CAPITOLO 4

Disuguaglianze Log-Sobolev e ultracontrattività

4.1. Ultracontrattività

In questo capitolo studiamo l'ultracontrattività del semigruppo $(T(t))$, cioè la limitatezza di $T(t)$ da $L^1(\mu)$ in $L^\infty(\mu)$.

Per dimostrare questo risultato usiamo l'approccio di Davies e Simon, i quali hanno introdotto nel 1984 una famiglia di disuguaglianze di Sobolev logaritmiche (si vedano [**13**], [**12**]).

Definizione 4.1. *Data la funzione concava e crescente* $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$*, diremo che vale la disuguaglianza* $(S\Phi)$ *se risulta*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \le \|f\|_2^2 \Phi\left(\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2}\right), \quad \forall f \in \mathcal{A}_+. \tag{4.1}$$

Nel caso particolare di $\Phi(x) = Cx + M$, la precedente disuguaglianza diventa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica di costanti M e C. Se invece prendiamo

$$\Phi(x) = \frac{N}{2}\log(C_1 + C_2 x),$$

la (4.1) diventa

$$\mathrm{Ent}(f^2) \le \frac{N}{2}\|f\|_2^2 \log\left(C_1 + C_2\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2}\right), \quad \forall f \in \mathcal{A}_+, \tag{4.2}$$

che è nota come disuguaglianza di Sobolev debole. Ricordiamo che la disuguaglianza di Sobolev classica è data da

$$\|f\|_{\frac{2N}{N-2}} \le C_1\|f\|_2 + C_2\mathcal{E}(f,f)^{1/2}, \quad \forall f \in \mathcal{A}_+. \tag{4.3}$$

È facile notare che la disuguaglianza di Sobolev implica la disuguaglianza di Sobolev debole. Si può però vedere che vale anche l'implicazione inversa (vedere ad esempio [**6**, Teorema 10.2]).

Teorema 4.2. *Supponiamo che valga la disuguaglianza (4.1) con* $\Phi \in \mathcal{C}^1$ *funzione concava strettamente crescente e tale che*

$$\int_B^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} dx < +\infty,$$

per qualche $B > 0$. *Allora, per ogni* $\lambda > 0$ *si ha l'ultracontrattività*

$$\|T(t_\lambda)\|_{1\to\infty} \leq e^{m_\lambda},$$

dove

$$t_\lambda = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\Phi'(\lambda x)}{\sqrt{x(x-1)}} dx, \quad m_\lambda = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\Psi(\lambda x)}{x\sqrt{x(x-1)}} dx,$$

con $\Psi(x) = \Phi(x) - x\Phi'(x)$.

Dim. Mostriamo anzitutto che t_λ e m_λ sono ben definiti; dato che Φ' è decrescente, da

$$\int_B^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} dx < +\infty$$

si deduce che $\Phi'(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre, dato che

$$\frac{\Psi(x)}{x^2} = -\left(\frac{\Phi(x)}{x}\right)',$$

vale anche

$$\int_B^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2} dx < +\infty,$$

da cui segue che m_λ è ben definito. Dalla concavità di Φ si ricava anche che, per ogni x, x_0

$$\Phi(x) \leq \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0);$$

quindi, dalla disuguaglianza (4.1)

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq \|f\|_2^2 \left(\Phi(x_0) + \Phi'(x_0)\left(\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2} - x_0\right)\right),$$

da cui

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq \Psi(x_0)\|f\|_2^2 + \Phi'(x_0)\mathcal{E}(f,f),$$

cioè la disugualglianza di Sobolev logaritmica con costanti $M = \Psi(x_0)$ e $C = \Phi'(x_0)$. Quindi, grazie a quanto già notato nella dimostrazione del Teorema di Gross 3.20, si ricava che per ogni $f \in \mathcal{A}_+$ e per ogni $x > 0$

$$\mathrm{Ent}(f^p) \leq \Psi(x)\|f\|_p^p - \frac{\Phi'(x)p^2}{4(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1}A_2 f d\mu.$$

Ponendo $x = \frac{\lambda p^2}{4(p-1)}$ se ne deduce

$$\mathrm{Ent}(f^p) \leq \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\|f\|_p^p - \frac{\Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)p^2}{4(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N} f^{p-1}A_2 f d\mu. \quad (4.4)$$

Definiamo quindi $p(s)$ e $m(s)$ con $s \in [0,t)$ come le soluzioni, per t e λ fissati, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{ds} = \dfrac{4(p-1)}{\Phi'(\lambda p^2/(4(p-1)))}, & p(0)=1, \lim_{s\to t} p(s) = +\infty \\[2ex] \dfrac{dm}{ds} = \dfrac{4(p-1)}{p^2}\dfrac{\Psi(\lambda p^2/(4(p-1)))}{\Phi'(\lambda p^2/(4(p-1)))}, & m(0)=0. \end{cases}$$

Per questo sistema di equazioni differenziali si ha esistenza; infatti, se si considera

$$\tilde{t}_\lambda = \int_1^\infty \Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{4(p-1)} < +\infty$$

$$\tilde{m}_\lambda = \int_1^\infty \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{p^2} < +\infty;$$

queste due funzioni definiscono esattamente t_λ e m_λ dell'enunciato. Infatti, dividendo gli integrali tra 1 e 2 e tra 2 e ∞ ed effettuando il cambio di variabili

$$x = \frac{\lambda p^2}{4(p-1)}$$

si ottiene che $\tilde{t} = t$ e $\tilde{m} = m$. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema di Gross 3.20, otteniamo

$$\mathcal{H}'(s) = \frac{\mathcal{H}(s)}{\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu}\frac{p'(s)}{p^2(s)}\Bigg\{\mathrm{Ent}\big(u(s)^{p(s)}\big) - \frac{p^2(s)}{p'(s)}\bigg(m'(s)\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{q(s)-1}A_2u(s)d\mu\bigg)\Bigg\}$$

dove $\mathcal{H}(s) = e^{-m(s)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(s)^{p(s)}d\mu\right)^{\frac{1}{p(s)}}$ e $u(s) = T(s)f$, $s \in [0,t)$. Siccome $p(0)=1$, $m(0)=0$,

$$\frac{p^2(s)}{p'(s)}m'(s) = \Psi\left(\frac{\lambda p^2(s)}{4(p(s)-1)}\right) \quad \text{e} \quad \frac{p^2(s)}{p'(s)} = \frac{\Phi'\left(\frac{\lambda p^2(s)}{4(p(s)-1)}\right)p^2(s)}{4(p(s)-1)},$$

usando (4.4), si ottiene che

$$\mathcal{H}'(s) \le 0$$

per ogni $s \in [0,t)$, e quindi

$$\|T(s)f\|_{p(s)} \le e^{m(s)}\|f\|_1$$

dove

$$s = \int_1^{p(s)} \Phi'\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{4(p-1)}$$

e

$$m(s) = \int_1^{p(s)} \Psi\left(\frac{\lambda p^2}{4(p-1)}\right)\frac{dp}{p^2}.$$

Sfruttando anche la contrattività del semigruppo, abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\|T(t_\lambda f)\|_{p(s)} &= \|T(t_\lambda - s)T(s)f\|_{p(s)}\\ &\le \|T(s)f\|_{p(s)}\\ &\le e^{m(s)}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$m_\lambda = \lim_{s\to t} m(s),$$

abbiamo provato che

$$\|T(t_\lambda)f\|_\infty \le e^{m_\lambda}\|f\|_1.$$

□

Il teorema appena dimostrato ha il seguente corollario.

COROLLARIO 4.3. *Sotto le medesime ipotesi del Teorema 4.2 con, in aggiunta, la richiesta che per ogni* $x \in [0,1]$ *valga*

$$\Phi'(0) - \Phi'(x) \le kx,$$

si ha

i) *se* $\Phi(0) \neq 0$, *allora*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|T(t)\|_{1\to+\infty} \le e^{\Phi(0)};$$

ii) *se* $\Phi(0) = 0$, *allora per* $t \to +\infty$ *si ha che*

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \le \exp\left(C\exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)\right)(1+\varepsilon(t))$$

con $\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = 0$,

$$C = 2e^M\int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx, \quad M = \int_0^1\left(\frac{\Phi'(x)}{\Phi'(0)} - 1\right)\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(0)}\frac{dx}{x}.$$

DIM. Siccome si ha che

$$2t_\lambda = \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du + \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du,$$

dal teorema di convergenza dominata segue che

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du = \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{u}du.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du &= \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du + \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du \\ &= \int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du \\ &\quad +\Phi'(0)\left(\log\frac{1}{\lambda} + 2\log(1+\sqrt{1-\lambda})\right);\end{aligned}$$

dato che,

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{\sqrt{u(u-\lambda)}}du = \int_0^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{u}du,$$

applicando il teorema di convergenza dominata ancora una volta se ne deduce che

$$2t_\lambda = -\Phi'(0)\log\lambda + C_1 + \varepsilon(\lambda),$$

dove

$$C_1 = \int_0^1 \frac{\Phi'(u)-\Phi'(0)}{u}du + \int_1^\infty \frac{\Phi'(u)}{u}du + 2(\log 2)\Phi'(0)$$

ed $\varepsilon(\lambda) \to 0$, per $\lambda \to 0$. Quindi, ricavando λ, si ottiene

$$\lambda = 4e^M \exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)(1+\varepsilon(t))$$

con $\varepsilon(t) \to 0$ per $t \to \infty$. Per convergenza monotona, si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} 2m_\lambda &= \Psi(0)\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}} \\ &= \Psi(0)\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2\Psi(0) = 2\Phi(0),\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabili $u = 1/x$. Abbiamo quindi dimostrato il punto i). Per dimostrare ii), facciamo uno sviluppo di Taylor per Φ in un intorno di $x = 0$ per dimostrare che $\Psi(x)/x^2$ è limitato, usando il fatto che $\Phi(0) = 0$. Quindi, con il teorema della convergenza dominata, si vede che

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{2\lambda}^\infty \frac{\Psi(u)}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}} = \int_0^\infty \frac{\Psi(u)}{u^2}du.$$

Inoltre, dalla limitatezza di $\Psi(u)/u^2$ segue che

$$\left|\int_\lambda^{2\lambda} \frac{\Psi(u)}{u^2}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}}\right| \le C\int_\lambda^{2\lambda}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda/u}} = C\lambda\int_1^2\sqrt{\frac{v}{v-1}}dv \to 0$$

per $\lambda \to 0$. Quindi

$$2m_\lambda = \lambda\left(\int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx + \varepsilon(\lambda)\right).$$

Basta quindi inserire l'espressione di λ trovata per ottenere che

$$m_\lambda \le 2e^M \exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)(1+\varepsilon(\lambda))\int_0^\infty \frac{\Psi(x)}{x^2}dx$$

per $\lambda \to 0$. Da cui segue, usando il Teorema 4.2, che

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \le \exp\left(C\exp\left(-\frac{2t}{\Phi'(0)}\right)\right)(1+\varepsilon(t))$$

per $t \to \infty$. □

Il seguente Corollario segue ancora da uno sviluppo di Taylor di m_λ intorno a $\lambda = 0$.

Corollario 4.4. *Sotto le medesime ipotesi del Teorema 4.2 e con in aggiunta la condizione*

$$\Phi'(x) = \frac{N}{2x}$$

per $|x|$ grande, segue che esiste $C > 0$ tale che per $t \to 0$

$$\|T(t)\|_{1\to+\infty} \le Ct^{-N/2}. \tag{4.5}$$

4.2. Il teorema di Varopoulos

Dalla sezione precedente possiamo facilmente dedurre dalla disuguaglianza di Sobolev classica (4.3) una stima della norma del semigruppo come in (4.5). Vediamo in che modo. Abbiamo osservato che la disuguaglianza classica di Sobolev implica quella debole (4.2) che è la disuguaglianza $(S\Phi)$ per la particolare scelta

$$\Phi(x) = \frac{N}{2}\log(C_1 + C_2 x),$$

inoltre la funzione Φ così definita soddisfa le ipotesi del Corollario 4.4, pertanto otteniamo la stima (4.5) per la norma del semigruppo. Ora siamo interessati ad ottenere la disuguaglianza di Sobolev classica a partire dalla stima della norma operatoriale da L^1 in L^∞ del semigruppo. Proveremo il seguente risultato dovuto a Varopoulos ([**34**]).

Teorema 4.5. *Siano $N > 2$, $T(t) = e^{-tA}$ un semigruppo di Markov, simmetrico e analitico in L^2. Supponiamo che valga*

$$\|T(t)f\|_\infty \le c_1 t^{-\frac{N}{2}}\|f\|_1 \tag{4.1}$$

per ogni $f \in L^1$, per ogni $t > 0$ e per qualche c_1 costante positiva. Allora esiste $c_2 > 0$ tale che

$$\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \le c_2(\|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f,f))$$

per ogni $f \in D(A)$.

Per provare questo teorema faremo ricorso ad alcuni risultati classici di interpolazione quali il teorema di Riesz Thorin e il teorema di Marcinkiewicz (Appendice C). Esprimeremo inoltre l'operatore $A^{\frac{1}{2}}$ mediante una formula integrale di rappresentazione delle potenze frazionarie di un operatore settoriale A in termini del semigruppo generato $(T(t))$ (Appendice A). Nella dimostrazione otterremo una stima piú raffinata di quella richiesta. Proveremo infatti che

$$\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \leq C\ \mathcal{E}(f,f). \tag{4.2}$$

Dim. Poniamo $B = A^{-\frac{1}{2}}$. Risulta

$$B = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt.$$

Osserviamo che dalla simmetria di $T(t)$ segue che anche B è simmetrico. Per questo motivo, se proviamo che B è continuo come operatore da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ abbiamo la tesi. Infatti, dalla disuguaglianza

$$\|Bf\|^2_{\frac{2N}{N-2}} \leq C\|f\|_2^2$$

segue

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\frac{2N}{N-2}} &\leq C\|A^{\frac{1}{2}}f\|_2^2\\ &= C\int_{\mathbb{R}^N} A^{\frac{1}{2}}fA^{\frac{1}{2}}f = C\int_{\mathbb{R}^N} fAf = C\mathcal{E}(f,f),\end{aligned}$$

cioè (4.2).

Decomponiamo l'operatore B nella somma di B_1 e B_2 dove

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt,$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}T(t)dt.$$

Il valore di T sarà scelto opportunamente in seguito.

Applichiamo il teorema d'interpolazione di Riesz-Thorin per provare la seguente disuguaglianza

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq Ct^{-\frac{N}{2q}}\|f\|_q \tag{4.3}$$

per ogni $f \in L^q$, $1 < q < \infty$, $t > 0$ e per qualche C costante positiva. Per la contrattività del semigruppo da L^∞ in L^∞, risulta

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty;$$

per ipotesi

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \leq c_1t^{-\frac{N}{2}}\|f\|_1.$$

Per il Teorema C.1, dalle due precedenti disuguaglianze otteniamo

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \le c\, t^{-\frac{N}{2}\vartheta}\|f\|_{\frac{1}{\vartheta}}$$

per ogni $0<\vartheta<1$ o, equivalentemente, posto $q=\frac{1}{\vartheta}$,

$$\|e^{-tA}f\|_\infty \le c\, t^{-\frac{N}{2q}}\|f\|_q$$

per ogni $1<q<\infty$. Servendoci della disuguaglianza appena provata, stimiamo B_1. Abbiamo così

$$\|B_1 f\|_\infty \le \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}}\|f\|_q dt = C\|f\|_q T^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}} \tag{4.4}$$

per ogni $1<q<N$. Sia $r>1$ tale che $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{N}$. Proviamo che l'operatore $A^{-\frac{1}{2}}$ è di tipo debole (q,r) per ogni $1<q<N$. Sia $\lambda>0$ e scegliamo T come estremo d'integrazione in B_1 e B_2 in modo che

$$\frac{\lambda}{2} = C\|f\|_q T^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}}.$$

Per (4.4), $\|B_1 f\|_\infty \le \frac{\lambda}{2}$.
Risulta

$$\{x : |A^{-\frac{1}{2}}f(x)| \ge \lambda\} \subset \left\{x : |B_1 f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\right\} \bigcup \left\{x : |B_2 f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Osserviamo che, essendo $\|B_1 f\|_\infty \le \frac{\lambda}{2}$, l'insieme $\{x : |B_1 f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\}$ ha misura nulla, pertanto

$$\begin{aligned}
\mu\left\{x : |A^{-\frac{1}{2}}f(x)| \ge \lambda\right\} &\le \mu\left\{x : |B_2 f(x)| \ge \frac{\lambda}{2}\right\} \\
&\le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\|B_2 f\|_q^q \\
&\le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}\|e^{-At}f\|_q dt\right)^q \\
&\le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^T t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_q dt\right)^q \\
&= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\|f\|_q T^{\frac{1}{2}}\right)^q \\
&\le C_q\lambda^{-q}\left(\frac{\lambda}{\|f\|_q}\right)^{\frac{q}{1-\frac{N}{q}}}\|f\|_q^q = C\lambda^{-r}\|f\|_q^r.
\end{aligned}$$

Abbiamo appena provato che $A^{-\frac{1}{2}}$ è di tipo debole (q,r) per ogni $1<q<N$ ed r definito come sopra. In particolare, è possibile scegliere $1<q_1,q_2<N$

(e di conseguenza saranno determinati r_1, r_2) in modo che

$$\frac{1}{2} = \frac{\vartheta}{q_1} + \frac{(1-\vartheta)}{q_2}$$

e

$$\frac{N}{2} - \frac{1}{N} = \frac{\vartheta}{r_1} + \frac{1-\vartheta}{r_2}$$

per qualche $0 < \vartheta < 1$. A questo punto, usando il Teorema C.3, possiamo concludere che $A^{-\frac{1}{2}}$ è continuo da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ e, per l'osservazione iniziale, da qui segue immediatamente la tesi. $\square$

Motiviamo brevemente l'uso del teorema di Marcinkiewicz nella dimostrazione del teorema di Varopoulos. In un primo momento, si potrebbe tentare di provare la continuità di $(I + A)^{-\frac{1}{2}}$ come operatore da L^2 in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, da cui seguirebbe la disuguaglianza di Sobolev classica. A tal fine potremmo procedere come nella dimostrazione appena vista, ossia rappresentando $(I + A)^{-\frac{1}{2}}$ mediante la formula per potenze frazionarie di operatori settoriali usata in precedenza e spezzare l'integrale in B_1 e B_2 scegliendo come estremo d'integrazione $T = 1$. Usando il teorema di Riesz-Thorin riusciremmo a provare la continuità di B_1, mentre riusciremmo a provare la continuità di B_2 da L^2 in L^p per ogni $p < \frac{2N}{N-2}$. Otterremmo l'esponente di nostro interesse come caso limite. Da qui la necessità di ricorrere ad un altro risultato d'interpolazione quale il teorema di Marcinkiewicz.