Nota bibliografica

Prima di chiudere questi appunti, mi sia consentito un ricordo personale. Molti anni fa, quando ero uno studente che scriveva la tesi di laurea, entrai in contatto con la teoria ergodica attraverso il mio relatore, PIETRO BOCCHIERI, che mi fece conoscere il bellissimo libro di KHINCHIN. Da allora, il mio interesse per tale teoria non è mai venuto meno. Subito dopo la laurea, intraprendendo gli studî di Dottorato, ebbi la fortuna di avere la guida di BRUNO FORTE, che aveva contribuito alla teoria e che, proprio allora, stava scrivendo i suoi importanti lavori sull'entropia. A questi Maestri vada qui la mia commossa gratitudine.

La letteratura sulla meccanica statistica è veramente vastissima; quella indicata di seguito è solo un minuscolo assaggio. Tra i molti eccellenti libri di testo, dedicati soprattutto agli aspetti fisici, segnalo quelli di HUANG [**31**], di WANNIER [**71**], di LANDAU & LIFCHITZ [**42**], di PATHRIA [**54**]. Piú recentemente alcune monografie sono state dedicate agli aspetti matematice della meccanica statistica; l'antesignano di queste è l'oramai classico libro di RUELLE [**62**]. Si vedano poi i libri di THOMPSON [**69**] e di MINLOS [**47**].

Tra i libri dedicati alla Teoria ergodica molti sono eccellenti. Citerò in primo luogo quello di HALMOS [**26**] e poi quelli di FRIEDMAN [**20**], di BROWN [**11**], di WALTERS [**70**], PARRY [**53**], CORNFELD *et al* [**13**], di PETERSEN [**57**], di MAÑÉ [**45**] e di NADKARMI [**49**]. Una buona introduzione non strettamentre tecnica, ma culturalmente impegnativa è costituita dal lungo articolo di MACKAY [**44**], che tratta anche dei legami con l'analisi armonica, argomento che nelle lezioni è stato soltanto sfiorato in un paio di esempî, ma non citato esplicitamente. Esistono poi libri dedicati ad aspetti particolari della Teoria ergodica, come quello di SHIELDS [**67**] sulla dimostrazione dei teoremi di isomorfismo di ORNSTEIN e quello di ORNSTEIN stesso [**52**].

1.1 Per i richiami di meccanica analitica, ci si può sempre rifare al classico testo di LEVI–CIVITA & AMALDI [**43**, Capitolo X], oppure a [**41**]. Per la dimostrazione del teorema di LIOUVILLE si può consultare il libro di

KHINCHIN [**37**]. Ai problemi ergodici della meccanica classica è dedicato il libro di ARNOLD & AVEZ [**5**]; per tutto l'approccio alla meccanica statistica basato sulla teoria ergodica si potrà citare, innanzi tutto, il già citato libro di KHINCHIN [**37**] e quelli di FARQUHAR [**15**] e JANCEL [**32**]. Qualche fisico sostiene anche che l'approccio alla meccanica statistica attraverso la teoria ergodica è oramai "fuori moda", *old fashioned*; si veda per esempio l'articolo di PENROSE [**56**].

1.3 Anche i processi stazionarî a tempo continuo derivano da un semigruppo di trasformazioni che conservano la misura; si veda l'inizio del Capitolo XI del libro di DOOB [**14**].

1.6 Si noti che l'operatore U_T definito da $U_T f := f \circ T$, dove, per il momento, si può supporre che U_T agisca su $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ è un operatore di MARKOV, nel senso che esso è lineare, positivo, $U_T f \geq 0$ se $f \geq 0$, lascia invarianti le funzioni costanti, $U_T 1 = 1$ e lascia invariata la speranza, $E(U_T f) = E(f)$. Inoltre, per operatori di MARKOV U_T indotti da una trasformazione T che conserva la misura, vale la relazione

$$U_T(f \cdot g) = (U_T f)\ (U_T g) .$$

Per gli operatori di MARKOV in generale si vedano [**10, 51**].

1.7–1.8 Le date di pubblicazione dei Teoremi di BIRKHOFF e di VON NEUMANN sono rispettivamente il 1931 e il 1932 ([**8, 50**]), ma il Teorema di VON NEUMANN di convergenza in L^2 precede quello di convergenza quasi certa. La dimostrazione del Teorema di BIRKHOFF che ho dato qui è dovuta a RIESZ [**59**].

La prima versione del teorema ergodico massimale è dovuta a WIENER [**73**] e a YOSIDA & KAKUTANI [**75**]. In seguito E. HOPF [**30**] ne diede la versione per operatori che appare qui; la dimostrazione che ne dò, e che è oramai quella usuale, è dovuta a GARSIA [**21**].

1.8. Un teorema di RÉNYI ([**58**]) mostra che una trasformazione che conserva la misura su $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ è fortemente mescolante se, e solo se, per ogni insieme A di $\mathcal{F}$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(T^{-1} A \cap A\right) = \mu^2(A),$$

e che essa è debolmente mescolante se, e solo se, per ogni insieme A di $\mathcal{F}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu\left(T^{-1} A \cap A\right) - \mu^2(A)\right| = 0.$$

1.9. Il Teorema 9.4 è dovuto a KOOPMAN e VON NEUMANN [**40**]. Nel Corollario 9.1 si è provato che per ogni coppia A e B di insiemi misurabili esiste un unsieme $J(A, B)$ di densità nulla per il quale vale

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin J(A,B)}} \mu\left(T^{-n} A \cap B\right) = \mu(A)\,\mu(B).$$

Si può dimostrare che in effetti esiste un *unico* insieme J di densità nulle tale che sia

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin J}} \mu\left(T^{-n} A \cap B\right) = \mu(A)\,\mu(B),$$

per ogni coppia A e B di insiemi misurabili.

1.12 Il primo teorema di categoria è in realtà posteriore al secondo; il primo teorema fu dimostrato da ROKHLIN [**60**], mentre il secondo è dovuto a HALMOS [**24**]. In [**4**] si mostra come ottenere simultaneamente i due teoremi di categoria.

1.15 Per maggiori informazioni sulle misure invarianti si veda il libro di HALMOS [**26**].

2.1 Per le algebre di BOOLE si veda [**29**].

3.2 Come si è già detto, l'introduzione dell'entropia è dovuto a KOLMOGOROV. Si veda a tal proposito [**39**] e la discussione di SINAI in [**68**] alle pp. 247–250. Si vedano anche [**28**] e [**7**]

Il concetto di entropia viene dalla meccanica statistica, ma il suo uso piú "moderno" avvenne nella Teoria dell'Informazione per la quale si veda, ad esempio [**6**]. Si deve riflettere sul fatto che nella teoria dell'informazione, sono state introdotte molte diverse rappresentazioni dell'entropia, si veda, all'uopo, [**2**]; questo pone immediatamente il problema di quale sia l'entropia "corretta" da adottare. Per tale problema si veda [**72**]. L'adozione dell'entropia (2.1), detta *entropia di* SHANNON, è giustificata adeguatamente, in un ambito che si richiama esplicitamente alla meccanica statistica dai lavori di FORTE [**18, 3**].

Incidentalmente, vale la pena di riferire che esite un approccio alla meccanica statistica attraverso la teoria dell'informazione; si vedano, tal proposito, i lavori pioneristici di JAYNES [**33, 34**] e poi [**17, 35, 65, 19, 66**].

3.4 Del Teorema 4.6 esiste un'altra dimostrazione basata sui teoremi di convergenza delle martingale; la si può leggere, per esempio, in [**57**, p. 241].