_n - u_m\|_{\infty,\Omega}. \end{aligned}$$

Pertanto (u_n) è di Cauchy in $C^{2,\alpha}(\Omega_0)$. Da ciò segue che $u_n \to u$ in $C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ e quindi $u \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$. Data l'arbitrarietà di Ω_0 risulta dunque $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$. Infine passando al limite nell'equazione $Au_n = 0$ si ha che $Au = 0$.

□

Passiamo ora a formulare un risultato di risolubilità per il problema (5.42).

Teorema 5.7.5 *Sia Ω di classe $C^{2,\alpha}$ e supponiamo $c \leq 0$. Per ogni $g \in C(\partial\Omega)$ e per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Le tecniche già impiegate permettono di provare alcuni risultati di regolarità locale.

Corollario 5.7.6 *(i) Se Ω è di classe $C^{2,\alpha}$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ è tale che $Au \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

(ii) Sia Ω aperto qualsiasi: se $u \in C^2(\Omega)$ e $Au \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ allora $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$.

DIM. (i) Poniamo $f = Au \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia $v \in C^{2,\alpha}_0(\Omega)$ l'unica soluzione. Per differenza $u - v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ e $A(u - v) = 0$. Per unicità quindi $u = v$.

(ii) Consideriamo $B_R \subset\subset \Omega$ ed $f = Au \in C^{0,\alpha}(B_R)$. Il problema

$$\begin{cases} Av = f & \text{in } B_R \\ v = u & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $v \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(B_R) \cap C(\overline{B_R})$, per il Teorema 5.7.5. Pertanto la differenza $u - v$ appartiene a $C^{2,\alpha}(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ e risolve

$$\begin{cases} A(u-v) = 0 & \text{in } B_R \\ (u-v) = 0 & \text{su } \partial B_R. \end{cases}$$

Ne segue che $u = v$ in B_R e quindi $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(B_R)$. □

Riprendiamo il Teorema 5.7.3 di regolarità interna e diamo adesso la dimostrazione. Il passo fondamentale è nel seguente lemma.

Lemma 5.7.7 *Sia* $0 < \alpha < 1$. *Consideriamo l'operatore*

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

definito in B_{2R} *e tale che*

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \leq k_0, \quad \nu_0 > 0.$$

Allora esiste una costante positiva $C = C(\nu_0, k_0, \alpha, R)$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$ *risulta*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_R)} := \|u\|_{2,\alpha,R} \leq C(\nu_0, k_0, \alpha, R)(\|Au\|_{\alpha,2R} + \|u\|_{\infty,2R}). \quad (5.45)$$

DIM. Sia $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$. Definiamo la successione $R_n = R\sum_{j=0}^{n} 2^{-j}$. Allora $R_0 = R$, $R_\infty = 2R$ e $R_{n+1} - R_n = R\,2^{-(n+1)}$. Sia $\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq \eta_n \leq 1$, $\eta_n \equiv 1$ su $B_n := B_{R_n}$, supp$\eta_n \subseteq B_{n+1}$ e

$$\|D^k \eta_n\|_\infty \leq \frac{L}{R^k} 2^{k(n+1)},$$

per $k = 1, 2, 3$ e $L > 0$ indipendente da n. Applicando le stime di Schauder in $\mathbb{R}^N$ alla funzione $\eta_n u$ otteniamo

$$\|\eta_n u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \leq C(\nu_0, k_0, \alpha) \left([A(\eta_n u)]_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|\eta_n u\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \right). \quad (5.46)$$

Il commutatore $[A, \eta_n I]u = A(\eta_n u) - \eta_n Au$ è un operatore differenziale del primo ordine i cui coefficienti dipendono da quelli di A, dalla funzione η_n e dalle sue derivate fino al secondo ordine. Risulta pertanto

$$\|[A, \eta_n I]u\|_{\alpha,n+1} \leq C(k_0)\|u\|_{1,\alpha,n+1}\|\eta_n\|_{2,\alpha}.$$

Applicando il teorema di Lagrange si ha poi $\|\eta_n\|_{2,\alpha} \leq \|\eta_n\|_3 \leq 8R^{-3}8^n$. Allora

$$\|[A, \eta_n I]u\|_{\alpha,n+1} \leq C(k_0, R)8^n\|u\|_{1,\alpha,n+1}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} [\eta_n Au]_{\alpha,n+1} &\leq \|\eta_n\|_{\infty,n+1}[Au]_{\alpha,n+1} + [\eta_n]_{\alpha,n+1}\|Au\|_{\infty,n+1} \\ &\leq [Au]_{\alpha,n+1} + 2^n C(k_0, R)\|u\|_{2,n+1}. \end{aligned}$$

Quindi da (5.46) otteniamo

$$\|\eta_n u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \leq C(\nu_0, k_0, \alpha, R) \left([Au]_{\alpha,n+1} + 8^n\|u\|_{2,n+1} \right). \quad (5.47)$$

Siccome $C^2(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{2}{2+\alpha}}(C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N), C_b(\mathbb{R}^N))$, si ha

$$\|u\|_{2,n+1} \le \|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\mathbb{R}^N} \le C(N)\|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N}^{\frac{2}{2+\alpha}}\|\eta_{n+1}\,u\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Posto $\vartheta = \frac{2}{2+\alpha}$, si ha allora per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\mathbb{R}^N} \le C(N)\left(\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}}\|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} + \varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}}\|\eta_{n+1}\,u\|_{\infty}\right).$$

La stima (5.47) allora fornisce

$$\begin{aligned}\|\eta_n\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \quad &\le \quad C(\nu_0,k_0,\alpha,R)\Big(\|Au\|_{\alpha,2R} + 8^n\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}}\|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \\ &\qquad + 8^n\varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}}\|u\|_{\infty,2R}\Big).\end{aligned}$$

Scegliamo $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ t.c. $C8^n\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}} = \xi$ con $\xi > 0$ indipendente da n. Con questa scelta $C8^n\varepsilon^{-\frac{1}{1-\vartheta}} = C_1 8^{\frac{n}{1-\vartheta}}\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}$ e quindi

$$\|\eta_n\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \le C\|Au\|_{\alpha,2R} + \xi\,\|\eta_{n+1}\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} + C_1\,8^{\frac{n}{1-\vartheta}}\,\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}\,\|u\|_{\infty,2R}.$$

Prendendo $\xi < 1$ in modo tale che $8^{\frac{1}{1-\vartheta}}\xi < 1$, moltiplicando l'ultima stima per ξ^n e sommando su n si vede che tutte le serie convergono e che

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\|\eta_n\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \quad &\le \quad \frac{C}{1-\xi}\|Au\|_{\alpha,2R} + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\|\eta_n\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \\ &\qquad + \frac{C_2}{1-\xi\,8^{\frac{1}{1-\vartheta}}}\|u\|_{\infty,2R}\end{aligned}$$

con $C_2 = C_1\xi^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}$. Pertanto

$$\|u\|_{2,\alpha,R} \le \|\eta_0\,u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} \le \frac{C}{1-\xi}\|Au\|_{\alpha,2R} + \frac{C_2}{1-\xi\,8^{\frac{1}{1-\vartheta}}}\|u\|_{\infty,2R}.$$

□

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.7.3 Siano $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Poniamo $d = \mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ e sia $R < \frac{d}{2}$. Con questa scelta, se $x_0 \in \Omega_0$ allora $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ e applicando il lemma precedente abbiamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha,B_R(x_0)} \quad &\le \quad C(\nu_0,k_0,\alpha,R)(\|Au\|_{\alpha,B_{2R}(x_0)} + \|u\|_{\infty,B_{2R}(x_0)}) \\ &\le \quad C(\nu_0,k_0,\alpha,R)(\|Au\|_{\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}).\end{aligned}$$

Facendo variare $x_0 \in \Omega_0$ con un numero finito di palle si ottiene la tesi. □

5.8 Stime di Schauder di ordine superiore

Nelle sezioni precedenti abbiamo assunto che i coefficienti dell'operatore A e il dato f fossero di classe $C^{0,\alpha}$ e abbiamo provato esistenza e unicità della soluzione dell'equazione $\lambda u - Au = f$ con condizioni di Dirichlet nella classe $C^{2,\alpha}$. In questa sezione studiamo regolarità superiore della soluzione in presenza di maggiore regolarità dei coefficienti di A e di f.

Come al solito

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

e sia $\nu_0 > 0$ la costante di ellitticità uniforme. Il punto cruciale è costituito dalla seguente stima interna.

Teorema 5.8.1 *Siano $k \in \mathbb{N}_0$ e $R > 0$ e assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(B_{2R})$ con $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;B_{2R}}, \|b_i\|_{k,\alpha;B_{2R}}, \|c\|_{k,\alpha;B_{2R}} \leq k_0$. Sia $u \in C^{2,\alpha}(B_{2R})$ tale che $Au = f \in C^{k,\alpha}(B_{2R})$. Allora $u \in C^{k+2,\alpha}(B_R)$ ed esiste $C = C(\nu_0, k_0, k, \alpha, R)$ > 0 tale che*

$$\|u\|_{k+2,\alpha;B_R} \leq C\left(\|Au\|_{k,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}\right).$$

DIM. Per $k = 0$ il risultato segue dal Teorema 5.7.3. Proviamolo per $k = 1$. Se $r \in \{1, ..., N\}$ e $0 < h < R/4$, introduciamo il quoziente differenziale di u nella direzione di e_r definito da

$$\delta_{h,r}u(x) = \frac{u(x + he_r) - u(x)}{h}.$$

Siccome

a) $\delta_{h,r}(\phi u)(x) = \phi(x + he_r)\delta_{h,r}u(x) + \delta_{h,r}\phi(x)u(x)$,

b) $\delta_{h,r}Du = D\delta_{h,r}u$, con Du generica derivata di u,

se $Au = f$ si verifica facilmente che $v = \delta_{h,r}u$ soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} Av(x) &= \delta_{h,r}f(x) - \sum_{i,j=1}^{N}(\delta_{h,r}a_{ij})(x)D_{ij}u(x + he_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N}(\delta_{h,r}b_i)(x)D_i u(x + he_r) - (\delta_{h,r}c)(x)u(x + he_r) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Siccome per ipotesi $D_r f \in C^{0,\alpha}(B_{2R})$, dalla rappresentazione

$$(\delta_{h,r}f)(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds}f(x + hse_r)ds = \int_0^1 (D_r f)(x + hse_r)ds$$

e dal fatto che $0 < h < R/4$ si vede che $\delta_{h,r} f \in C^{0,\alpha}(B_{\frac{3R}{2}})$ con $\|\delta_{h,r} f\|_{\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} \leq \|D_r f\|_{\alpha;B_{2R}}$. Analogamente $\delta_{h,r} a_{ij},\ \delta_{h,r} b_i,\ \delta_{h,r} c \in C^{0,\alpha}(B_{3R/2})$ e

$$\|\delta_{h,r} a_{ij}\|_{\alpha;B_{3R/2}},\ \|\delta_{h,r} b_i\|_{\alpha;B_{3R/2}},\ \|\delta_{h,r} c\|_{\alpha;B_{3R/2}} \leq k_0.$$

Applicando le stime interne (5.44) alla funzione v con $\Omega = B_{3R/2}$ e $\Omega_0 = B_R$ otteniamo

$$\|v\|_{2,\alpha;B_R} \leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|g\|_{\alpha;B_{3R/2}} + \|v\|_{\infty;B_{3R/2}}),$$

ossia $(\delta_{h,r} u)$ è equilimitata rispetto ad h in $C^{2,\alpha}(B_R)$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste un'estratta che, per $h \to 0$, converge uniformemente con derivate prime e seconde a $D_r u$, che è il limite puntuale di $\delta_{h,r} u$. Ne segue che $D_r u \in C^{2,\alpha}(B_R)$, pertanto è lecito derivare l'equazione $Au = f$ rispetto a x_r ottenendo

$$A(D_r u) = D_r f - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u. \tag{5.48}$$

Applicando due volte (5.44) risulta

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{2,\alpha;B_R} &\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|D_r f\|_{\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} + \|u\|_{2,\alpha;B_{\frac{3R}{2}}} \\
&\quad + \|D_r u\|_{\infty;B_{\frac{3R}{2}}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|D_r f\|_{\alpha;B_{3R/2}} + \|f\|_{\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, R, \alpha)(\|f\|_{1,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}).
\end{aligned}$$

Risulta così provato il teorema per $k = 1$. Notiamo che in realtà gli stessi argomenti provano che $D_r u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$, per ogni r e l'equazione (5.48) è soddisfatta puntualmente in B_{2R}.

Sia $k \geq 1$, supponiamo l'asserto vero per k e proviamolo per $k+1$. Assumiamo pertanto che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k+1,\alpha}(B_{2R})$, $f \in C^{k+1,\alpha}(B_{2R})$. L'ipotesi induttiva già assicura che $u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$. Inoltre, se $r \in \{1, ..., N\}$, allora $D_r u$ verifica l'equazione (5.48) in B_{2R}. Per l'ipotesi del passo $k+1$, il secondo membro appartiene a $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$. Applicando l'ipotesi induttiva otteniamo quindi che $D_r u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{2R})$ e

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{k+2,\alpha;B_R} &\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha)(\|D_r f\|_{k,\alpha;B_{3R/2}} + \|u\|_{k+2,\alpha;B_{3R/2}}) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha)(\|f\|_{k+1,\alpha;B_{2R}} + \|u\|_{\infty;B_{2R}}).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di r segue la tesi. □

Ora ci proponiamo di applicare le stime interne dimostrate per regolarizzare la soluzione $C^{2,\alpha}$ ottenuta nelle sezioni precedenti nel caso in cui i dati del problema siano più regolari. Esaminiamo in ordine i casi dell'intero spazio, del semispazio e di un aperto limitato regolare.

Proposizione 5.8.2 *Siano* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $\lambda > 0$ *e assumiamo che* $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *con* $c \leq 0$*. Sia* $k_0 > 0$ *tale che* $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}, \|b_i\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}, \|c\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq k_0$*. Se* $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$*, allora la soluzione* $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *dell'equazione* $\lambda u - Au = f$ *appartiene a* $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N}. \tag{5.49}$$

DIM. Per $k = 0$ la tesi è provata dal Teorema 5.4.4 e dalla stima (5.15). Assumiamo quindi $k \geq 1$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, allora sicuramente $Au = \lambda u - f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando il Teorema 5.8.1 con $k = 1$, $B_1(x_0)$ e $B_2(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ arbitrario, risulta che $u \in C^{3,\alpha}(B_1(x_0))$ e tenendo conto della stima (5.15) si ha

$$\begin{aligned}
\|u\|_{3,\alpha;B_1(x_0)} &\leq C(\nu_0, k_0, 1, \alpha, \lambda)\left(\|Au\|_{1,\alpha;B_2(x_0)} + \|u\|_{\infty;B_2(x_0)}\right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\left(\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N} + \|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}\right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\left(\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N} + \|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N}\right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore su x_0 otteniamo che $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e soddisfa la stima $\|u\|_{3,\alpha;\mathbb{R}^N} \leq C\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}$. Iterando il procedimento si completa la dimostrazione. □

Proposizione 5.8.3 *Siano* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $\lambda > 0$ *e assumiamo che* $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ *con* $c \leq 0$*. Sia* $k_0 > 0$ *tale che* $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}, \|b_i\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}, \|c\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq k_0$*. Se* $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ *allora la soluzione* $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ *del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+\\ u = 0 & \textit{su } \mathbb{R}^{N-1}\end{cases}$$

appartiene a $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ *e* $\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)\|(\lambda - A)u\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$.

DIM. Il Teorema 5.5.4 e il Corollario 5.5.2 provano la tesi per $k = 0$. Sia adesso $k \geq 1$. Osserviamo che per regolarità interna $u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$. In particolare $u \in C^{k+2}(\mathbb{R}^N_+)$ e quindi si può derivare l'equazione $\lambda u - Au = f$. Se $r \leq N - 1$, allora la derivata tangenziale $D_r u$ soddisfa ancora la stessa condizione al bordo per cui, posto $v = D_r u$, risulta

$$\begin{cases} \lambda v - Av = D_r f + \displaystyle\sum_{i,j=1}^N D_r a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^N D_r b_i D_i u + D_r c\, u = g & \text{in } \mathbb{R}^N_+\\ v = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1}\end{cases}$$

Osserviamo che $v \in C_b(\mathbb{R}^N_+) \cap C^2(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre, esiste $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che

$$\begin{cases} \lambda w - Aw = g & \text{in } \mathbb{R}^N_+\\ w = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1}\end{cases}$$

Per unicità (Teorema 3.1.13) $v = w$ e quindi $D_r u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e tenendo conto della stima del Corollario 5.5.2 risulta

$$\begin{aligned}\|D_r u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,(\|D_r f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}) \\ &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \lambda)\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}.\end{aligned}$$

Rimane da stimare la derivata terza di u rispetto a x_N. Derivando l'equazione $\lambda u - Au = f$ rispetto a x_N e ricavando $D^3_N u$ otteniamo

$$\begin{aligned}D^3_N u &= \frac{1}{a_{NN}}\Bigg(\lambda D_N u - D_N f - \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij} D_{ij} D_N u - \sum_{i,j=1}^N D_N a_{ij} D_{ij} u \\ &\quad - \sum_{i=1}^N D_N b_i D_i u - D_N c\, u\Bigg)\end{aligned}$$

e quindi la stima di $\|D^3_N u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ segue da quella già fatta per le altre derivate. In definitiva $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $\|u\|_{3,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\,\|f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$.

Ripetendo lo stesso argomento per un numero finito di passi si giunge alla tesi. □

Osservazione 5.8.4 Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, allora esiste un'unica $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

e

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\nu_0, k_0, k, \lambda, \alpha)(\|f\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}).$$

Infatti, basta prendere $\tilde{g} \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ estensione di g tale che $\|\tilde{g}\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$ e scrivere la soluzione nella forma $u = v + \tilde{g}$, dove $v \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risolve

$$\begin{cases} \lambda v - Av = f - (\lambda\tilde{g} - A\tilde{g}) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Nel caso di un aperto limitato Ω di classe $C^{k+2,\alpha}$ lo stesso risultato si ottiene mediante carte locali e partizioni dell'unità.

Proposizione 5.8.5 *Sia Ω un aperto limitato di classe $C^{k+2,\alpha}$ in $\mathbb{R}^N$, con $k \in \mathbb{N}_0$. Supponiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ con $c \leq 0$ e $\|a_{ij}\|_{k,\alpha;\Omega}, \|b_i\|_{k,\alpha;\Omega}$, $\|c\|_{k,\alpha;\Omega} \leq k_0$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, allora la soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} Au = f & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

appartiene a $C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ e $\|u\|_{k+2,\alpha;\Omega} \leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha, \Omega)\|f\|_{k,\alpha;\Omega}$.

DIM. Sia $k \geq 1$. Per ogni $x \in \partial\Omega$ sia (U_x, H_x) carta locale con

$$\begin{aligned}
&H_x : \overline{B_1} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{k+2,\alpha},\\
&H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1} \text{ di classe } C^{k+2,\alpha},\\
&H_x(B_1^+) = U_x \cap \Omega.
\end{aligned}$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ sia $B(x, 2R_x) \subset \Omega$. Per compattezza si ha

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i u$.

Se $i \leq n_1$, dal Teorema 5.8.1 risulta $\eta_i u \in C^{k+2,\alpha}(B(x_i, R_{x_i}))$ e

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{k+2,\alpha,\Omega} &= \|\eta_i u\|_{k+2,\alpha,B(x_i,R_{x_i})}\\
&\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha) \Big(\|A(\eta_i u)\|_{k,\alpha,B(x_i,2R_{x_i})}\\
&\qquad + \|\eta_i u\|_{\infty,B(x_i,2R_{x_i})} \Big)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha) \left(\|A(\eta_i u)\|_{k,\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega} \right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, k, \alpha, \Omega) \left(\|Au\|_{k,\alpha,\Omega} + \|u\|_{k+2,\Omega} \right).
\end{aligned}$$

Sia adesso $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Consideriamo il cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)), \quad y \in B_1^+$$

e osserviamo che $v_i \in C^{2,\alpha}(B_1^+)$ con $v_i = 0$ su $B_1 \cap \mathbb{R}^{N-1}$ e supp $v_i \subset B_{\frac{1}{2}}$. Indichiamo con $\tilde{A}_i$ l'operatore in B_1^+, ottenuto da A mediante il cambio di variabili considerato (per una rappresentazione esplicita vedi (5.34)). Notiamo che i coefficienti di $\tilde{A}_i$ appartengono a $C^{k,\alpha}(B_1^+)$. Inoltre, si ha che $A(\eta_i u)(x) = \eta_i(x) f(x) + B_i u(x) = g_i(x)$, dove B_i è un operatore differenziale del primo ordine con coefficienti che dipendono dal cambio di variabili e $g_i \in C^{1,\alpha}(U_{x_i} \cap \Omega)$ con supp $g_i \subset V_{x_i}$. Pertanto la funzione v_i soddisfa $(\tilde{A}_i v_i)(y) = \tilde{g}_i(y) := g_i(H_i(y)) \in C^{1,\alpha}(B_1^+)$ con supp $\tilde{g}_i \subset B_{\frac{1}{2}}$. Dalla Proposizione 5.8.3 segue che $v_i \in C^{3,\alpha}(B_{\frac{1}{2}}^+)$ e

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_{3,\alpha,B_1^+} &\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|\tilde{A} v_i\|_{1,\alpha,B_1^+} + \|v_i\|_{\infty,B_{\frac{1}{2}}^+} \right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|A(\eta_i u)\|_{1,\alpha,U_{x_i}\cap\Omega} + \|\eta_i u\|_{\infty,U_{x_i}\cap\Omega} \right)\\
&\leq C(\nu_0, k_0, H_i) \left(\|\eta_i f\|_{1,\alpha,\Omega} + \|B_i u\|_{1,\alpha,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega} \right).
\end{aligned}$$

Ne segue che $\eta_i u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ e

$$\|\eta_i u\|_{3,\alpha,\Omega} \leq C(\nu_0, k_0, \Omega)\left(\|f\|_{1,\alpha,\Omega} + \|u\|_{3,\Omega}\right).$$

Ripetendo il procedimento un numero finito di passi, si trova che $\eta_i u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ e

$$\|\eta_i u\|_{k+2,\alpha;\Omega} \leq C(\|f\|_{k,\alpha;\Omega} + \|u\|_{k+2,\Omega}),$$

con $C = C(\nu_0, k_0, \alpha, k, \Omega)$.
Sommando su $i = 1, \cdots, n$, interpolando $\|u\|_{k+2,\Omega}$ tra $\|u\|_{k+2,\alpha,\Omega}$ e $\|u\|_{\infty,\Omega}$ e stimando quest'ultimo termine mediante il principio del massimo 3.1.9, concludiamo la dimostrazione. $\square$

CAPITOLO 6

STIME DI SCHAUDER PER IL PROBLEMA CON DERIVATA OBLIQUA

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Consideriamo l'operatore differenziale

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i + c(x). \tag{6.1}$$

In questo capitolo ci proponiamo di studiare il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.2}$$

sotto opportune ipotesi di regolarità per l'aperto Ω, per i coefficienti di A, per quelli dell'operatore al bordo e per i dati f e g.

6.1 PRINCIPI DEL MASSIMO

In questa sezione supponiamo che Ω sia un aperto limitato di classe C^1 oppure il semispazio $\mathbb{R}^N_+$, che $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c$ siano funzioni continue e limitate in $\overline{\Omega}$ con $c \leq 0$. Inoltre assumiamo che a, b siano funzioni continue e limitate su $\partial\Omega$ e siano tali che $|b| = 1$ e, denotata con ν la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, sia soddisfatta la condizione di non tangenzialità

$$b \cdot \nu \geq \varepsilon_0 > 0. \tag{6.3}$$

Assumiamo anche che $a \geq 0$. Questa ulteriore ipotesi sarà completamente rimossa nel teorema finale 6.4.7.

Proposizione 6.1.1 *Sia Ω un aperto limitato di classe C^1 e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di (6.2) con $\lambda > 0$, $f \in C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Se $a \geq a_0 > 0$ allora*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty,$$

se $a \geq 0$ e $g \equiv 0$ allora

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema di Weierstrass, u ammette massimo in qualche $x_0 \in \overline{\Omega}$. Senza perdere di generalità, assumiamo che $u(x_0) = \|u\|_\infty > 0$. Se $x_0 \in \Omega$, allora $Au(x_0) \leq 0$ (cfr. la dimostrazione del Teorema 3.1.2) e quindi

$$\lambda\|u\|_\infty = \lambda u(x_0) \leq \lambda u(x_0) - Au(x_0) \leq \|f\|_\infty.$$

Se $x_0 \in \partial\Omega$, allora $\frac{\partial u}{\partial b}(x_0) \geq 0$, perchè x_0 è punto di massimo e vale la condizione di non tangenzialità $b \cdot \nu > 0$. Quindi, se $a \geq a_0 > 0$ segue che

$$a_0\|u\|_\infty = a_0 u(x_0) \leq a(x_0)u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = g(x_0) \leq \|g\|_\infty$$

e la tesi è provata nel primo caso.

Assumiamo ora che $a \geq 0$ e che $g \equiv 0$. Se $x_0 \in \partial\Omega$ e $a(x_0) > 0$ l'equazione

$$a(x_0)u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = 0$$

è impossibile e quindi necessariamente $x_0 \in \Omega$. Se $a(x_0) = 0$ allora la stessa equazione implica che $\frac{\partial u}{\partial b}(x_0) = 0$. Siccome $u_{|\partial\Omega}$ ha un massimo relativo in x_0 anche $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_0) = 0$ per ogni vettore τ tangente a $\partial\Omega$. Ne segue che $\nabla u(x_0) = 0$ e come prima $Au(x_0) \leq 0$. Pertanto $\lambda\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. □

Proviamo adesso alcuni principi del massimo nel semispazio.

Lemma 6.1.2 *Siano $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ una soluzione limitata di (6.2), con $\lambda > 0$, $f \in C(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ e $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+)$. Assumiamo che $a \geq a_0 > 0$. Allora*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty.$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria $v(x) = \gamma + |x|^2$ e scegliamo il parametro $\gamma > 0$ affinchè $\lambda v - Av \geq 0$. Poniamo $w = u - \frac{\|u\|_\infty}{\gamma + R^2}v$ in $B_R^+ = \mathbb{R}^N_+ \cap B_R$. Risulta

$$\begin{cases} \lambda w - Aw \leq f & \text{in } B_R^+ \\ w \leq 0 & \text{su } \partial B_R \cap \mathbb{R}^N_+ \\ aw + \dfrac{\partial w}{\partial b} = g - \dfrac{\|u\|_\infty}{\gamma + R^2}\left(av + \dfrac{\partial v}{\partial b}\right) \leq g + C\dfrac{R}{\gamma + R^2}\|u\|_\infty & \text{su } B_R \cap \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Con argomenti analoghi a quelli della proposizione precedente si trova che

$$w(x) \leq \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty + \frac{C}{a_0}\,\frac{R}{\gamma + R^2}\|u\|_\infty\,, \quad x \in B_R^+$$

e quindi

$$u(x) \leq \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty + \frac{\|u\|_\infty}{\gamma + R^2}\,v(x) + \frac{C}{a_0}\,\frac{R}{\gamma + R^2}\|u\|_\infty\,, \quad x \in B_R^+.$$

Mandando $R \to \infty$ si ottiene $u(x) \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{a_0}\|g\|_\infty$ e scambiando u con $-u$ la dimostrazione è completa. □

Se l'estremo inferiore della funzione a risulta nullo, il risultato seguente non è preciso come nel caso di un aperto limitato.

Proposizione 6.1.3 *Sia $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ una soluzione limitata di (6.2). Allora esiste $\lambda_0 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_0$, $f \in C(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ e $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{2}{\lambda - \lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{2}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty,$$

dove ε_0 è dato in (6.3).

DIM. Sia $\phi(x) = 1 - \dfrac{1}{x_N + 2}$, $x \in \mathbb{R}^N_+$. Chiaramente

$$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1, \quad \phi(x', 0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x', 0) = \frac{1}{4}\,.$$

Posto $v = \phi u$, è facile verificare che

$$\begin{aligned} Av &= \phi Au + \frac{2}{\phi}\sum_{i=1}^N a_{iN} D_N\phi D_i v \\ &\quad + \frac{v}{\phi}\left(a_{NN}D_{NN}\phi + b_N D_N\phi - \frac{2}{\phi}a_{NN}(D_N\phi)^2\right). \end{aligned}$$

Pertanto se

$$\tilde{A} = A - \frac{2}{\phi}\sum_{i=1}^N a_{iN}D_N\phi D_i + \frac{1}{\phi}\left(a_{NN}D_{NN}\phi + b_N D_N\phi - \frac{2}{\phi}a_{NN}(D_N\phi)^2\right)$$

risulta che $\tilde{A}v = \phi Au$ e quindi

$$\lambda v - \tilde{A}v = \phi f.$$

Per quanto riguarda la condizione la bordo soddisfatta da v, osserviamo che $\dfrac{\partial\phi}{\partial b} = b_N\dfrac{\partial\phi}{\partial x_N} = \dfrac{1}{4}b_N$ su $\partial\mathbb{R}^N_+$. Siccome $\phi(x', 0) = 1/2$, risulta

$$\frac{\partial v}{\partial b} = \phi\frac{\partial u}{\partial b} + u\frac{\partial\phi}{\partial b} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{1}{2}b_N v, \quad \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+$$

Otteniamo così

$$au + \frac{\partial u}{\partial b} = 2av + \left(2\frac{\partial v}{\partial b} - b_N v\right) = (2a - b_N)\, v + 2\frac{\partial v}{\partial b} \quad \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+$$

ossia

$$\begin{cases} \lambda v - \tilde{A}v = \phi f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \left(a - \dfrac{1}{2}\, b_N\right) v + \dfrac{\partial v}{\partial b} = \dfrac{1}{2}\, g & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Il coefficiente di ordine zero di $\tilde{A}$ è dato da

$$\tilde{c} = c - \frac{1}{\phi}\left(a_{NN} D_{NN}\phi + b_N D_N\phi - \frac{2}{\phi} a_{NN} (D_N\phi)^2\right).$$

Sia $\lambda_0 := \sup \tilde{c}$. Se dunque $\lambda > \lambda_0$, tenendo conto che $a - \frac{1}{2} b_N \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$ e applicando il Lemma 6.1.2 a v, otteniamo

$$\|v\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\|\phi f\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty,$$

e quindi

$$\|u\|_\infty \leq \frac{2}{\lambda - \lambda_0}\|f\|_\infty + \frac{2}{\varepsilon_0}\|g\|_\infty.$$

□

Osservazione 6.1.4 Il numero λ_0 dipende solamente dalla norma del sup dei coefficienti di A. In particolare, λ_0 è lo stesso per tutti gli operatori i cui coefficienti soddisfano la stima $\|a_{NN}\|_\infty, \|b_N\|_\infty \leq k_0$.

6.2 Problema con derivata obliqua per il Δ in $\mathbb{R}^N_+$

In questa sezione ci proponiamo di studiare il problema con derivata obliqua nel caso del Δ nel semispazio $\mathbb{R}^N_+$. I punti cruciali sono:

1. risolvere il problema di Neumann,
2. provare delle stime a priori con un operatore al bordo della forma $au + \dfrac{\partial u}{\partial b}$, con a e b costanti, $a \geq 0$, $b_N < 0$.

Mediante il metodo di continuità dedurremo esistenza ed unicità per il problema relativo al Δ con un operatore al bordo del tipo considerato al punto 2.

Cominciamo a provare un risultato di estensione.

Lemma 6.2.1 *Data $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, esiste $h \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $h(x',0) = 0$ e $D_N h(x',0) = g(x')$. Inoltre $\|h\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$, con $C = C(N)$.*

DIM. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, con $0 \le \eta \le 1$ e $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \eta = 1$. Consideriamo la funzione

$$\tilde{h}(x', x_N) = x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x' - x_N y')\eta(y')dy'.$$

È chiaro che $\tilde{h}(x',0) = 0$ e che $|\tilde{h}(x',x_N)| \le x_N\|g\|_\infty$. Inoltre se $i < N$, risulta

$$D_i\tilde{h}(x', x_N) = x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\eta(y')dy'$$

e quindi $|D_i\tilde{h}(x',x_N)| \le x_N\|D_i g\|_\infty$. Siccome

$$\begin{aligned} D_N\tilde{h}(x', x_N) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x' - x_N y')\eta(y')dy' \\ &\quad -x_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y')\cdot y'\eta(y')dy' \end{aligned} \tag{6.4}$$

otteniamo $D_N\tilde{h}(x',0) = g(x')$ e $|D_N\tilde{h}(x',x_N)| \le \|g\|_\infty + C\,x_N\|\nabla g\|_\infty$, dove C è una costante che dipende da η. Per stimare le derivate seconde di $\tilde{h}$, non potendo derivare ulteriormente g facciamo prima un cambio di variabili ottenendo per $i < N$

$$D_i\tilde{h}(x', x_N) = \frac{1}{x_N^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(y')\eta\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right)dy'.$$

Se anche $j < N$ allora

$$\begin{aligned} D_{ij}\tilde{h}(x', x_N) &= \frac{1}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(y')\, D_j\eta\left(\frac{x'-y'}{x_N}\right)dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\, D_j\eta(y')dy', \end{aligned}$$

da cui segue facilmente che $\|D_{ij}\tilde{h}\|_\infty \le C\|D_i g\|_\infty$. Inoltre

$$\begin{aligned} & |D_{ij}\tilde{h}(x', x_N) - D_{ij}\tilde{h}(\xi', \xi_N)| \\ \le\ & [D_i g]_\alpha \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |(x'-\xi') - (x_N - \xi_N)y'|^\alpha |D_j\eta(y')|dy' \\ \le\ & C[D_i g]_\alpha |(x', x_N) - (\xi', \xi_N)|^\alpha, \end{aligned}$$

ossia $[D_{ij}\tilde{h}]_\alpha \leq C[D_i g]_\alpha$. Per calcolare $D_{iN}\tilde{h}$ con $i < N$, deriviamo rispetto a x_i la (6.4) e, posto $\tilde{\eta}(y') = y'\eta(y')$, otteniamo

$$\begin{aligned} D_{iN}\tilde{h}(x', x_N) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\, \eta(y') dy' \\ &\quad - \frac{1}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y')\, D_i \tilde{\eta} \left(\frac{x' - y'}{x_N} \right) dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D_i g(x' - x_N y')\, \eta(y') dy' \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y')\, D_i (y' \eta(y')) dy' \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' D_i \eta(y') dy'. \end{aligned}$$

Da ciò seguono le stime per $\|D_{iN}\tilde{h}\|_\infty$ e $[D_{iN}\tilde{h}]_\alpha$ come prima. Infine

$$\begin{aligned} D_{NN}\tilde{h}(x', x_N) &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' \eta(y') dy' \\ &\quad + \frac{N-2}{x_N^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y') \cdot \tilde{\eta} \left(\frac{x' - y'}{x_N} \right) dy' \\ &\quad + \frac{1}{x_N^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(y') \cdot \\ &\qquad \cdot \left(\nabla \tilde{\eta}_i \left(\frac{x' - y'}{x_N} \right) \cdot \frac{x' - y'}{x_N^2} \right)_{i=1}^{N-1} dy' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' \eta(y') dy' \\ &\quad + (N-2) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' \eta(y') dy' \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot (\nabla \tilde{\eta}_i(y') \cdot y')_{i=1}^{N-1} dy'. \end{aligned}$$

Siccome $\tilde{\eta}_i(y') = y_i' \eta(y')$, risulta $\nabla \tilde{\eta}_i(y') = y_i' \nabla \eta + \eta e_i$ e $y' \cdot \nabla \tilde{\eta}_i(y') = y_i' y' \cdot \nabla \eta + \eta y_i'$. Ne segue che

$$D_{NN}\tilde{h}(x', x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla_{x'} g(x' - x_N y') \cdot y' \big((N-2)\eta(y') + y' \cdot \nabla \eta(y') \big) dy'$$

e si procede come sopra per stimare $\|D_{NN}\tilde{h}\|_\infty$ e $[D_{NN}\tilde{h}]_\alpha$. Per conseguire la tesi basta porre $h(x', x_N) = \psi(x_N)\tilde{h}(x', x_N)$ con ψ regolare e tale che $\psi \equiv 1$ per $0 \leq x_N \leq 1$ e $\psi \equiv 0$ per $x_N \geq 2$. $\square$

Usiamo adesso questo risultato per risolvere il problema di Neumann associato al Δ nel semispazio.

Proposizione 6.2.2 *Sia $\lambda > \lambda_0$, dove λ_0 è fissato come nella Proposizione 6.1.3. Il problema*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N} = g & \textit{su } \partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{6.5}$$

con dati $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ ammette un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre si ha la stima

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C(\alpha,\lambda)\left(\|f\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\right).$$

Se $g \equiv 0$, allora $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ per $\lambda \to +\infty$.

DIM. L'unicità discende dalla Proposizione 6.1.3. Riguardo all'esistenza, sia $h \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $h(x',0) = 0$ e $D_N h(x',0) = g(x')$ con $\|h\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$ (tale funzione esiste per il Lemma 6.2.1). Cerchiamo la soluzione nella forma $u = v + h$. Quindi v soddisfa

$$\begin{cases} \lambda v - \Delta v = f - (\lambda h - \Delta h) =: f_1 & \text{in } \mathbb{R}^N_+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_N} = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

Inoltre $\|f_1\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} \le C(\lambda)\Big(\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha:\mathbb{R}^{N-1}}\Big)$. Allora basta risolvere il problema (6.5) con $g \equiv 0$. Consideriamo l'estensione pari di f rispetto all'ultima variabile

$$\tilde{f}(x',x_N) = \begin{cases} f(x',x_N) & x_N \ge 0 \\ f(x',-x_N) & x_N < 0 \end{cases}$$

Chiaramente $\|\tilde{f}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N} \le 2\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$. Per il Teorema 5.4.3, esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\lambda u - \Delta u = \tilde{f}$ in $\mathbb{R}^N$ e $\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N} \le C(\alpha,\lambda)\|\tilde{f}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N}$. Posto $\tilde{u}(x',x_N) = u(x',-x_N)$, è immediato verificare che $\lambda\tilde{u} - \Delta\tilde{u} = \tilde{f}$ in $\mathbb{R}^N$, per cui, per unicità, $\tilde{u} = u$, ossia u è pari in x_N e quindi $\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',0) = 0$. Quindi la restrizione di u a $\mathbb{R}^N_+$ è la soluzione cercata.
La stima per $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ se $g \equiv 0$ segue direttamente da quella per $\|u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N}$ (Corollario 5.4.6). □

Prima di passare allo studio del problema con derivata obliqua facciamo delle considerazioni preliminari. Dall'Osservazione 5.8.4 sappiamo che fissato $k \in \mathbb{N}$ e prese $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ che soddisfa la stima

$$\|u\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\alpha, k, \lambda)\Big(\|f\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big).$$

In particolare, sia $\Pi_\lambda g$ la soluzione con $f \equiv 0$. Allora la stima precedente implica che $\Pi_\lambda : C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}) \to C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ è un operatore continuo, per ogni $k = 0, 1, \ldots$. Osserviamo che dalle stime interne, $u = \Pi_\lambda g \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ e quindi si può derivare l'equazione $\lambda u - \Delta u = 0$ quante volte si vuole. Se $\Delta_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} D_{ii}$, risulta pertanto

$$\begin{cases} \lambda \Delta_{N-1}\, u - \Delta(\Delta_{N-1} u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ \Delta_{N-1}\, u = \Delta_{N-1}\, g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

ossia $\Delta_{N-1}\Pi_\lambda = \Pi_\lambda \Delta_{N-1}$, per unicità. Ne segue che $(I - \Delta_{N-1})\Pi_\lambda = \Pi_\lambda(I - \Delta_{N-1})$ e applicando le stime in $\mathbb{R}^{N-1}$ ((5.49)) risulta

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda(I - \Delta_{N-1})g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &= \|(I - \Delta_{N-1})\Pi_\lambda g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \\ &\leq C_1 \|\Pi_\lambda g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \\ &\leq C_2 \|g\|_{k+2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \\ &\leq C_3 \|(I - \Delta_{N-1})g\|_{k,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}. \end{aligned}$$

Siccome $I - \Delta_{N-1}$ è invertibile da $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ in $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$, risulta provato il seguente lemma.

Lemma 6.2.3 *L'operatore $\Pi_\lambda : C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}) \to C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ è continuo per ogni $k = 0, 1, \ldots, \lambda > 0$.*

Useremo il Lemma 6.2.3 con $k = 1$.

Nel teorema che segue proviamo stime a priori nel caso del Δ per condizioni al bordo a coefficienti costanti.

Teorema 6.2.4 *Sia $\lambda > \lambda_0$ (cfr. Proposizione 6.1.3) e siano $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$ tali che $0 \leq a \leq M$ e $|b| = 1$, $b_N \leq -\varepsilon_0$. Allora esiste una costante $C = C(\alpha, \lambda, M, \varepsilon_0) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ soluzione di*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \textit{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases} \tag{6.6}$$

risulta

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}). \tag{6.7}$$

Dim. Sia $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \lambda v - \Delta v = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Allora $\|v\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\,\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$. Inoltre possiamo scrivere $u = v + w$ dove w risolve

$$\begin{cases} \lambda w - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ aw + \dfrac{\partial w}{\partial b} = g - \dfrac{\partial v}{\partial b} =: h & \text{su } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Naturalmente $\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \leq C(\alpha,\lambda,M)\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$. Posto $z = aw + \dfrac{\partial w}{\partial b}$, risulta

$$\begin{cases} \lambda z - \Delta z = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ z = h & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

(notiamo che $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$).
Per il Lemma 6.2.3, si ha $\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\lambda)\,\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$. Inoltre

$$\sum_{i,j=1}^{N} b_i b_j D_{ij} w - \sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w = -b_N^2 D_{NN} w + 2\sum_{i=1}^{N} b_i b_N D_{iN} w$$

da cui possiamo ricavare

$$\begin{aligned} D_{NN}w &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N} b_i b_j D_{ij} w + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w + \frac{2}{b_N}\sum_{i=1}^{N} b_i D_{iN} w \\ &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) + \frac{2}{b_N} D_N\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w \\ &= -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j z + \frac{a}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j w + \frac{2}{b_N} D_N z - \frac{2\,a}{b_N} D_N w \\ &\quad + \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w. \end{aligned}$$

Siccome $D_{NN}w = \lambda w - \Delta_{N-1} w$ abbiamo infine in $\mathbb{R}^N_+$

$$\begin{aligned} \lambda w - \Delta_{N-1} w - \frac{1}{b_N^2}\sum_{i,j=1}^{N-1} b_i b_j D_{ij} w - \frac{a}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N-1} b_j D_j w \\ = -\frac{1}{b_N^2}\sum_{j=1}^{N} b_j D_j z + \frac{2}{b_N} D_N z - \frac{a}{b_N} D_N w. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione precedente è soddisfatta in $\mathbb{R}^{N-1}$ e quindi dalle stime di Schauder in $\mathbb{R}^{N-1}$ (5.15) segue che

$$\|w(\cdot,0)\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \leq C(\alpha,\lambda,M,\varepsilon_0)\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big).$$

Tenendo conto che $w = \Pi_\lambda w(\cdot,0)$ e applicando il Lemma 6.2.3 otteniamo

$$\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\alpha,\lambda,M,\varepsilon_0)\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big)$$

Interpolando infine $\|w\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ tra $\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ e $\|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ e applicando la Proposizione 6.1.3 per stimare $\|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ deduciamo

$$\begin{aligned}
\|w\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C\Big(\|z\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|w\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}\Big) \leq C\Big(\|h\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|h\|_{\infty;\mathbb{R}^{N-1}}\Big) \\
&\leq C\Big(\|g\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}\Big).
\end{aligned}$$

Dato che $u = v + w$, la dimostrazione è completa. □

A questo punto possiamo dimostrare un risultato di esistenza e unicità relativo al problema (6.6).

Teorema 6.2.5 *Sia $\lambda > \lambda_0$ e siano $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$. Allora esiste un'unica funzione $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tale che*

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \textit{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \textit{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$ con $0 \leq a \leq M$ e $|b| = 1$, $b_N \leq -\varepsilon_0$.

DIM. La dimostrazione è basata sul metodo di continuità. Poniamo

$$X = C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \qquad Y = C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \times C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$$

e consideriamo gli operatori $L_s : X \to Y$ definiti da

$$L_s u = \left(\lambda u - \Delta u, (1-s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + s\left(au + \frac{\partial u}{\partial b}\right)\right), \quad s \in [0,1],$$

dove ν denota la normale esterna al dominio, ossia $\nu = -e_N$. Osserviamo che

$$(1-s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + s\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

con $\tau = (1-s)\nu + s\,b$, $|\tau| \leq 1$ e $\tau_N = -(1-s) + s\,b_N \leq -\varepsilon_0$ e nella stima (6.7) la costante C si può prendere indipendente da s, ottenendo così

$$\|L_s u\|_Y \geq C\|u\|_X$$

per ogni $s \in [0,1]$. Per la Proposizione 6.2.2 l'operatore L_0 è suriettivo e quindi, per il Teorema 5.1.3, anche L_1 lo è. □

6.3 Coefficienti variabili in $\mathbb{R}^N_+$

Passiamo a considerare l'operatore

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i + c(x)$$

e assumiamo che i coefficienti appartengano a $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ con $c \le 0$ e $k_0 > 0$ sia una costante tale che

$$\|a_{ij}\|_\alpha, \|b_i\|_\alpha, \|c\|_\alpha \le k_0.$$

Sia ν_0 la costante di ellitticità uniforme. In tutta questa sezione assumiamo

$$\begin{aligned} a \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad 0 \le a \le M \\ b \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{S}^{N-1}), \quad b_N \le -\varepsilon_0 < 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

dove $\mathbb{S}^{N-1}$ denota la sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$. Sia λ_0 dato dalla Proposizione 6.1.3. Osserviamo che λ_0 non dipende da a, b ma solo dall'operatore A.

Per provare le stime a priori relative ad A, procediamo nel modo standard, cioè congelando i coefficienti della parte principale dell'operatore e quelli della condizione al bordo. Cominciamo dunque a considerare operatori del tipo

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij} \qquad B_0 = a + \frac{\partial}{\partial b}$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, $|a_{ij}| \le k_0$, $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \nu_0|\xi|^2$ e $0 \le a \le M$, $b \in \mathbb{R}^N$, $|b| = 1$ e $b_N \le -\varepsilon_0$.

Lemma 6.3.1 *Siano A_0 e B_0 come sopra. Se $\lambda > \lambda_0$, esiste $C = C(\alpha, \lambda, M, k_0, \varepsilon_0, \nu_0) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \le C\Big(\|\lambda u - A_0 u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|B_0 u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big). \tag{6.9}$$

Dim. Sia Q_1 una matrice ortogonale tale che $Q_1(a_{ij})Q_1^* = D_\lambda$, dove D_λ è la matrice diagonale degli autovalori di (a_{ij}) e Q_1^* è la trasposta di Q_1. Poniamo $u(x) = v(Qx)$, dove $Q = SD_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}Q_1$ e S è una matrice ortogonale scelta in modo tale che $Q(\mathbb{R}^N_+) = \mathbb{R}^N_+$. Allora $Q(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{R}^{N-1}$ e $Q^*e_N = \gamma e_N$ per qualche $\gamma > 0$. Inoltre $c_1|x| \le |Qx|, |Q^*x| \le c_2|x|$, con $0 < c_i = c_i(k_0, \nu_0)$. Ne segue che $\gamma = \gamma|e_N| = |Q^*e_N| \ge c_1$.

Per costruzione l'equazione $\lambda u(x) - A_0u(x) = f(x)$ è equivalente all'equazione $\lambda v(y) - \Delta v(y) = f(Q^{-1}y)$ e, siccome $\nabla u(x) = Q^*\nabla v(Qx)$, la condizione al bordo $au(x) + \dfrac{\partial u}{\partial b}(x) = g(x)$ per v diventa $\tilde{a}v(y) + \dfrac{\partial v}{\partial \tau}(y)$

$= \dfrac{g(Q^{-1}y)}{|Qb(y)|}$ dove $\tilde{a} = \dfrac{a}{|Qb|}$ e $\tau = \dfrac{Qb}{|Qb|}$. Osserviamo che se $b = b' + b_N e_N$, con $b' \in \mathbb{R}^{N-1}$, allora $Qb = Qb' + b'' + \gamma b_N e_N$, con $Qb', b'' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Quindi $\tau_N = \dfrac{\gamma b_N}{|Qb|} \leq -\dfrac{c_1}{c_2}\varepsilon_0$. Vale pertanto la stima (6.7) per v che, tramite l'uguaglianza $u(x) = v(Qx)$ implica quella voluta. $\square$

Nella proposizione che segue useremo il fatto che la costante λ_0 della Proposizione 6.1.3 dipende solo dal numero k_0 (vedi Osservazione 6.1.4).

Teorema 6.3.2 *Sia $\lambda > \lambda_0$. Allora esiste $C = C(\alpha, k_0, \nu_0, M, \varepsilon_0, \lambda) > 0$ tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big),$$

dove A è definito in (6.1) e $Bu = \left(au + \dfrac{\partial u}{\partial b}\right)_{|\mathbb{R}^{N-1}}$, con a, b che soddisfano (6.8).

Dim. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$ e sia $x_0' = (x_0^1, ...x_0^{N-1}, 0)$. Per $r > 0$ consideriamo l'intorno $I(x_0, r) := B_r(x_0) \cap \mathbb{R}^N_+$. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\eta \equiv 1$ in $B_r(x_0)$, $\eta \equiv 0$ fuori di $B_{2r}(x_0)$. Presi gli operatori

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij} u \qquad B_0 u = a(x_0')u + \frac{\partial u}{\partial b(x_0')},$$

applichiamo la stima (6.9) alla funzione ηu e ad A_0, B_0, ottenendo così

$$\begin{aligned}
\|\eta u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C\Big(\|(\lambda - A_0)(\eta u)\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + \|B_0(\eta u)\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}\Big)\\
&\leq C\|(\lambda - A_0)u\|_{\alpha;I(x_0,r)} + C\|B_0 u\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}\\
&\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + Ck_0 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}\\
&\quad +C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha;I(x_0,r)} &\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_1 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}\\
&\quad +C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}
\end{aligned}$$

e, prendendo l'estremo superiore su $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} &\leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_1 r^\alpha \|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C_r\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}\\
&\quad +C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Scegliendo r abbastanza piccolo otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C\|(\lambda - A)u\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} + C\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+} + C\|Bu\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}.$$

Interpolando $\|u\|_{2;\mathbb{R}^N_+}$ tra $\|u\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+}$ e $\|u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}$ e applicando la Proposizione 6.1.3, concludiamo la dimostrazione. $\square$

Teorema 6.3.3 *Sia $\lambda > \lambda_0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$ esiste un'unica soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = g & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

in $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Basta applicare il metodo di continuità (Teorema 5.1.3) con le seguenti scelte

$$X = C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \qquad Y = C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+) \times C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N-1})$$

e

$$L_t : X \to Y$$

$$L_t u = \left(\lambda u - (1-t)\Delta u + tAu, (1-t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + t\left(au + \frac{\partial u}{\partial b}\right)\right), \quad t \in [0,1],$$

con $\nu = -e_N$. Dal Teorema 6.3.2 discende che $\|L_t u\|_Y \geq C\|u\|_X$, con $C > 0$ costante indipendente da t. Siccome L_0 è suriettivo per la Proposizione 6.2.2, anche L_1 lo è. □

Nella proposizione seguente studiamo la dipendenza da λ della norma del risolvente nell'ipotesi in cui la condizione al bordo è omogenea. In questo caso infatti si vede che la norma in $C^{1,\alpha}$ è infinitesima per $\lambda \to +\infty$ e ciò sarà utile nello studio del problema con derivata obliqua in un aperto regolare limitato Ω.

Proposizione 6.3.4 *Sia $\lambda > \lambda_0$ e, data $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$, sia $u = R(\lambda)f \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ la soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ au + \dfrac{\partial u}{\partial b} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

Allora $\|R(\lambda)f\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^N_+} = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, per $\lambda \to +\infty$.

DIM. A meno di considerare $A - \lambda_0$ al posto di A, possiamo assumere $\lambda_0 = 0$. Poniamo $u(x) = v(\sqrt{\lambda}x)$. Allora è facile vedere che v soddisfa la seguente equazione

$$v(y) - \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(y) D_{ij} v(y) - \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i(y) D_i v(y) - \tilde{c}(y) v(y) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

con $\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}(y/\sqrt{\lambda})$, $\tilde{b}_i(y) = \lambda^{-1/2}b_i(y/\sqrt{\lambda})$, $\tilde{c}(y) = \lambda^{-1}c(y/\sqrt{\lambda})$. Inoltre al bordo v verifica la condizione

$$\tilde{a}v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{b}} = 0$$

con $\tilde{a}(y) = \lambda^{-1/2}a(y/\sqrt{\lambda})$ e $\tilde{b}(y) = b(y/\sqrt{\lambda})$. Se $\lambda \geq 1$ allora $\tilde{\nu}_0 = \nu_0$, $\|\tilde{a}_{ij}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, $\|\tilde{b}_i\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$, $\|\tilde{c}\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq k_0$ e $\|\tilde{a}\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}}$, $\|\tilde{b}\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} \leq M$ e quindi dal Teorema 6.3.2 segue che

$$\|v\|_{2,\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\alpha, \nu_0, K, M, \varepsilon_0)\frac{1}{\lambda}\|f(\cdot/\sqrt{\lambda})\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}.$$

Siccome $v(y) = u(y/\sqrt{\lambda})$ otteniamo per λ abbastanza grande

$$\|u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|\nabla u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\lambda}\|D^2u\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}}[D^2u]_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}$$
$$+\frac{1}{\lambda^{\frac{1+\alpha}{2}}}[\nabla u]_{\alpha;\mathbb{R}^N_+} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\alpha;\mathbb{R}^N_+}.$$

□

6.4 Problema con derivata obliqua in un aperto limitato regolare

Consideriamo un aperto Ω limitato di classe $C^{2,\alpha}$, cioè tale che per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono un intorno U di x ed un'applicazione bigettiva $H : \overline{B_1(0)} \to \overline{U}$ di classe $C^{2,\alpha}$ con inversa $J : \overline{U} \to \overline{B_1(0)}$ di classe $C^{2,\alpha}$ tale che $H(B_1^+(0)) = U \cap \Omega$.

Sia A l'operatore definito in (6.1). Assumiamo che $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, con $c \leq 0$ e, come prima, sia $k_0 > 0$ una costante tale che

$$\|a_{ij}\|_{\alpha;\Omega}, \|b_i\|_{\alpha;\Omega}, \|c\|_{\alpha;\Omega} \leq k_0. \tag{6.10}$$

Introduciamo l'operatore al bordo

$$Bu = au + \frac{\partial u}{\partial b} \tag{6.11}$$

dove

$$a \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega), \quad a \geq 0 \tag{6.12}$$

e

$$b \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{S}^{N-1}), \quad \text{con } b \cdot \nu \geq \varepsilon_0 > 0 \ \text{ su } \partial\Omega, \tag{6.13}$$

essendo ν la normale esterna unitaria a $\partial\Omega$. Sia inoltre $M > 0$ tale che

$$\|a\|_{1,\alpha;\partial\Omega},\ \|b\|_{1,\alpha;\partial\Omega} \leq M. \tag{6.14}$$

Assumeremo tali ipotesi per tutta la sezione ad eccezione del Teorema 6.4.7, in cui sarà rimossa la restrizione sul segno di a.

Osserviamo che se $b \cdot \nu > 0$ su $\partial\Omega$ allora per compattezza $b \cdot \nu \geq \varepsilon_0$ per qualche $\varepsilon_0 > 0$, cioè la condizione puntuale di non tangenzialità diventa automaticamente uniforme.

Il primo teorema che vogliamo dimostrare riguarda le stime a priori.

Teorema 6.4.1 *Esiste una costante* $C = C(\alpha, \nu_0, k_0, M, \varepsilon_0, \Omega) > 0$ *tale che per ogni* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \leq C\Big(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|Bu\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{\infty;\Omega}\Big).$$

DIM. Per ogni $x \in \partial\Omega$ sia (U_x, H_x) carta locale con

$$H_x : \overline{B_1(0)} \to \overline{U_x} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$
$$H_x^{-1} = J_x : \overline{U_x} \to \overline{B_1(0)} \text{ di classe } C^{2,\alpha},$$
$$H_x(B_1^+(0)) = U_x \cap \Omega, \quad H_x(B_1(0) \cap \mathbb{R}^{N-1}) = U_x \cap \partial\Omega$$

Poniamo $V_x = H_x(B_{\frac{1}{2}}(0))$. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, 2R_x) \subset \Omega$. Per compattezza risulta

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_{x_i}) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}.$$

Posto $n = n_1 + n_2$, prendiamo $(\eta_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ partizione dell'unità relativa al ricoprimento ottenuto. Allora

$$u = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u$$

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\operatorname{supp}(\eta_i u) \subset B(x_i, R_{x_i})$. Applicando le stime di Schauder per l'intero spazio (Teorema 5.4.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N} &\leq C(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\mathbb{R}^N} + \|\eta_i u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha)\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}\right) \\
&\leq C(\nu_0, k_0, \alpha, \Omega)\left(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_{2;\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Sia adesso $n_1 + 1 \leq i \leq n$. Operiamo il seguente cambio di variabile

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i(y)) = M_i(\eta_i u)(y)$$

e osserviamo che $v_i \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ e $\operatorname{supp}(v_i) \subset B_{\frac{1}{2}}$.

Risulta $A(\eta_i u)(x) = \tilde{A}_i v_i(y)$, dove l'operatore $\tilde{A}_i$, determinato dal cambio di variabili, è definito in (5.34). Riguardo la condizione al bordo, osserviamo che

$$\begin{aligned} B(\eta_i u)(x) &= a(x)(\eta_i u)(x) + b(x)\cdot\nabla(\eta_i u)(x) \\ &= a(H_i(y))v_i(y) + (dJ_i)\, b(H_i y)\cdot(\nabla v_i)(y) \\ &= \tilde{a}(y)v_i(y) + \frac{\partial v_i}{\partial \tilde{b}}(y) = \tilde{B}_i v_i(y), \end{aligned}$$

dove $\tilde{a}(y) = a(H_i(y))$, $\tilde{b}(y) = ((dJ_i)b)(H_i(y))$ e dJ_i denota la matrice iacobiana di J_i. Siccome b non è tangente a $\partial\Omega$, $\tilde{b}$ non è tangente a $\mathbb{R}^{N-1}$. Applicando pertanto la stima del Teorema 6.3.2 alla funzione v_i e agli operatori $\tilde{A}_i$ e $\tilde{B}_i$ (eventualmente estesi all'intero spazio) risulta

$$\|v_i\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^N_+} \le C(\nu_0, k_0, H_i, \varepsilon_0, M)\Big(\|\tilde{A}_i v_i\|_{\alpha,\mathbb{R}^N_+} + \|\tilde{B}_i v_i\|_{1,\alpha;\mathbb{R}^{N-1}} + \|v_i\|_{\infty;\mathbb{R}^N_+}\Big)$$

da cui

$$\|\eta_i u\|_{2,\alpha,\Omega} \le C\left(\|A(\eta_i u)\|_{\alpha,\Omega} + \|B(\eta_i u)\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{\infty;\Omega}\right).$$

Sommando su $i = 1, \cdots, n$

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\left(\|Au\|_{\alpha;\Omega} + \|Bu\|_{1,\alpha;\partial\Omega} + \|u\|_{2;\Omega}\right).$$

Concludiamo la dimostrazione interpolando $\|u\|_{2;\Omega}$ tra $\|u\|_{2,\alpha;\Omega}$ e $\|u\|_{\infty;\Omega}$. □

Corollario 6.4.2 *Siano δ e Λ fissati con $\Lambda > \delta > 0$. Allora esiste una costante $C = C(\alpha, \nu_0, k_0, M, \Lambda, \delta, \varepsilon_0, \Omega) > 0$ tale che per ogni $\lambda \in [\delta, \Lambda]$ e per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega}.$$

DIM. Applicando il Teorema 6.4.1 all'operatore $A - \lambda$, con $\lambda \in [\delta, \Lambda]$, si trova che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$ risulta

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega} + \|u\|_\infty\Big), \tag{6.15}$$

dove la costante C dipende da $\alpha, \nu_0, \varepsilon_0, M, \Omega$ e dal massimo delle norme dei coefficienti di $\lambda - A$. In virtù di (6.10) e della scelta di λ, si ha pertanto che C dipende da $\alpha, \nu_0, \varepsilon_0, M, \Omega$ e da k_0 e Λ. Ora, tenendo conto della Proposizione 6.1.1, da (6.15) si deduce che

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\Big(\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega} + \frac{1}{\lambda}\|\lambda u - Au\|_\infty\Big) \le \frac{C}{\delta}\|\lambda u - Au\|_{\alpha;\Omega},$$

se $\delta < 1$. Pertanto l'asserto. □

Veniamo ora al risultato di esistenza (e unicità) della soluzione del problema con derivata obliqua in Ω, assumendo dapprima che la condizione al bordo sia omogenea. Dimostreremo il caso generale dopo aver provato un risultato di estensione.

Proposizione 6.4.3 *Sia $\lambda > 0$. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica soluzione in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ Bu = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. La dimostrazione è del tutto simile a quella del Teorema 5.6.4 a cui rimandiamo per ulteriori dettagli tecnici.
Usiamo la notazione del Teorema 6.4.1. Pertanto sia $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_{x_i}) \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} V_{x_j}$ e sia $(\eta_i^2)_{i=1,2,\cdots,n=n_1+n_2}$ una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento.

Sia $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Allora possiamo scrivere $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 f$.

Se $i \leq n_1$ allora $\eta_i f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\eta_i f) \subseteq B(x_i, R_{x_i})$. Indichiamo con $R(\lambda)$ il risolvente dell'operatore A in $\mathbb{R}^N$. Osserviamo che $R(\lambda) : C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \to C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := \eta_i R(\lambda)(\eta_i f)$$

e notiamo che

$$R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{supp}\, R_i(\lambda)f \subseteq B(x_i, R_{x_i}).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (\lambda - A)R_i(\lambda)f &= (\lambda - A)\eta_i R(\lambda)(\eta_i f) \\ &= \eta_i(\lambda - A)R(\lambda)(\eta_i f) + [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f \end{aligned}$$

dove $[\cdot, \cdot]$ indica il commutatore e

$$S_i(\lambda)f = [\lambda - A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f) = -[A, \eta_i I]R(\lambda)(\eta_i f).$$

Risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_\alpha$$

per λ grande.

Sia ora $n_1+1 \leq i \leq n$. Se M_i è l'operatore associato al cambio di variabili (definito in 5.33) poniamo

$$R_i(\lambda)f := M_i^{-1}\left(M_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A}_i)^{-1}M_i(\eta_i f)\right)$$

dove $(\lambda - \tilde{A}_i)^{-1}$ è il risolvente di $\tilde{A}_i$ in $\mathbb{R}^N_+$ con la condizione $\tilde{B}_i = 0$ al bordo. Allora $R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $BR_i(\lambda)f = 0$ su $\partial\Omega$ e supp $R_i(\lambda)f \subset V_{x_i}$. Risulta

$$(\lambda - A)R_i(\lambda)f = \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f$$

dove ora $S_i(\lambda) = M_i^{-1}\Big([\lambda - \tilde{A}, M_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\,(M_i(\eta_i f))\Big)$. Come prima, per λ abbastanza grande, tenendo conto della Proposizione 6.3.4, risulta

$$\|S_i(\lambda)f\|_\alpha = O(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}})\|f\|_\alpha.$$

A questo punto poniamo

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{2,\alpha}(\Omega)$$

e osserviamo che $BV(\lambda)f = 0$ su $\partial\Omega$ e

$$(\lambda - A)V(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f = f + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f.$$

Quindi

$$(\lambda - A)V(\lambda) : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad (\lambda - A)V(\lambda) = I + \sum_{i=1}^n S_i(\lambda).$$

Scegliamo λ_1 tale che $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|S_i(\lambda)\|_\alpha \le \frac{1}{2}$ per ogni $\lambda > \lambda_1$. Questo assicura che l'operatore $I + \displaystyle\sum_{i=1}^n S_i(\lambda)$ è invertibile in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ con inverso $W(\lambda)$ tale che $\|W(\lambda)\| \le 2$. Inoltre siccome $(\lambda - A)V(\lambda)W(\lambda) = I$ su $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $u = V(\lambda)W(\lambda)f$ è la soluzione cercata per $\lambda \ge \lambda_1$.

Se $0 < \lambda \le \lambda_1$, basta applicare il metodo di continuità agli operatori $L_t = (1-t)\lambda + t\lambda_1 - A$. infatti, scelto $\delta > 0$ con $\delta < \lambda$ e posto $\Lambda = \lambda_1$, risulta $\delta \le (1-t)\lambda + t\lambda_1 \le \Lambda$, e quindi grazie al Corollario 6.4.2, per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ con $Bu = 0$ su $\partial\Omega$, vale la stima

$$\|u\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\|L_t u\|_{\alpha;\Omega},$$

con C costante indipendente da $t \in [0,1]$. Siccome L_1 è suriettivo, anche $L_0 = \lambda - A$ lo è e quindi la dimostrazione è completa. □

Lemma 6.4.4 *Se $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ allora esiste $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g$ su $\partial\Omega$. Inoltre $\|h\|_{2,\alpha;\Omega} \le C\|g\|_{1,\alpha;\partial\Omega}$.*

DIM. Scriviamo $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, dove V_i sono definiti come nel Teorema 6.4.1. Sia (η_i) una partizione dell'unità su $\partial\Omega$ con $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$. Sia $b_i(x)$ l'N-sima componente del vettore $(dJ_i)(\nu(x))$ (osserviamo che $b_i(x) < 0$). Consideriamo le funzioni

$$g_i(y) = \eta_i(H_i(y)) \frac{g(H_i(y))}{b_i(H_i(y))}$$

e, dal Lemma 6.2.1, siano $\tilde{h}_i \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N_+)$ tali che $\tilde{h}_i = 0$ e $D_N \tilde{h}_i = g_i$ su $\mathbb{R}^{N-1}$. Poniamo $h_i(x) = \tilde{h}_i(J_i x)$. Allora $h_i = 0$ su $\partial\Omega \cap V_i$; inoltre

$$\frac{\partial h_i}{\partial \nu}(x) = \nabla \tilde{h}_i(J_i x) \cdot (dJ_i)(\nu(x)).$$

Siccome $\tilde{h}_{i|\mathbb{R}^{N-1}} = 0$, se $x \in \partial\Omega \cap V_i$ risulta

$$\nabla \tilde{h}_i(J_i x) = \Big(0, ..., D_N \tilde{h}_i(J_i x)\Big) = \eta_i(x) \frac{g(x)}{b_i(x)}$$

e quindi

$$\frac{\partial h_i}{\partial \nu}(x) = \eta_i(x) \frac{g(x)}{b_i(x)} b_i(x) = \eta_i(x) g(x).$$

La funzione $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x) h_i(x)$ è la funzione cercata poichè, essendo $\frac{\partial \eta_i}{\partial \nu} = 0$ si ha

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial h_i}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g = g.$$

□

Osservazione 6.4.5 Usando il Lemma 6.4.4 si può costruire una funzione $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h_{|\partial\Omega} = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial b}_{|\partial\Omega} = g$, con $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ assegnata. Infatti, basta scrivere $b = b_1 + \gamma\nu$, dove b_1 è un vettore tangente a $\partial\Omega$ e $\gamma \geq \varepsilon_0 > 0$, per la condizione di non tangenzialità di b. Per il Lemma 6.4.4 esiste $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g/\gamma$ su $\partial\Omega$. Allora $\dfrac{\partial h}{\partial b} = \gamma \dfrac{\partial h}{\partial \nu} = g$ su $\partial\Omega$, come richiesto.

Proposizione 6.4.6 *Sia $\lambda > 0$. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Sia $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $Bh = g$ su $\partial\Omega$ (vedi Osservazione 6.4.5). Allora la soluzione cercata è data da $u = v + h$, dove v risolve

$$\begin{cases} \lambda v - Av = f - (\lambda h - Ah) & \text{in } \Omega \\ Bv = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Per la Proposizione 6.4.3 v esiste ed è unica. □

L'ultimo passo consiste nell'eliminare la restrizione sul segno di a.

Teorema 6.4.7 *Siano A, B gli operatori definiti in (6.1) e (6.11), rispettivamente. Assumiamo le condizioni (6.10), (6.12), (6.13) e (6.14) con a di segno qualunque. Allora esiste $\lambda_1 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_1$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ Bu = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

DIM. Cerchiamo la soluzione nella forma $u = \phi v$. Il problema dato è allora equivalente a

$$\begin{cases} \lambda v - \tilde{A}v = \dfrac{f}{\phi} & \text{in } \Omega \\ \left(a\phi + \dfrac{\partial \phi}{\partial b} \right) v + \dfrac{\partial v}{\partial b}\phi = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.16}$$

dove $\tilde{A}v = Av + 2\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{D_i\phi}{\phi}D_j v + \frac{A\phi}{\phi}v - c\,v$. Scegliamo $\phi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $\inf_\Omega \phi > 0$, $a + \dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial \phi}{\partial b} = 0$ su $\partial\Omega$. Per costruire ϕ, consideriamo, in virtù dell'Osservazione 6.4.5, una funzione $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $h_{|\partial\Omega} = 0$ e $\dfrac{\partial h}{\partial b}_{|\partial\Omega} = -a$. Poniamo quindi $\phi = 1 + \eta\, h$, dove η è una funzione regolare con $\eta \equiv 1$ in un piccolo intorno di $\partial\Omega$, determinato in modo tale che $\phi \geq 1/2$ su $\overline{\Omega}$.

Sia adesso λ_1 tale che $\lambda_1 - \dfrac{A\phi}{\phi} + c \geq 0$. Per la Proposizione 6.4.6, il problema (6.16) ha un'unica soluzione per $\lambda > \lambda_1$ e quindi lo stesso vale per il problema assegnato. $\square$

CAPITOLO 7

ALCUNE APPLICAZIONI

7.1 COEFFICIENTI ILLIMITATI (CENNI)

Consideriamo in questa sezione un operatore differenziale della forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c,$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $c \leq 0$ e tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu(x)|\xi|^2 \qquad x\,, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

dove $\inf\limits_{x \in K} \nu(x) > 0$ per ogni compatto K. Quindi un tale operatore è uniformemente ellittico su ogni compatto di $\mathbb{R}^N$.

In questa situazione, non è difficile provare l'esistenza di una soluzione limitata e in $C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per l'equazione $\lambda u - Au = f$, con $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \geq 0$. Infatti, presa la palla B_R di centro l'origine e raggio R, la teoria precedente ci garantisce di poter trovare un'unica funzione $u_R \in C^{2,\alpha}_0(B_R)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

Osserviamo che $\|u_R\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty$. Supponiamo che $f \geq 0$ (nel caso generale basterà scrivere $f = f^+ - f^-$). Fissati $0 < \varrho < R_1 < R_2$, risulta $u_{R_1} \leq u_{R_2}$ in B_{R_1}. Infatti $u_{R_2} - u_{R_1}$ soddisfa

$$\begin{cases} \lambda(u_{R_2} - u_{R_1}) - A(u_{R_2} - u_{R_1}) = 0 & \text{in } B_{R_1} \\ u_{R_2} - u_{R_1} = f_{|\partial B_{R_1}} & \text{su } \partial B_{R_1} \end{cases}$$

e siccome il dato al bordo è positivo, il principio del massimo implica che anche la soluzione $u_{R_2} - u_{R_1}$ è positiva. Per monotonia, si ha pertanto che la successione (u_R) converge puntualmente ad una certa funzione u. Applicando le stime di Schauder interne (5.7.3) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\|u_{R_2} - u_{R_1}\|_{2,\alpha,\varrho} &\le C(\varrho, R_1)\big(\|Au_{R_2} - Au_{R_1}\|_{\alpha,B_{R_1}} + \|u_{R_2} - u_{R_1}\|_{\infty,B_{R_1}}\big)\\ &\le C\,\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Usando il Teorema di Ascoli-Arzelà otteniamo che, a meno di sottosuccessioni, u_R converge a u in $C^{2,\alpha}(B_\varrho)$. Siccome ϱ è arbitrario, risulta $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e, per costruzione, $\lambda u(x) - Au(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Osserviamo che in queste ipotesi più deboli non è più assicurata l'unicità.

7.2 Confronto tra teoria L^2 e teoria C^α

Consideriamo il solito operatore A in un aperto Ω limitato e con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Per quanto riguarda i coefficienti richiediamo che $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $c \le 0$. Inoltre assumiamo che sia soddisfatta la condizione di ellitticità uniforme. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

e i seguenti operatori

$$\begin{aligned} A_2 &= (A, H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \quad \text{in } L^2(\Omega),\\ A_\alpha &= (A, C^{2,\alpha}_0(\Omega)) \quad \text{in } C^{0,\alpha}(\Omega).\end{aligned}$$

Abbiamo provato che

- se $\lambda \ge 0$ e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}_0(\Omega)$ del problema (7.1);
- se $\lambda \ge \lambda_0 = \dfrac{K^2}{2\nu_0} + \sup\limits_{\overline{\Omega}} c + \dfrac{\nu_0}{2}$, dove $K^2 = \sup\limits_{\overline{\Omega}} \sum\limits_i |b_i|^2$ (si veda (2.6)) e $f \in L^2(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione di (7.1) nello spazio $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

In termini di risolventi abbiamo cioè provato che $(\lambda - A_\alpha)^{-1}$ esiste nella semiretta $\{\lambda > 0\}$, mentre $(\lambda - A_2)^{-1}$ è definito in $\{\lambda > \lambda_0\}$. E' interessante vedere che questa distinzione è solo apparente, poichè i due operatori hanno di fatto lo stesso spettro.

Teorema 7.2.1 *Risulta*

$$\sigma(A_2) = \sigma(A_\alpha).$$

Inoltre le autofunzioni associate a $\lambda \in \sigma(A_2) = \sigma(A_\alpha)$ coincidono.

DIM. Osserviamo intanto che entrambi gli operatori considerati hanno risolvente compatto perchè le inclusioni dei domini nei rispettivi spazi sono compatte. Ciò implica che gli spettri sono puntuali. L'inclusione $\sigma(A_\alpha) \subseteq \sigma(A_2)$ è allora ovvia. Viceversa, sia $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_2)$. Siccome gli spettri sono discreti, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B}_\varepsilon(\tilde{\lambda})$ non contenga altri autovalori di A_2 e A_α. Pertanto, usando il calcolo funzionale per operatori chiusi, possiamo considerare le proiezioni spettrali

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\lambda}}(A_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\tilde{\lambda}|=\varepsilon} (\lambda - A_2)^{-1} d\lambda, \\ P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\tilde{\lambda}|=\varepsilon} (\lambda - A_\alpha)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Siccome $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_2)$, risulta $\mathrm{Im}P_{\tilde{\lambda}}(A_2) = \ker(\tilde{\lambda} - A_2)^\mu$, dove $\mu \in \mathbb{N}$ è l'indice dell'autovalore $\tilde{\lambda}$. Inoltre, se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ allora $P_{\tilde{\lambda}}(A_2)f = P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)f$ poichè i risolventi coincidono su f (se il dato è regolare la soluzione classica e quella variazionale sono uguali). Tenendo conto di tutto questo e del fatto che $C^{0,\alpha}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \ker(\tilde{\lambda} - A_2)^\mu &= P_{\tilde{\lambda}}(A_2)(L^2(\Omega)) = \overline{P_{\tilde{\lambda}}(A_2)(C^{0,\alpha}(\Omega))}^{L^2(\Omega)} \\ &= \overline{P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)(C^{0,\alpha}(\Omega))}^{L^2(\Omega)} = P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)(C^{0,\alpha}(\Omega)) \\ &= \ker(\tilde{\lambda} - A_\alpha)^\mu. \end{aligned}$$

□

7.3 L'EQUAZIONE $\lambda u - Au = f$ CON f CONTINUA

Riprendiamo il problema posto all'inizio del primo capitolo relativo alla risolubilità dell'equazione $\lambda u - Au = f$, con $f \in C(\overline{\Omega})$ e $\lambda \geq 0$. Più precisamente siamo interessati alla regolarità delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se l'operatore è in forma di divergenza, la teoria L^2 fornisce immediatamente un'unica soluzione di classe $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Consideriamo una successione $(f_n) \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$ che converge uniformemente a f. Se u_n indica la soluzione classica (ossia in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$) del problema

$$\begin{cases} \lambda u_n - Au_n = f_n & \text{in } \Omega \\ u_n = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora per il principio del massimo si ha $\|u_n\|_\infty \leq \frac{\|f_n\|_\infty}{\lambda}$, per cui applicando questa stima alle differenze otteniamo

$$\|u_n - u_m\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f_n - f_m\|_\infty.$$

Ne segue che u_n converge uniformemente a u e u è continua in $\overline{\Omega}$. Per dedurre maggiore regolarità si possono usare stime L^p, con p sufficientemente grande. Con le stesse tecniche usate per la regolarità $C^{0,\alpha}$, quindi evitando la teoria L^p, possiamo però provare almeno che $u \in C^{1,\alpha}$ per ogni $\alpha < 1$, nel caso in cui A coincide con il Laplaciano.

Osservazione 7.3.1 Ricordiamo che per il Lemma 5.2.3 per operatori puri del secondo ordine a coefficienti costanti, se $u \in H^1(B_R)$ risolve $\Delta u = 0$, allora

$$\int_{B_r} |u - u_r|^2 \le c\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u - u_R|^2, \qquad r < R \tag{7.2}$$

essendo u_r la media di u in B_r.

Inoltre il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

con $f \in L^2(B_R)$, ammette un'unica soluzione u in $H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ che soddisfa la stima

$$\|u\|^2_{H^2(B_R)} \le C(R)\|f\|^2_{L^2(B_R)}.$$

Posto $v(x) = u(Rx)$, per $x \in B_1$, si ha che v risolve il precedente problema in B_1 con dato $g(x) = R^2 f(Rx)$. Pertanto

$$\|v\|^2_{H^2(B_1)} \le C(1)\|g\|^2_{L^2(B_1)}.$$

Sostituendo u al posto di v e cambiando variabile si ottiene

$$R^{-4}\|u\|^2_{L^2(B_R)} + R^{-2}\|\nabla u\|^2_{L^2(B_R)} + \|D^2 u\|^2_{L^2(B_R)} \le C\|f\|^2_{L^2(B_R)} \tag{7.3}$$

con $C = C(1)$.

Il seguente teorema fornisce delle stime simili alla (ii) del Teorema 5.2.4, ma ora direttamente per la soluzione e per le sue derivate prime, dato che il nostro intento è ora provare, tramite la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane, che $u \in C^{1,\alpha}$.

Teorema 7.3.2 *Sia $u \in H^2(B_R)$ soluzione di $\Delta u = f$ in B_R, con $f \in L^2(B_R)$. Allora per ogni $r < R$*

(a) $$\int_{B_r} |u - u_r|^2 \le c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u - u_R|^2 + R^4 \int_{B_R} |f|^2\right);$$

(b) $$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \le c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 + R^2 \int_{B_R} |f|^2\right).$$

DIM. La dimostrazione è sostanzialmente la stessa del Teorema 5.2.4.

(a) Sia w l'unica soluzione dell'equazione $\Delta w = f$ in $H^1_0(B_R)\cap H^2(B_R)$. Per differenza, $v := u - w \in H^2(B_R)$ risolve l'omogenea associata. Applicando (7.2) a v e (7.3) a w e ricordando l'Osservazione 5.2.2 si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |u-u_r|^2 &\leq 2\int_{B_r}|v-v_r|^2 + 2\int_{B_r}|w-w_r|^2 \\
&\leq c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|v-v_R|^2 + 2\int_{B_R}|w-w_R|^2 \\
&\leq c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|u-u_R|^2 \\
&\quad + c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|w|^2 + 2\int_{B_R}|w|^2 \\
&\leq c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|u-u_R|^2 + R^4\int_{B_R}|f|^2\right).
\end{aligned}$$

(b) Si dimostra come (a), considerando $D_i v$ al posto di v. $\square$

Come conseguenza delle disuguaglianze (a) e (b) si ottengono i due seguenti corollari.

Corollario 7.3.3 *Per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con $p > \max\{2, N\}$, risulta $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, dove $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, ed esiste una costante $c = c(N,\alpha) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_p + \|u\|_\infty).$$

DIM. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con p come nell'enunciato. Le immersioni di Sobolev assicurano che $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Inoltre, per ogni fissato $R > 0$, $u \in H^2(B_R)$ per cui possiamo usare (b) del teorema precedente con $f = \Delta u$. Tenendo conto del fatto che $\nabla u \in C^{0,\alpha}$ e applicando la disuguaglianza di Hölder abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 &\leq c(N)\Bigg(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} R^{N+2\alpha}[\nabla u]^2_{\alpha,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + R^2\left(\int_{B_R}|\Delta u|^p\right)^{\frac{2}{p}}(\omega_N R^N)^{\frac{p-2}{p}}\Bigg) \\
&\leq c(N)\Bigg(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} R^{N+2\alpha}[\nabla u]^2_{\alpha,\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \|\Delta u\|^2_{p,B_R} R^{N+2\alpha}\Bigg).
\end{aligned}$$

Adesso prendiamo $R = q\,r$, con $q > 1$ e otteniamo

$$\int_{B_r}|\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \leq c(N) r^{N+2\alpha}\left(q^{2\alpha-2}[\nabla u]^2_\alpha + q^{N+2\alpha}\|\Delta u\|^2_p\right).$$

Dividendo per $r^{N+2\alpha}$ e prendendo l'estremo superiore su $r > 0$, per il Teorema 4.3.4 abbiamo

$$[\nabla u]_\alpha^2 \leq c(N)\left(q^{2\alpha-2}[\nabla u]_\alpha^2 + q^{N+2\alpha}\|\Delta u\|_p^2\right).$$

Scegliendo q abbastanza grande affinchè $c(N)q^{2\alpha-2} = 1/2$ abbiamo

$$[\nabla u]_\alpha \leq c(N,\alpha)\|\Delta u\|_p.$$

Siccome $\|u\|_{1,\alpha} \leq \text{cost}\,(\|u\|_\infty + [\nabla u]_\alpha)$. □

Corollario 7.3.4 *Se $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con $\frac{N}{2} < p < N$ e $p \geq 2$ allora*

$$[u]_\alpha \leq c(N,\alpha)\|\Delta u\|_p,$$

con $\alpha = 2 - \dfrac{N}{p}$.

DIM. La dimostrazione di questo corollario è lasciata per esercizio (basta imitare quella del corollario precedente e usare (a) del Teorema 7.3.2 al posto di (b)).

Teorema 7.3.5 *Se $0 < \alpha < 1$, esiste una costante $c = c(N,\alpha) > 0$ tale che per ogni $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\Delta u\|_\infty).$$

DIM. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ su $B_1(x_0)$ e supp$\eta \subset B_2(x_0)$. Applicando il Corollario 7.3.3 alla funzione ηu con $p = \frac{N}{1-\alpha}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta\, u\|_{1,\alpha} &\leq c(N,\alpha)(\|\eta\, u\|_\infty + \|\Delta(\eta\, u)\|_p) \\
&\leq c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\Delta(\eta\, u)\|_{\infty,B_2(x_0)}) \\
&\leq c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\eta\Delta u\|_\infty + \|\nabla u\cdot\nabla\eta\|_\infty + \|u\Delta\eta\|_\infty) \\
&\leq c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|u\|_{1,\alpha,B_1(x_0)} \leq c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1),$$

da cui passando all'estremo superiore su $x_0 \in \mathbb{R}^N$ otteniamo

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1).$$

Dall'ultima stima segue la tesi una volta applicata la disuguaglianza di interpolazione $\|u\|_1 \leq \varepsilon\|u\|_{1,\alpha} + C_\varepsilon\|u\|_\infty$. □

Esercizio 7.3.6 Sia $0 < \alpha < 1$. Provare che per ogni funzione $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta
$$\|u\|_{1,\alpha} \le c(\alpha, N)\|u - \Delta u\|_\infty. \tag{7.4}$$
(Basta applicare il Teorema 7.3.5 e il principio del massimo).

Esercizio 7.3.7 Sia $0 < \alpha < 1$. Provare che per ogni funzione $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta
$$[\nabla u]_\alpha \le c(\alpha, N)\|\Delta u\|_\infty^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$
(E' sufficiente applicare il Teorema 7.3.5 alla funzione $v(x) = u(\lambda x)$ e minimizzare su λ).

7.4 Alcuni problemi non lineari

In questa sezione applichiamo i risultati ottenuti allo studio di alcuni problemi ellittici semilineari. Al fine di usare la teoria sviluppata finora, supporremo ovunque che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con bordo di classe $C^{2,\alpha}$ e che $A = \sum a_{ij}D_{ij} + \sum b_i D_i + c$ sia un operatore uniformemente ellittico, con coefficienti α-hölderiani, ($0 < \alpha < 1$) e $c \le 0$.

Esempio 7.4.1 Consideriamo il seguente problema semilineare
$$\begin{cases} \lambda u - Au + F(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.5}$$
dove $\lambda \ge 1$, $F : [-a, a] \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana di classe C^2 e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Se u_0 è una soluzione del problema, allora essa verifica l'identità $u_0 = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u_0))$, dove $(\lambda - A)^{-1} : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ è il risolvente di A. Ciò suggerisce di cercare la soluzione come punto fisso dell'operatore
$$G(u) = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u)).$$
Cominciamo a studiare l'applicazione $u \to F(u)$, definita in
$$B_a = \left\{u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \mid \|u\|_\alpha \le a\right\}.$$
Se $M = \|F\|_\infty$ e L è la costante di Lipschitz di F, risulta
$$|F(u(x)) - F(u(y))| \le L|u(x) - u(y)| \le L[u]_\alpha |x - y|^\alpha$$
da cui segue che $[F(u)]_\alpha \le L[u]_\alpha \le L\,a$. Inoltre, evidentemente $\|F(u)\|_\infty \le M$. Pertanto $F : B_a \to B_{M+aL}$. Proviamo che F è lipschitziana rispetto alla norma $\|\cdot\|_\alpha$. Siano $u, v \in B_a$. Allora
$$|F(u(x)) - F(v(x))| \le L|u(x) - v(x)| \quad \Rightarrow \quad \|F(u) - F(v)\|_\infty \le L\|u - v\|_\infty. \tag{7.6}$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere poi

$$\begin{aligned} F(v(x)) - F(u(x)) &= (v(x)-u(x)) \int_0^1 F'\left(u(x) + t(v(x)-u(x))\right) dt \\ &=: (v(x)-u(x))H(x), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$[F(v)-F(u)]_\alpha \leq [v-u]_\alpha \|H\|_\infty + \|v-u\|_\infty [H]_\alpha \leq \|v-u\|_\alpha (\|H\|_\infty + [H]_\alpha).$$

Ora, naturalmente $\|H\|_\infty \leq \sup |F'| = L$. Per stimare la seminorma hölderiana di H osserviamo che

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 F'(u(x) + t(v(x)-u(x)))dt - \int_0^1 F'(u(y) + t(v(y)-u(y)))dt \right| \\ &\qquad \leq \int_0^1 |F'(u(x)+t(v(x)-u(x))) - F'(u(y)+t(v(y)-u(y)))| dt \\ &\qquad \leq \int_0^1 \|F''\|_\infty \left((1-t)|u(x)-u(y)| + t|v(x)-v(y)|\right) dt \\ &\qquad \leq ([u]_\alpha + [v]_\alpha)\|F''\|_\infty |x-y|^\alpha . \end{aligned}$$

Ne segue

$$[H]_\alpha \leq ([u]_\alpha + [v]_\alpha)\|F''\|_\infty \leq 2a\|F''\|_\infty .$$

e quindi

$$[F(u) - F(v)]_\alpha \leq (L + 2a\|F''\|_\infty)\|u-v\|_\alpha . \tag{7.7}$$

A questo punto (7.6) e (7.7) implicano

$$\|F(u)-F(v)\|_\alpha = \|F(u)-F(v)\|_\infty + [F(u)-F(v)]_\alpha \leq L_1 \|u-v\|_\alpha ,$$

con $L_1 = 2(L + a\|F''\|_\infty)$.

Ricordiamo ora la stima sul risolvente dell'Osservazione 5.6.5

$$\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|\varphi\|_\alpha .$$

Se $u \in B_a$, per quanto provato si ha che $f - F(u) \in B_{a_1}$, dove $a_1 = M + aL + \|f\|_\alpha$, per cui scegliendo λ abbastanza grande, risulta

$$\|G(u)\|_\alpha = \|(\lambda - A)^{-1}(f - F(u))\|_\alpha \leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} a_1 \leq a.$$

Questo prova che $G : B_a \to B_a$. Infine G è una contrazione, poichè

$$\begin{aligned} \|G(u_2) - G(u_1)\|_\alpha &= \|(\lambda - A)^{-1}(F(u_2) - F(u_1))\|_\alpha \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|F(u_2) - F(u_1)\|_\alpha \\ &\leq c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} L_1 \|u_2 - u_1\|_\alpha , \end{aligned}$$

e basta prendere λ sufficientemente grande affinchè sia anche $c(\nu_0, k_0, \Omega)$ $\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} L_1 < 1$. Per il teorema delle contrazioni, esiste un unico punto fisso u_0 per l'operatore G e quindi un'unica soluzione per il problema (7.5). Osserviamo che tale u_0 è, per costruzione, in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$.

Esempio 7.4.2 Sia dato ora il problema quasi lineare

$$\begin{cases} \lambda u - Au + F(u, \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\lambda \geq 1$, $F : [-a, a]^{N+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana di classe C^2 e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.
Procedendo come per il problema precedente, consideriamo stavolta $U_a = \{u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \mid \ \|u\|_{1,\alpha} \leq a\}$. Si dimostra che F trasforma U_a in $U_{a_1} = \{u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \mid \|u\|_\alpha \leq a_1\}$, per qualche $a_1 > 0$ e che verifica la condizione di lipschitzianità

$$\|F(u, \nabla u) - F(v, \nabla v)\|_\alpha \leq L_1 \|u - v\|_{1,\alpha}, \qquad u, v \in U_a,$$

per un'opportuna costante $L_1 > 0$. Se $G(u) = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u, \nabla u))$, ricordando la stima sul risolvente di A (Osservazione 5.6.5)

$$\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\|_{1,\alpha} \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|\varphi\|_\alpha \qquad (\lambda \geq 1),$$

si ha che

$$\|G(u)\|_{1,\alpha} \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|f - F(u, \nabla u)\|_\alpha \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} (\|f\|_\alpha + L_2 \|u\|_{1,\alpha}).$$

Quindi se $u \in U_a$, scegliendo λ grande e usando la stima precedente si può ottenere che anche $G(u) \in U_a$. Inoltre se $u_1, u_2 \in U_a$ risulta

$$\begin{aligned} \|G(u_1) - G(u_2)\|_{1,\alpha} &\leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|f - F(u_1, \nabla u_1) - f + F(u_2, \nabla u_2)\|_\alpha \\ &\leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} L_1 \|u_1 - u_2\|_{1,\alpha}, \end{aligned}$$

per cui, scegliendo λ abbastanza grande, otteniamo che G è una contrazione. Ne segue che esiste un unico punto fisso, che è la soluzione del nostro problema.

Esempio 7.4.3 Proponiamoci ora di risolvere il seguente problema semilineare

$$\begin{cases} u - \Delta u + F(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.8}$$

sotto ipotesi di regolarità per F più deboli: $F \in C^1(\mathbb{R})$ con $F(0) = 0$ e $F' \geq 0$. La principale differenza con (7.5) è, comunque, il fatto di fissare $\lambda = 1$. Sia invece come sempre $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Dimostriamo di seguito un risultato di unicità per il problema (7.8).

Lemma 7.4.4 (Principio del massimo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ risolve (7.8), allora*

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema di Weierstrass, esiste un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che $\|u\|_\infty = |u(x_0)|$. Assumiamo $\|u\|_\infty = u(x_0)$ e $x_0 \notin \partial\Omega$ (altrimenti $u(x_0) = 0$ e quindi $u \equiv 0$). Allora risulta $\Delta u(x_0) \leq 0$ e $F(u(x_0)) \geq F(0) = 0$, da cui segue che

$$\|u\|_\infty = u(x_0) \leq u(x_0) - \Delta u(x_0) + F(u(x_0)) = f(x_0) \leq \|f\|_\infty.$$

□

Proposizione 7.4.5 (Unicità) *Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ risolvono (7.8), allora $u_1 = u_2$.*

DIM. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(u_2(x)) - F(u_1(x)) &= (u_2(x) - u_1(x)) \int_0^1 F'\left(u_1(x) + t(u_2(x) - u_1(x))\right) dt \\ &=: (u_2(x) - u_1(x))G(x). \end{aligned}$$

Riguardo alla funzione G si ha che $G \in C(\overline{\Omega})$ e $G \geq 0$. Inoltre

$$\begin{cases} u_2(x) - u_1(x) - \Delta(u_2 - u_1)(x) + (u_2(x) - u_1(x))G(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_2 - u_1 = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

cioè $u_2 - u_1$ risolve il problema *lineare*

$$\begin{cases} w - \Delta w + G\, w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

per il quale l'unica soluzione, come è noto, è quella nulla. Ne segue che $u_1 \equiv u_2$. □

Passiamo adesso a provare l'esistenza per il problema 7.8 e poniamo

$$\mathcal{N}(s) = \sup_{|t| \leq s} \left(|F(t)| + |F'(t)|\right).$$

Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, posto $\|u\|_\infty = s$, per il teorema di Lagrange si ha

$$|F(u(y)) - F(u(x))| \leq \mathcal{N}(s)|u(y) - u(x)| \leq \mathcal{N}(s)[u]_\alpha |x - y|^\alpha$$

e quindi

$$[F(u)]_\alpha \leq \mathcal{N}(\|u\|_\infty)[u]_\alpha. \tag{7.9}$$

Inoltre

$$\|F(u)\|_\infty \leq \mathcal{N}(\|u\|_\infty). \tag{7.10}$$

Nella proposizione che segue dimostriamo delle stime di Schauder non lineari, che ci permetteranno come nel caso lineare di provare l'esistenza della soluzione di (7.8).

Proposizione 7.4.6 *Esiste una funzione $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ che dipende solo da $\mathcal{N}, \alpha$ e Ω, tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \le \mathcal{M}(\|f\|_\alpha),$$

essendo $f = u - \Delta u + F(u)$.

DIM. Siano u, f come nell'enunciato. Applicando le stime di Schauder per il Laplaciano e tenendo conto di (7.9) e (7.10) si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha} &\le c(\Omega)(\|u - \Delta u\|_\alpha) \\ &\le c(\Omega)(\|u - \Delta u + F(u)\|_\alpha + \|F(u)\|_\alpha) \\ &= c(\Omega)(\|f\|_\alpha + \|F(u)\|_\alpha) \\ &\le c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + [u]_\alpha \mathcal{N}(\|u\|_\infty) + \mathcal{N}(\|u\|_\infty)\Big). \end{aligned}$$

Grazie al Lemma 7.4.4 e alla monotonia di $\mathcal{N}$ risulta poi

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + [u]_\alpha \mathcal{N}(\|f\|_\alpha) + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big).$$

Usando la disuguaglianza interpolativa $[u]_\alpha \le \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$, abbiamo quindi

$$\|u\|_{2,\alpha} \le c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)c_\varepsilon\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big).$$

Scegliendo $\varepsilon = (2c(\Omega)\mathcal{N}(\|f\|_\alpha))^{-1}$ otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \le 2c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)c_\varepsilon\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big),$$

e quindi la tesi. □

Teorema 7.4.7 (Esistenza) *Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica soluzione $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema (7.8).*

DIM. L'unicità è stata già provata nella Proposizione 7.4.5. Per dimostrare l'esistenza, supponiamo dapprima $F \in C^3(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema

$$(P_t) \quad \begin{cases} u - \Delta u + tF(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$ e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ fissata. Poniamo

$$E = \{t \in [0,1] \mid (P_t) \text{ ammette soluzione in } C_0^{2,\alpha}(\Omega)\}.$$

$E \neq \emptyset$ dato che per $0 \in E$.

Proviamo che E è chiuso. Sia $(t_n) \subseteq E$ tale che $t_n \to t_0$ e siano u_n le soluzioni di (P_{t_n}). Per la proposizione precedente risulta

$$\|u_n\|_{2,\alpha} \leq \mathcal{M}(\|f\|_\alpha),$$

con $\mathcal{M}$ indipendente da n. Per compattezza, esiste un'estratta, che indichiamo ancora con u_n, che converge ad una certa u_0 in $C^2(\overline{\Omega})$. Usando ancora la stima precedente, si vede che $u_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Infine, passando puntualmente al limite nell'equazione differenziale e nella condizione al bordo soddisfatte da u_n, si trova che u_0 risolve (P_0).

Proviamo ora che E è aperto. Sia $t_0 \in E$ e sia u_0 la soluzione corrispondente a (P_{t_0}). Linearizziamo il problema intorno a u_0 andando a cercare, per t vicino a t_0, la soluzione di (P_t) nella forma $u = u_0 + v$. Risulta allora che

$$u - \Delta u + tF(u) = f \quad \Leftrightarrow \quad v - \Delta v + tF(u_0 + v) = t_0 F(u_0)$$

ossia

$$v - \Delta v + tF'(u_0)v = (t_0 - t)F(u_0) - t\Big(F(u_0 + v) - F(u_0) - F'(u_0)v\Big). \tag{7.11}$$

Se $w \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, il problema

$$\begin{cases} v - \Delta v + tF'(u_0)v = (t_0 - t)F(u_0) & \\ \qquad\qquad -t\Big(F(u_0 + w) - F(u_0) - F'(u_0)w\Big) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è lineare in v. Inoltre, come vedremo, se w è in una palla scelta opportunamente il secondo membro è una funzione α-hölderiana, per cui, applicando i risultati della sezione 5.6, esiste un'unica soluzione che dipende in modo non lineare da w: $v = R_t(w)$. Per il nostro scopo, è quindi necessario trovare un punto fisso per l'operatore R_t. Sia dunque

$$G(w) = F(u_0 + w) - F(u_0) - F'(u_0)w.$$

Si ha che $G(0) = 0$ e $G'(0) = 0$. Sia $M > 0$ tale che $\|u_0\|_\alpha \leq M$. Poniamo

$$k = \sup_{|x| \leq 2M} \left(|F(x)| + |F''(x)| + |F'''(x)|\right).$$

Siano $\|w_1\|_\alpha \leq M$ e $\|w_2\|_\alpha \leq M$. Posto $w_s = (1 - s)w_1 + sw_2$, risulta

$$G(w_2) - G(w_1) = (w_2 - w_1) \int_0^1 (F'(u_0 + w_s) - F'(u_0))ds,$$

e quindi

$$\|G(w_2) - G(w_1)\|_\infty \leq k\,\|w_2 - w_1\|_\infty(\|w_1\|_\infty + \|w_2\|_\infty). \tag{7.12}$$

Per stimare la seminorma hölderiana di G, osserviamo che, puntualmente, possiamo scrivere

$$F'(u_0+w_s)-F'(u_0)=\int_{u_0}^{w_s+u_0}F''(t)dt=w_s\int_0^1 F''(u_0+rw_s)dr,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}[F'(u_0+w_s)-F'(u_0)]_\alpha \quad &\le \quad \|w_s\|_\infty\left[\int_0^1 F''(u_0+rw_s)dr\right]_\alpha \\ &\quad +[w_s]_\alpha\left\|\int_0^1 F''(u_0+rw_s)dr\right\|_\infty \end{aligned} \tag{7.13}$$

Risulta

$$\begin{aligned}&\Big(F''(u_0(x)+rw_s(x))-F''(u_0(y)+rw_s(y))\Big)\\ &\qquad\qquad = F'''(\xi)\big(u_0(x)-u_0(y)+r(w_s(x)-w_s(y)\big)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left[\int_0^1 F''(u_0+rw_s)dr\right]_\alpha \le k\,([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha).$$

Riprendendo la stima (7.13), abbiamo

$$[F'(u_0+w_s)-F'(u_0)]_\alpha \le \|w_s\|_\infty k\,([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha)+[w_s]_\alpha\,k$$

da cui

$$\begin{aligned}\left[\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right]_\alpha \quad &\le \quad k\,\|w_s\|_\infty([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha)+k\,[w_s]_\alpha \\ &\le \quad k\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha)(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha \\ &\qquad +\|u_0\|_\alpha)+k\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha) \\ &\le \quad k(3M+1)\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha).\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}[G(w_2)-G(w_1)]_\alpha \quad &\le \quad [w_2-w_1]_\alpha\left\|\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right\|_\infty \\ &\qquad +\|w_2-w_1\|_\infty\left[\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right]_\alpha \\ &\le \quad k\,[w_2-w_1]_\alpha(\|w_1\|_\infty+\|w_2\|_\infty) \\ &\qquad +k(3M+1)\|w_2-w_1\|_\infty(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha) \\ &\le \quad k_1\|w_2-w_1\|_\alpha(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha).\end{aligned}$$

Infine, tenendo conto di (7.12), abbiamo

$$\|G(w_2) - G(w_1)\|_\alpha \leq k_2\|w_2 - w_1\|_\alpha(\|w_1\|_\alpha + \|w_2\|_\alpha).$$

Tenendo conto del fatto che $G(0) = 0$, otteniamo

$$\|G(w)\|_\alpha \leq k_2\|w\|_\alpha^2. \tag{7.14}$$

A questo punto notiamo che le stime di Schauder per l'operatore $\Delta - tF'(u_0)$ (vedi (5.6.5)) sono indipendenti da $t \in [0, 1]$ e, siccome $R_t(u) = \big(1 - (\Delta - tF'(u_0)\big)^{-1}$, risulta

$$\|R_t(w)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha)(\|(t_0 - t)F(u_0)\|_\alpha + \|G(w)\|_\alpha) \tag{7.15}$$

e

$$\|R_t(w_2) - R_t(w_1)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha)\|G(w_2) - G(w_1)\|_\alpha.$$

Vogliamo scegliere a questo punto $\delta, \delta_1 > 0$ tali che se $|t - t_0| \leq \delta_1$ allora R_t mappa B_δ in B_δ ed è una contrazione. Se $\|w\|_\alpha \leq \delta$ e $|t - t_0| \leq \delta_1$, allora tenendo conto delle stime (7.14) e (7.15) abbiamo

$$\|R_t(w)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha)(\delta_1\|F(u_0)\|_\alpha + k_2\delta^2),$$

per cui scegliendo δ, δ_1 sufficientemente piccoli otteniamo $\|R_t(w)\|_\alpha \leq \delta$. Se $\|w_1\|_\alpha \leq \delta$, $\|w_2\|_\alpha \leq \delta$ allora

$$\|R_t(w_2) - R_t(w_1)\|_\alpha \leq 2\,C(\Omega, \alpha)\delta k_2\|w_2 - w_1\|_\alpha$$

e quindi basta prendere δ in modo che $2\,C(\Omega, \alpha)\delta k_2 < 1$ affinchè R_t sia una contrazione. Pertanto esiste un'unica funzione v_t tale che $R_t(v_t) = v_t$, ossia un'unica soluzione dell'equazione (7.11), per ogni $|t - t_0| < \delta_1$. Ciò dimostra che $u_t = u_0 + v_t$ è la soluzione di (P_t) per ogni $|t - t_0| < \delta_1$ e quindi l'insieme E è anche aperto. Per connessione, deve essere $E = [0, 1]$ e questo conclude la dimostrazione nell'ipotesi che $F \in C^3(\mathbb{R})$.

Nel caso generale, basta approssimare F mediante convoluzione. Poniamo pertanto

$$\widetilde{F}_\varepsilon(x) = (F * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)\phi_\varepsilon(y)dy \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

dove (ϕ_ε) è una famiglia di mollificatori: $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$ e supp $\phi \subset B_1(0)$. E' chiaro $\widetilde{F}_\varepsilon(x) \to F(x)$ e $\widetilde{F}'_\varepsilon(x) = (F' * \phi_\varepsilon)(x) \to F'(x)$, per $\varepsilon \to 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $\widetilde{F}_\varepsilon(x) \geq 0$. Per quanto dimostrato, in corrispondenza di un dato $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ fissato, esistono funzioni u_ε che soddisfano

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + F_\varepsilon(u_\varepsilon) = f & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $F_\varepsilon(x) = \widetilde{F}_\varepsilon(x) - \widetilde{F}_\varepsilon(0)$. Inoltre, per la Proposizione 7.4.6 valgono le stime

$$\|u_\varepsilon\|_{2,\alpha} \leq \mathcal{M}_\varepsilon(\|f\|_\alpha). \tag{7.16}$$

Ripercorrendo la dimostrazione della stessa proposizione si vede che la dipendenza di $\mathcal{M}_\varepsilon$ da ε è attraverso la funzione $\mathcal{N}_\varepsilon(s) = \sup_{|t|\leq s}(|F_\varepsilon(t)| + |F'_\varepsilon(t)|)$. Ma è immediato verificare che $\mathcal{N}_\varepsilon(s) \leq 2\mathcal{N}(s+1)$ per ε piccolo, per cui la stima (7.16) implica che la famiglia (u_ε) è limitata in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e procedendo in modo standard si costruisce una successione (u_n) che converge alla soluzione del problema (7.8).

Esempio 7.4.8 Consideriamo la seguente equazione quasi lineare in $\mathbb{R}^N$

$$u - \Delta u - F(\nabla u) = f. \tag{7.17}$$

Il nostro obiettivo è provare il seguente teorema

Teorema 7.4.9 *Se $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$ allora per ogni $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ soluzione di (7.17).*

Vale il seguente principio del massimo.

Lemma 7.4.10 (Principio del massimo) *Sia $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $F(0) = 0$. Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ soluzione dell'equazione $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$, dove $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere

$$F(y) - F(x) = (y - x) \cdot \int_0^1 (\nabla F)(x + t(y - x))dt,$$

da cui segue, prendendo $x = 0$ e tenendo conto che $F(0) = 0$

$$F(\nabla u) = \nabla u \cdot \int_0^1 (\nabla F)(t\nabla u)dt$$

puntualmente in $\mathbb{R}^N$. Pertanto l'equazione soddisfatta da u diventa $u - \Delta u - G \cdot \nabla u = f$, dove la funzione $G(x) = \int_0^1 (\nabla F)(t\nabla u(x))dt$ è continua e limitata in $\mathbb{R}^N$.

Sia $v(x) = \gamma + |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^N$. Scegliendo $\gamma > 0$ abbastanza grande si trova che

$$\Delta v + G \cdot \nabla v \leq v.$$

Sia $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$. Allora u_ε ammette massimo in qualche $x_0 \in \mathbb{R}^N$, dove risulta

$$\Delta u_\varepsilon(x_0) + G(x_0) \cdot \nabla u_\varepsilon(x_0) \leq 0$$

e

$$\begin{aligned}(u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon - G\cdot\nabla u_\varepsilon)(x_0) &= (u-\varepsilon v)(x_0) - (\Delta u - \varepsilon\Delta v)(x_0)\\ &\quad -G(x_0)\cdot(\nabla u(x_0) - \varepsilon\nabla v(x_0))\\ &= f(x_0) - \varepsilon(v - \Delta v - G\cdot\nabla v)(x_0)\\ &\le f(x_0).\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}u(x) - \varepsilon v(x) &= u_\varepsilon(x) \le u_\varepsilon(x_0) \le u_\varepsilon(x_0) - \Delta u_\varepsilon(x_0) - G(x_0)\cdot\nabla u_\varepsilon(x_0)\\ &\le f(x_0) \le \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ si ottiene che $u(x) \le \|f\|_\infty$. La dimostrazione della disuguaglianza $u(x) \ge -\|f\|_\infty$ è analoga con $u + \varepsilon v$ al posto di $u - \varepsilon v$. $\square$

Corollario 7.4.11 *Se $u \in C^3_b(\mathbb{R}^N)$ risolve l'equazione $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$ con $f \in C^1_b(\mathbb{R}^N)$ e $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$\|\nabla u\|_\infty \le \|\nabla f\|_\infty.$$

DIM. Derivando l'equazione differenziale rispetto a x_i e ponendo $v = D_i u$ si vede facilmente che v soddisfa

$$v - \Delta v - G\cdot\nabla v = D_i f,$$

dove $G(x) = \nabla F(\nabla u(x))$. Applicando il Lemma 7.4.10, si ha che $\|D_i u\|_\infty \le \|D_i f\|_\infty$, da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Com'è naturale, a questo punto cerchiamo delle stime a priori al fine di provare l'esistenza di una soluzione per l'equazione (7.17).

D'ora in avanti assumiamo che $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Introduciamo la funzione

$$\mathcal{S}(t) = \sup_{|x|\le t}\{|F(x)| + |\nabla F(x)| + |D^2 F(x)|\},$$

dove $D^2 F$ denota l'hessiano di F.

Proposizione 7.4.12 *Esiste una funzione $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dipendente da $\mathcal{S}$, α e N, tale che per ogni $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{3,\alpha} \le \mathcal{M}(\|f\|_{1,\alpha}),$$

dove $f = u - \Delta u - F(\nabla u)$.

DIM. Sia $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando la stima (5.49) con $k = 1$, $\lambda = 1$, $A = \Delta$ otteniamo

$$\|u\|_{3,\alpha} \le C(\alpha)\|u - \Delta u\|_{1,\alpha},$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\|u\|_{3,\alpha} &\leq C(\alpha)(\|u - \Delta u - F(\nabla u)\|_{1,\alpha} + \|F(\nabla u)\|_{1,\alpha}) \\ &= C(\alpha)(\|f\|_{1,\alpha} + \|F(\nabla u)\|_{1,\alpha}).\end{aligned} \tag{7.18}$$

Stimiamo singolarmente i termini che definiscono la norma $\|F(\nabla u)\|_{1,\alpha}$, ovvero, passando ad una norma equivalente, $\|F(\nabla u)\|_\infty$ e $[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha$. Tenendo conto del Corollario 7.4.11 e del fatto che la funzione $\mathcal{S}$ è crescente, si ha

$$\|F(\nabla u)\|_\infty \leq \mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty) \leq \mathcal{S}(\|\nabla f\|_\infty) \leq \mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha}). \tag{7.19}$$

Stimiamo ora la seminorma hölderiana di $\nabla(F(\nabla u) = D^2 u \cdot \nabla F(\nabla u)$. Applicando la disuguaglianza triangolare e il teorema di Lagrange in forma debole, risulta

$$\begin{aligned}|\nabla(F(\nabla u))(x) - \nabla(F(\nabla u))(y)| &\leq |(D^2u(x) - D^2(y))(\nabla F)(\nabla u(x))| \\ &\quad + |D^2u(y)\big(\nabla F(\nabla u(x)) - \nabla F(\nabla u(y))\big)| \\ &\leq [D^2u]_\alpha |x-y|^\alpha \mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty) \\ &\quad + \|D^2u\|_\infty \, \mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty)|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \\ &\leq \|u\|_{2,\alpha}\mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty)(1 + [\nabla u]_\alpha)|x-y|^\alpha \\ &\leq \|u\|_{2,\alpha}\mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})(1 + [\nabla u]_\alpha)|x-y|^\alpha\end{aligned}$$

e quindi

$$[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha \leq \mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})(1 + [\nabla u]_\alpha)\|u\|_{2,\alpha}.$$

Tenendo conto delle stime (7.4) e (7.19) si ha

$$\begin{aligned}[\nabla u]_\alpha &\leq C(\alpha, N)\|u - \Delta u\|_\infty \leq C(\alpha, N)(\|f\|_\infty + \|F(\nabla u)\|_\infty) \\ &\leq C(N, \alpha)(\|f\|_{1,\alpha} + \mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})).\end{aligned}$$

Pertanto

$$[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha \leq C(\alpha, N)\widetilde{\mathcal{S}}(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_{2,\alpha}, \tag{7.20}$$

per qualche nuova funzione $\widetilde{\mathcal{S}}$.

D'altronde per il principio di massimo classico, possiamo scrivere

$$\|u\|_\infty \leq \|u - \Delta u\|_\infty. \tag{7.21}$$

Tenendo conto di (7.19) e (7.20) la (7.18) implica

$$\|u\|_{3,\alpha} \leq C(N, \alpha)\Big(\|f\|_{1,\alpha} + \mathcal{S}_1(\|f\|_{1,\alpha}) + \mathcal{S}_2(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_{2,\alpha}\Big)$$

per opportune funzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Interpolando $\|u\|_{2,\alpha}$ tra $\|u\|_{3,\alpha}$ e $\|u\|_\infty$ si ottiene

$$\|u\|_{3,\alpha} \leq C(N, \alpha)\mathcal{S}_3(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_\infty.$$

Infine tenendo conto di (7.21) e ancora di (7.19) possiamo maggiorare $\|u\|_\infty$ con una funzione dipendente da $\|f\|_{1,\alpha}$ e concludere pertanto la dimostrazione. □

Veniamo ora al teorema di esistenza.

Teorema 7.4.13 *Assumiamo $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Allora per ogni $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$.*

DIM. La dimostrazione dell'unicità è identica a quella della Proposizione 7.4.5. Per provare l'esistenza, supponiamo dapprima $F \in C^3(\mathbb{R}^N)$. Sia $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ fissata. Introduciamo l'insieme

$$E = \left\{ t \in [0,1] \mid u - \Delta u - tF(\nabla u) = f \text{ ammette soluzione in } C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Siccome $0 \in E$, $E \neq \emptyset$.

Proviamo che E è chiuso. Sia $(t_n) \subseteq E$ tale che $t_n \to t_0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $u_n \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n - \Delta u_n - t_n F(\nabla u_n) = f$. Per la Proposizione 7.4.12, risulta

$$\|u_n\|_{3,\alpha} \leq \mathcal{M}(\|f\|_{1,\alpha}),$$

dove $\mathcal{M}$ si è potuta scegliere indipendente da n. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà si trova un'estratta (u_{nk}) che converge uniformemente sui compatti, insieme alle derivate fino al terzo ordine, ad una certa funzione $u \in C^3(\mathbb{R}^N)$. Siccome le seminorme hölderiane delle funzioni approssimanti sono equilimitate, si ottiene anche che $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Infine, passando puntualmente al limite nelle equazioni soddisfatte da u_{nk}, si vede che u è soluzione dell'equazione corrispondente a t_0, per cui $t_0 \in E$.

Proviamo adesso che E è aperto. Sia $t_0 \in E$ e sia u_0 la corrispondente soluzione. Sia $|t - t_0| < \delta_1$, dove $\delta_1 > 0$ verrà scelto in seguito. Cerchiamo la soluzione relativa a t linearizzando l'equazione intorno a u_0. Presa pertanto una funzione della forma $u = u_0 + v$, risulta che $u - \Delta u - tF(\nabla u) = f$ se e solo se v soddisfa

$$\begin{aligned} &v - \Delta v - t(\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v = \\ &\qquad (t - t_0)F(\nabla u_0) + t\Big(F(\nabla u_0 + \nabla v) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v\Big). \end{aligned}$$

Studiamo allora l'equazione lineare

$$\begin{aligned} &v - \Delta v - t(\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v = \\ &\quad (t - t_0)F(\nabla u_0) + t\Big(F(\nabla u_0 + \nabla w) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla w\Big). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Gli argomenti della dimostrazione della Proposizione 7.4.12 provano che se $z \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ allora $F(\nabla z) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\|F(\nabla z)\|_{1,\alpha}$ si può stimare mediante $\mathcal{S}(\|z - \Delta z - F(\nabla z)\|_{1,\alpha})$ e $\|z\|_{2,\alpha}$. Analogamente allora se $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ allora la funzione a secondo membro in (7.22) è in $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando quindi i risultati della teoria lineare, si trova un'unica soluzione $v \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ dell'equazione (7.22). Risulta così ben definito il seguente operatore (non lineare)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t : C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) &\to C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N) \\ w &\longmapsto v \end{aligned}$$

Il nostro obiettivo a questo punto è trovare un punto fisso per $\mathcal{R}_t$.

Introduciamo la funzione (definita puntualmente)

$$\begin{aligned} G(w) &= F(\nabla u_0 + \nabla w) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0)\cdot \nabla w \\ &= \nabla w \cdot \int_0^1 \Big((\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w) - (\nabla F)(\nabla u_0)\Big) ds \\ &= \nabla w \cdot H(w). \end{aligned}$$

Se $\|u_0\|_{1,\alpha} \le M$, scegliamo $w_1, w_2 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\|w_1\|_{1,\alpha}, \|w_2\|_{1,\alpha} \le M$. Allora risulta

$$G(w_1) - G(w_2) = \nabla w_1 \cdot \Big(H(w_1) - H(w_2)\Big) + (\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot H(w_2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} [G(w_1) - G(w_2)]_\alpha \le\ & [\nabla w_1]_\alpha \|H(w_1) - H(w_2)\|_\infty \\ & + \|\nabla w_1\|_\infty [H(w_1) - H(w_2)]_\alpha \\ & + [\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha \|H(w_2)\|_\infty \\ & + \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty [H(w_2)]_\alpha. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Si ha

$$H(w_1) - H(w_2) = \int_0^1 \Big((\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)\Big) ds$$

per cui, applicando il teorema di Lagrange in forma debole otteniamo

$$\|H(w_1) - H(w_2)\|_\infty \le K \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty, \tag{7.24}$$

con $K = \sup_{|\xi|\le 4M} |(D^2F)(\xi)| + \sup_{|\xi|\le 4M} |(D^3F)(\xi)|$. Per stimare la seminorma hölderiana di $H(w_1) - H(w_2)$, che è una funzione vettoriale, consideriamone la componente i-sima

$$\int_0^1 \Big((D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)\Big) ds.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & D_iF(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2) = \\ & = s(\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot \int_0^1 \Big(\nabla(D_iF)\Big)(\nabla u_0 + s\nabla w_1 + r\,s(\nabla w_1 - \nabla w_2)) dr \\ & := s(\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot J(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Perciò risulta

$$\begin{aligned} & [D_iF(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)]_\alpha \le \\ & \qquad \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty [J(w_1, w_2)]_\alpha + [\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha \|J(w_1, w_2)\|_\infty. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Per stimare $[J(w_1, w_2)]_\alpha$ osserviamo che

$$\Big[\Big(\nabla(D_iF)\Big)(\nabla u_0 + s\nabla w_1 + r\, s(\nabla w_1 - \nabla w_2))\Big]_\alpha \leq \\ \sup_{|\xi|\leq 4M} |(D^3F)(\xi)|\big([\nabla u_0]_\alpha + [\nabla w_1]_\alpha + [\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha\big) \leq 4MK$$

pertanto, riprendendo (7.25) abbiamo

$$[H(w_1) - H(w_2)]_\alpha \leq 4MK\|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty + K[\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha. \quad (7.26)$$

Se $w_1 = 0$ si deducono

$$[H(w)]_\alpha \leq 4MK\|\nabla w\|_\infty + K[\nabla w]_\alpha \quad (7.27)$$

e

$$\|H(w)\|_\infty \leq K\|\nabla w\|_\infty. \quad (7.28)$$

Usando le stime (7.24), (7.26), (7.27) e (7.28) in (7.23) si ottiene

$$\begin{aligned}
[G(w_1) - G(w_2)]_\alpha \;\leq\; & K\Big(\|w_1\|_{1,\alpha} + \|w_2\|_{1,\alpha}\Big)\|w_1 - w_2\|_\infty \\
& + \Big(\|w_1\|_{1,\alpha} + \|w_2\|_{1,\alpha}\Big)\Big(4KM\|w_1 - w_2\|_{1,\alpha} \\
& + K\|w_1 - w_2\|_{1,\alpha}\Big) \\
& + K\,\|w_1 - w_2\|_{1,\alpha}\Big(\|w_1\|_{1,\alpha} + \|w_2\|_{1,\alpha}\Big) \\
& + \|w_1 - w_2\|_{1,\alpha}\Big(4KM(\|w_1\|_{1,\alpha} + \|w_2\|_{1,\alpha}) \\
& + M(\|w_1\|_{1,\alpha} + \|w_2\|_{1,\alpha})\Big) \\
\leq\; & K'\|w_1 - w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha} + \|w_2\|_{2,\alpha}).
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
\|G(w_1) - G(w_2)\|_\infty \quad \leq \quad & \|\nabla w_1\|_\infty\|H(w_1) - H(w_2)\|_\infty \\
& + \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty\|H(w_2)\|_\infty \\
\leq \quad & K''\|w_1 - w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha} + \|w_2\|_{2,\alpha}).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|G(w_1) - G(w_2)\|_\alpha \leq \tilde{K}\|w_1 - w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha} + \|w_2\|_{2,\alpha}). \quad (7.29)$$

e

$$\|G(w)\|_\alpha \leq \tilde{k}\|w\|^2_{2,\alpha}. \quad (7.30)$$

Siccome

$$R_t(w) = \Big(1 - \Delta - t(\nabla F)(\nabla u_0)\cdot\nabla\Big)^{-1}\Big((t - t_0)F(\nabla u_0) + t\,G(w)\Big)$$

usando la stima sul risolvente da $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ in $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, se $|t-t_0|<\delta_1$ e $\|w\|_{2,\alpha}\le\delta$ risulta

$$\begin{aligned}\|R_t(w)\|_{2,\alpha} &\le C(\|F(\nabla u_0)\|_\alpha|t-t_0|+t\|G(w)\|_\alpha)\\ &\le C(\|F(\nabla u_0)\|_\alpha\delta_1+\tilde{K}\delta^2).\end{aligned}$$

Scegliamo δ_1 abbastanza piccolo affinchè il secondo membro della disuguaglianza di sopra sia minore di δ. In questo modo è garantito che R_t mappa $\overline{B}_\delta=\{z\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N):\|z\|_{2,\alpha}\le\delta\}$ in sè. Poi

$$\|R_t(w_1)-R_t(w_2)\|_{2,\alpha}\le C\|G(w_1)-G(w_2)\|_\alpha\le C\tilde{K}\|w_1-w_2\|_{2,\alpha}\,2\delta.$$

Adesso scegliamo δ affinchè $2C\tilde{K}\delta<1$ in modo da avere che R_t è una contrazione. Allora esiste un'unica funzione $v\in\overline{B_\delta}$ tale che $R_t(v)=v\in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. La funzione $u=u_0+v$ è la soluzione richiesta.

L'ultimo punto della dimostrazione, cioè il caso generale $F\in C^2(\mathbb{R}^N)$ si prova per approssimazione come nell'esempio precedente.

NOTAZIONI

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$.

$C_0^\infty(\Omega)$	spazio delle funzioni derivabili con continuità infinite volte e a supporto compatto in Ω;
$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$	spazio delle funzioni u misurabili secondo Lebesgue con $\|u\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$ (se non c'è ambiguità, scriveremo $\|u\|_{L^p}$ al posto di $\|u\|_{L^p(\Omega)}$);
$(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$	spazio delle funzioni u con derivate distribuzionali fino all'ordine k in $L^p(\Omega)$ con norma $\|u\|_{k,p} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_{L^p}$;
$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	spazio delle funzioni appartenenti a $W^{k,p}(\Omega')$ per ogni aperto limitato Ω' con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$;
$W_0^{k,p}(\Omega)$	chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$;
$C(\Omega)$	spazio delle funzioni continue in Ω;
$C_b(\Omega)$	spazio delle funzioni continue e limitate in Ω;
$C^k(\Omega)$	spazio delle funzioni derivabili k volte con continuità in Ω;
$(C_b^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_k)$	spazio delle funzioni u derivabili k volte in Ω con tutte le derivate fino all'ordine k limitate e che si estendono con continuità a $\overline{\Omega}$, munito della norma $\|u\|_k := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_\infty$, dove $\|v\|_\infty = \sup_{\overline{\Omega}} |v|$;
$C_0(\overline{\Omega})$	spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ nulle su $\partial\Omega$;

$(C^{0,\alpha}(\Omega), \\| \cdot \\|_\alpha)$	spazio delle funzioni u α-hölderiane in Ω, ossia in $C_b(\Omega)$ e con $[u]_\alpha := \sup\limits_{x,y\in\Omega; x\neq y} \dfrac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} < +\infty$, munito della norma $\\|u\\|_\alpha := \\|u\\|_\infty + [u]_\alpha$;
$(C^{k,\alpha}(\Omega), \\| \cdot \\|_{k,\alpha})$	spazio delle funzioni in $C^k_b(\Omega)$ con derivate di ordine k in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $\\|u\\|_{k,\alpha} := \\|u\\|_k + \sum_{\|\beta\|=k}[D^\beta u]_\alpha$;
$C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	spazio delle funzioni in $C^{k,\alpha}(\Omega')$ per ogni Ω' aperto limitato con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$C^{2,\alpha}_0(\Omega)$	$C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$;
$C^\gamma(\Omega)$	$C^{k,\alpha}(\Omega)$, dove $k = [\gamma]$ e $\alpha = \{\gamma\}$ sono rispettivamente la parte intera e reale di γ;
$B_R(x_0)$	palla di centro x_0 e raggio R. Scriveremo solo B_R quando non sarà importante indicare esplicitamente il centro;
$\mathbb{R}^N_+$	$\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x_N > 0\}$;
$B^+_R(x_0)$	$B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^N_+$;
ω_N	misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^N$;
$\|\Omega\|$	misura di Lebesgue dell'aperto Ω;
$\Omega' \subset\subset \Omega$	aperti con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$\Omega(x_0, R)$	$\Omega \cap B_R(x_0)$;
$u_{x_0,R}$	$\dfrac{1}{\|\Omega(x_0,R)\|}\displaystyle\int_{\Omega(x_0,R)} u(y)dy$ (spesso scriveremo semplicemente u_R al posto di $u_{x_0,R}$);
$(L^{2,\lambda}(\Omega), \\| \cdot \\|_{2,\lambda})$	spazio delle funzioni u di $L^2(\Omega)$ con $\|u\|^2_\lambda := \sup\limits_{x_0\in\Omega, R>0} \dfrac{1}{R^\lambda}\displaystyle\int_{\Omega(x_0,R)} \|u(x) - u_{x_0,R}\|^2 dx < +\infty$, munito della norma $\\|u\\|_{2,\lambda} := \\|u\\|_2 + \|u\|_\lambda$.

Bibliografia

[1] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", 2nd edition* Springer, Berlin, 1983.

[2] E. Giusti, *"Equazioni ellittiche del secondo ordine",* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, Pitagora Editrice, Bologna, 1978.

[3] N. V. Krylov, *"Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces",* American Mathematical Society, Providence, 1996.

Finito di stampare
nel mese di ottobre 2004
dalla Tiemme (Industria Grafica) Manduria
per conto delle Edizioni del Grifo
via V. Monti, 18 - Lecce

ISBN:88-8305-017-7