

CAPITOLO 2

Geometria differenziale delle curve di \mathbb{R}^3

Scopo di questo capitolo è dare un'introduzione allo studio della geometria differenziale delle curve di \mathbb{R}^3 . Un ruolo fondamentale per tale studio è svolto dall'apparato di Frenet. Un'attenzione particolare è rivolta poi a due speciali classi di curve di \mathbb{R}^3 : eliche cilindriche e curve magnetiche.

2.1. Apparato di Frenet

In questa sezione introduciamo il riferimento di Frenet $(T(s), N(s), B(s))$ che è di fondamentale importanza per avere informazioni sulla geometria di una curva regolare di \mathbb{R}^3 . Il punto chiave per ottenere queste informazioni è esprimere i derivati $T'(s), N'(s), B'(s)$ in termini dello stesso riferimento di Frenet.

2. 1-1. La curvatura. Sia $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata a velocità unitaria (s ascissa curvilinea). Quindi, il *campo tangente* lungo γ , che indichiamo con $T(s)$, è unitario:

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1.$$

Definizione 2.1. *La funzione*

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) := \|T'(s)\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \geq 0,$$

si chiama curvatura della curva $\gamma(s)$.

Osserviamo subito che:

- *la curvatura $\kappa(s)$ stima di quanto la curva si allontana dall'essere una (parte di) retta.* Infatti,

$$\kappa(s) = 0 \quad \forall s \iff \ddot{\gamma}(s) = 0 \quad \forall s \iff \gamma(s) = p + sv;$$

- *la curvatura è invariante per isometrie* (cf. Teorema 2.59).

Supponiamo ora che $\gamma(s)$ abbia curvatura $\kappa(s) > 0$ per ogni $s \in I$ (d'altronde, se $\kappa(s)$ non è identicamente nulla, esiste s_0 tale che $\kappa(s_0) \neq 0$ e quindi $\kappa(s) \neq 0$ per ogni s in un intorno aperto di s_0). Quindi $T'(s) \neq 0$. Inoltre, siccome $\|T(s)\| = 1$, allora $T'(s) \perp T(s)$ e il campo vettoriale

$$N(s) = \frac{1}{\|T'(s)\|} T'(s),$$

detto *campo normale principale lungo γ* , è un campo vettoriale unitario ortogonale a $T(s)$. Il campo vettoriale lungo $\gamma(s)$ definito da

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

è detto *campo binormale* lungo γ . Tale definizione implica che $B(s)$ è un campo vettoriale unitario ortogonale a $T(s)$ e $N(s)$.

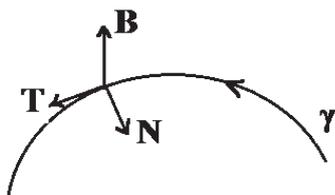


FIGURA 1. Riferimento di Frenet lungo γ .

Pertanto,

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

è una base ortonormale lungo $\gamma(s)$, quindi un riferimento mobile lungo γ , detto *riferimento di Frenet* (o *triedro di Frenet*) della curva $\gamma(s)$. Si noti che la base ordinata $(T(s), N(s), B(s))$ è una base positiva per come costruita:

$$T(s) \wedge N(s) \cdot B(s) = B(s) \cdot B(s) = 1 > 0.$$

Una curva regolare $\gamma(s)$ parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$, la diremo **curva di Frenet**.

Osservazione 2.2. Si può dimostrare che il verso di N (al contrario di quello di T e di B) non dipende dall'orientazione di γ ma solo dalla sua forma. N è sempre diretto dalla parte della concavità della curva. Ad esempio, ci possiamo rendere conto di ciò mediante considerazione grafica del vettore rapporto incrementale

$$\frac{T(s+h) - T(s)}{h},$$

sia per $h > 0$ che per $h < 0$, rapporto di cui $T'(s)$ è il limite per $h \rightarrow 0$.



FIGURA 2. Il verso del campo normale.

Un altro significato geometrico della curvatura è dato dal seguente esercizio.

Esercizio 2.3. Sia $\Delta\vartheta$ l'angolo tra i versori tangenti a γ nei punti $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_0 + \Delta s)$. Si verifichi che la curvatura di γ nel punto $\gamma(s_0)$ è data da

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Suggerimento: Posto $T = \dot{\gamma}(s_0)$ e $T_1 = \dot{\gamma}(s_0 + \Delta s)$, osservare che

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|T_1 - T\|}{|\Delta s|} \quad \text{e} \quad \|T_1 - T\| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}.$$

2. 1-2. Piano osculatore e cerchio osculatore. Per una curva piana esiste un piano che la contiene. Tuttavia, per una curva sghemba, si può definire un piano che più si “avvicina” alla curva in un intorno di un fissato punto.

Definizione 2.4. Sia $\gamma(t)$ un arco di curva regolare e sia $p_0 = \gamma(t_0)$ un fissato punto. Siano r la tangente in p_0 alla curva γ , $p_1 = \gamma(p_0 + \Delta t)$ un punto di γ “vicino” a p_0 , e π_1 il piano contenente r e p_1 . Il piano osculatore alla curva γ nel punto p_0 è la posizione limite (quando esiste) del piano π_1 per $p_1 \rightarrow p_0$ lungo γ (cioè per $\Delta t \rightarrow 0$).

Si noti che se $\gamma(t)$ è una retta, π_1 è indeterminato e quindi il piano osculatore è indeterminato. Se $\gamma(t)$ è una curva piana (che non sia una (parte di) retta), il piano osculatore è chiaramente il piano della curva.

Proposizione 2.5. Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ un arco di curva regolare con vettori velocità e accelerazione $\dot{\gamma}(t_0)$ e $\ddot{\gamma}(t_0)$ linearmente indipendenti. Allora, il piano osculatore nel punto $p_0 = \gamma(t_0)$ esiste ed è il piano per p_0 e parallelo ai vettori $\dot{\gamma}(t_0)$ e $\ddot{\gamma}(t_0)$, quindi è il piano di equazione cartesiana

$$(2.1) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare, se $\gamma(s)$ è una curva di Frenet, il piano osculatore alla curva nel punto $\gamma(s)$ esiste ed è il piano per tale punto $\gamma(s)$ e parallelo ai vettori $T(s)$ e $N(s)$.

DIMOSTRAZIONE. Il piano π_1 ha equazione cartesiana

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) & y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) & z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Applicando la formula di Taylor alle funzioni $x(t_0 + \Delta t)$, $y(t_0 + \Delta t)$ e $z(t_0 + \Delta t)$, si ha

$$(2.3) \quad x(t) = x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \frac{x''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\varepsilon_1(t)}{2!}(\Delta t)^2,$$

dove $\varepsilon_1(t)$ è un infinitesimo per $\Delta t \rightarrow 0$. Analogamente per $y(t_0 + \Delta t)$ e $z(t_0 + \Delta t)$. Sostituendo la (2.3) nella (2.2), dividendo la terza riga per $((\Delta t)^2/2)$ e applicando qualche proprietà del determinante, si ha

$$(2.4) \quad \pi_1 : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) + \varepsilon_1(t) & y''(t_0) + \varepsilon_2(t) & z''(t_0) + \varepsilon_3(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Pertanto, per $\Delta t \rightarrow 0$, dall'equazione (2.4) si ottiene l'equazione (2.1). \square

Si noti che la condizione “ $\dot{\gamma}(t_0)$ e $\ddot{\gamma}(t_0)$ linearmente indipendenti” significa che la curva ha curvatura non nulla in $\gamma(t_0)$ (cf. Proposizione 2.21).

Osservazione 2.6. Tornando al riferimento di Frenet $(T(s), N(s), B(s))$ lungo la curva $\gamma(s)$, i tre versori costituiscono il triedro principale (o di Frenet) nel punto $\gamma(s)$, mentre le rette per tale punto individuate dai tre versori sono rispettivamente la retta tangente, la retta normale principale e la retta binormale nel punto $\gamma(s)$. Le facce del triedro sono:

- il piano *osculatore* in $\gamma(s)$, piano per $\gamma(s)$ e parallelo ai vettori $T(s), N(s)$;
- il piano *normale* in $\gamma(s)$, piano per $\gamma(s)$ e parallelo ai vettori $N(s), B(s)$;
- il piano *rettificante* in $\gamma(s)$, piano per $\gamma(s)$ e parallelo ai vettori $T(s), B(s)$.

Definizione 2.7. Sia $\gamma(s)$ un arco di curva regolare a velocità unitaria e sia σ_1 la circonferenza tangente a γ in $p_0 = \gamma(s_0)$ e passante per $p_1 = \gamma(s_0 + \Delta s)$. Il cerchio osculatore a γ nel punto $p_0 = \gamma(s_0)$ è la circonferenza σ_0 posizione limite (se esiste) della circonferenza σ_1 per $p_1 \rightarrow p_0$ lungo γ (cioè per $\Delta s \rightarrow 0$).

Se $\dot{\gamma}(s_0)$ e $\ddot{\gamma}(s_0)$ sono linearmente indipendenti (quindi $\kappa(s_0) > 0$), la circonferenza σ_0 esiste ed è contenuta nel piano osculatore a γ in $p_0 = \gamma(s_0)$. Si può dimostrare che il centro C_0 di σ_0 , detto *centro di curvatura* di γ in $p_0 = \gamma(s_0)$, è dato da

$$C_0 = C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0).$$

$C_0 = C(s_0)$ appartiene alla retta normale a γ nel punto $\gamma(s_0)$. Inoltre, il raggio R_0 di σ_0 è dato da

$$R_0 = R(s_0) = d(\gamma(s_0), C_0) = \|\gamma(s_0) - C_0\| = \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

R_0 è detto *raggio di curvatura* di γ in $p_0 = \gamma(s_0)$. Quindi, σ_0 si ottiene come intersezione del piano osculatore con la sfera di centro C_0 e raggio R_0 . Si noti che il cerchio osculatore σ_0 è la circonferenza che meglio approssima γ in un intorno di p_0 .

Esempio 2.8. Sia γ una circonferenza di centro C e raggio R . Facciamo vedere che tale circonferenza ha curvatura costante $\frac{1}{R}$, centro di curvatura C e raggio di curvatura R . Siccome la curvatura è invariante per isometrie, possiamo assumere che γ sia contenuta nel piano $\mathbb{R}^2(x, y)$, per cui γ si può parametrizzare con

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (x_0 + R \cos(s/R), y_0 + R \sin(s/R), 0).$$

Pertanto $T(s) = \dot{\gamma}(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R), 0)$, e il suo derivato

$$T'(s) = \ddot{\gamma}(s) = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R), 0).$$

Quindi $\kappa(s) = \|T'(s)\| = 1/R$. Il raggio di curvatura R_0 di γ in un generico punto è $R_0 = 1/\kappa(s) = R$, e il centro di curvatura C_0 è

$$\begin{aligned} C_0 &= \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) = \gamma(s) - R(\cos(s/R), \sin(s/R), 0) \\ &= (x_0, y_0, 0) = C. \end{aligned}$$

Esercizio 2.9. Sia γ una circonferenza di centro C e raggio R_0 dello spazio. Costruire una isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $\tilde{\gamma} = F(\gamma)$ sia la circonferenza di centro l'origine O e raggio R_0 del piano $\mathbb{R}^2(x, y)$.

Suggerimento: sia (v_{1p}, v_{2p}) una base ortonormale di vettori applicati in $p = C$ del piano che contiene γ , e sia v_{3p} un vettore unitario tale che (v_1, v_2, v_3) sia una base ortonormale dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^3$. Quindi, si consideri l'isometria F definita da $F(p) = O$ e $F_*v_{ip} = e_{ip}$, $i = 1, 2, 3$ (cf. Proposizione 1.61).

2. 1-3. La torsione. Abbiamo visto come la curvatura di una curva stimi di quanto la stessa curva si allontani dall'essere una (parte di) retta. Vogliamo ora introdurre un invariante che stimi di quanto la curva si allontani dall'essere piana. Siano $\gamma(s)$ una curva di Frenet e $(T(s), N(s), B(s))$ il corrispondente riferimento di Frenet. Intanto, osserviamo che se $\gamma(s)$ è piana, il piano osculatore è il piano della curva in ogni punto della stessa curva, per cui $B(s)$ è costante lungo la curva, ovvero $B'(s) = 0$. In generale, il derivato $B'(s)$ è parallelo a $N(s)$, cioè è conseguenza di $B'(s) \cdot B(s) = 0$ e $B'(s) \cdot T(s) = 0$. La condizione $B'(s) \cdot B(s) = 0$ si ottiene in quanto $B(s)$ è unitario. Per l'altra condizione, basta osservare che $B(s) \cdot T(s) = 0$ implica

$$B'(s) \cdot T(s) = -B(s) \cdot T'(s) = -B(s) \cdot (\kappa(s)N(s)) = 0.$$

Quindi, possiamo dare la seguente

Definizione 2.10. La funzione torsione di una curva di Frenet $\gamma(s)$ è la funzione

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \tau(s), \quad \text{tale che } B'(s) = -\tau(s)N(s),$$

equivalentemente

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = B(s) \cdot N'(s).$$

In particolare $\|B'(s)\| = |\tau(s)|$. La torsione $\tau(s)$, a differenza della curvatura $\kappa(s)$, può essere nulla, maggiore o minore di 0.

Mostriamo ora come effettivamente la torsione rappresenti una stima di quanto una curva si allontani dall'essere piana.

Teorema 2.11. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet. Allora,

$$\tau(s) = 0 \iff \gamma(s) \text{ è una curva piana.}$$

DIMOSTRAZIONE. “ \Leftarrow ” Abbiamo già osservato che per una curva piana il derivato $B'(s) = 0$ e quindi $\tau(s) = 0$. Un modo più dettagliato di procedere è il seguente. Per ipotesi $\gamma(s)$ è piana, quindi esiste un piano π che la contiene. Pertanto, esiste un punto $p \in \pi$ ed esiste un vettore $v_p \in T_p \mathbb{R}^3$ tali che

$$(\gamma(s) - p)_p \cdot v_p = 0 \quad \text{per ogni } s,$$

e quindi si può scrivere $(\gamma(s) - p)_{\gamma(s)} \cdot v_{\gamma(s)} = 0$. Derivando si ottiene

$$\dot{\gamma}(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0,$$

e quindi $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ è contenuto nel piano π . Derivando ulteriormente, si ottiene

$$T'(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0, \quad \text{da cui } N(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0,$$

e quindi anche $N(s)$ è contenuto nel piano π . Siccome $T(s)$ ed $N(s)$ sono entrambi contenuti nel piano π , il versore $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ risulterà parallelo al vettore v_p per ogni s , e quindi $B'(s) = 0$. Di conseguenza

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = 0.$$

“ \Rightarrow ” Supponiamo $\tau(s) = 0$ per ogni s . Dalla definizione di torsione segue che

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) = 0,$$

cioè $B(s)$ è parallelo lungo $\gamma(s)$, e quindi $B(s) = (b_1, b_2, b_3)_{\gamma(s)} = b_{\gamma(s)}$, con $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Proviamo ora che $\gamma(s)$ è contenuta nel piano π passante per $\gamma(0)$ e ortogonale al vettore b , cioè

$$(\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = 0 \quad \text{per ogni } s.$$

Consideriamo quindi la funzione

$$f(s) := (\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = (\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(s)} \cdot b_{\gamma(s)}.$$

Derivando si ha

$$f'(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot b_{\gamma(s)} = T(s) \cdot B(s) = 0,$$

e quindi $f(s) = \text{cost} = f(0) = 0$. Pertanto, $(\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = 0$ per ogni s . \square

In seguito vedremo che l'elica circolare è un esempio di curva con curvatura e torsione costanti non nulle.

Un altro significato geometrico della torsione è dato nel seguente esercizio.

Esercizio 2.12. Sia $\Delta\vartheta$ l'angolo tra i versori binormali a γ nei punti $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_0 + \Delta s)$. Si verifichi che la torsione di γ nel punto $\gamma(s_0)$ è data (in valore assoluto) da

$$|\tau(s_0)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Suggerimento: si proceda come nel caso della curvatura (cf. Esercizio 2.3).

2. 1-4. Formule di Frenet. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet. L'insieme

$$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva $\gamma(s)$. Le *formule di Frenet* (in alcuni testi chiamate anche *formule di Frenet-Serret*) esprimono i derivati $T'(s), N'(s), B'(s)$ in termini di $T(s), N(s), B(s)$. Più precisamente abbiamo:

$$\begin{cases} T'(s) &= & \kappa(s) N(s), \\ N'(s) &= & -\kappa(s) T(s) & +\tau(s) B(s), \\ B'(s) &= & -\tau(s) N(s), \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima e la terza formula di Frenet seguono banalmente dalle definizioni di curvatura e torsione. Proviamo la seconda. Siccome $\{T(s), N(s), B(s)\}$ è una base ortonormale lungo γ , allora

$$N'(s) = (N'(s) \cdot T(s)) T(s) + (N'(s) \cdot N(s)) N(s) + (N'(s) \cdot B(s)) B(s).$$

Da $\|N(s)\|^2 = 1$ segue che $N'(s) \cdot N(s) = 0$. Inoltre, $N(s) \cdot T(s) = 0$ implica

$$N'(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot T'(s) = 0, \text{ dove } T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Ne segue che $N'(s) \cdot T(s) = -\kappa(s)$. Infine, $N(s) \cdot B(s) = 0$ implica

$$N'(s) \cdot B(s) = -N(s) \cdot B'(s) = \tau(s).$$

□

Mostriamo ora, usando le formule di Frenet, alcuni risultati sulle curve.

Teorema 2.13. *Sia $\gamma(s)$ una curva regolare a velocità unitaria. Allora, $\kappa(s) = \text{cost} > 0$ e $\tau(s) = 0$ se e solo se $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio $1/\kappa$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\kappa(s) = \text{cost} > 0$ e $\tau(s) = 0$. Per il Teorema 2.11 si ha che $\gamma(s)$ è piana. Per provare che $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio $1/\kappa$, basta provare che esiste un punto p_0 tale che

$$\|\gamma(s) - p_0\| = 1/\kappa \quad \text{per ogni } s.$$

Consideriamo la curva $\alpha(s)$ (luogo dei centri di curvatura di γ):

$$\alpha(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s).$$

Derivando e applicando la seconda formula di Frenet, si ottiene

$$\dot{\alpha}(s) = \dot{\gamma}(s) + \frac{1}{\kappa}N'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s)) = 0.$$

Dunque $\alpha(s)$ è una curva costante, e quindi esiste un punto p_0 tale che $\alpha(s) = p_0$ per ogni s , ossia

$$\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) = p_0.$$

Pertanto

$$\|\gamma(s) - p_0\| = \|(1/\kappa)N(s)\| = 1/k.$$

Il viceversa segue dall'Esempio 2.8 e dal Teorema 2.11. \square

Corollario 2.14. *Una curva piana regolare $\gamma(s)$, $s \in I$, con curvatura costante è necessariamente una (parte di) retta oppure una (parte di) circonferenza.*

Il seguente teorema stima la curvatura di curve sulla sfera.

Teorema 2.15. *Sia \mathbb{S}^2 una sfera di centro C e raggio R . Tra tutti gli archi di curve regolari $\gamma(s)$ della sfera \mathbb{S}^2 quelli di curvatura minima sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio massimo. In altre parole, per ogni arco di curva regolare $\gamma(s)$ di tale sfera:*

$$\kappa(s) \geq 1/R,$$

dove l'uguale vale se e solo se $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio R .

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi $\gamma(s) \in \mathbb{S}^2$ per ogni s , quindi

$$(C - \gamma(s)) \cdot (C - \gamma(s)) = R^2.$$

Derivando, si ottiene

$$\dot{\gamma}(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 0,$$

cioè $T(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 0$. Derivando ulteriormente, risulta

$$T'(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} + T(s) \cdot (-\dot{\gamma}(s)) = 0,$$

da cui $T'(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 1$. Applicando la prima formula di Frenet, si ha

$$\kappa(s) N(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 1$$

e quindi applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$(2.5) \quad \kappa(s) = \frac{1}{N(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)}} \geq \frac{1}{\|N(s)\| \cdot \|C - \gamma(s)\|} = \frac{1}{R}.$$

Proviamo ora la seconda parte del teorema. Se $\gamma(s)$ è un arco di circonferenza di raggio R , per quanto visto in precedenza, si ha $\kappa = 1/R$. Viceversa, assumiamo che per ipotesi $\kappa_{\gamma}(s) = 1/R$ e proviamo che $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio R . Se $\kappa(s) = 1/R$, allora nell'equazione (2.5) vale l'uguaglianza, e quindi $(C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = \lambda(s)N(s)$ per qualche funzione $\lambda(s)$. Ne segue che

$$|\lambda(s)| \|N(s)\| = \|C - \gamma(s)\| = R,$$

cioè $\lambda(s) = \text{cost} = \pm R$. Inoltre, derivando $(C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = \lambda N(s)$, si ottiene $-\dot{\gamma}(s) = \lambda N'(s)$ e quindi, applicando la seconda formula di Frenet, risulta

$$-T(s) = \lambda(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s))$$

da cui otteniamo $\tau(s) = 0$. Dunque, $\gamma(s)$ è una curva piana. Essendo $\gamma(s)$ una curva piana con curvatura costante $\kappa = 1/R$, applicando il Teorema 2.13, possiamo concludere che γ è una (parte di) circonferenza di raggio R . \square

Lemma 2.16. *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet con torsione non nulla. Se $\gamma(s)$ è contenuta in una sfera di centro C e raggio R , allora*

$$\gamma(s) - C = -(1/\kappa(s))N(s) - (1/\kappa(s))'(1/\tau(s))B(s).$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla dimostrazione del Teorema 2.15 segue che

$$T(s) \cdot (\gamma(s) - C) = 0, \quad \text{e quindi} \quad (\gamma(s) - C) = a(s)N(s) + b(s)B(s).$$

Sempre dalla dimostrazione del Teorema 2.15, si ha $\kappa(s)N(s) \cdot (C - \gamma(s)) = 1$, e quindi $a(s) = -(1/\kappa(s))$. Infine, derivando

$$N(s) \cdot (\gamma(s) - C) = -(1/\kappa(s)),$$

e applicando la seconda formula di Frenet, si ha

$$N(s) \cdot T(s) + (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot (\gamma(s) - C) = -(1/\kappa(s))',$$

e da questa segue che $b(s) = (\gamma(s) - C) \cdot B(s) = -(1/\tau(s))(1/\kappa(s))'$. \square

Proposizione 2.17. *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet contenuta in una sfera di centro C e raggio R . Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a) $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza;
- b) γ ha curvatura costante;
- c) γ ha torsione nulla.

DIMOSTRAZIONE. a) implica b) è banale. Se $\gamma(s)$ ha curvatura costante, allora la torsione è necessariamente nulla. Infatti, se la torsione non fosse

identicamente nulla, allora esisterebbe s_0 tale che $\tau(s_0) \neq 0$ e quindi $\tau(s) \neq 0$ in un intorno di s_0 . Applicando il Lemma 2.16, siccome κ è costante, si avrebbe

$$\gamma(s) = C - (1/\kappa)N(s) \quad \text{da cui}$$

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = -(1/\kappa)N'(s) = -(1/\kappa)(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s)),$$

e quindi si avrebbe la contraddizione $\tau(s) = 0$. Infine, se $\gamma(s)$ ha torsione nulla, allora γ è una curva piana e quindi (in quanto curva di una sfera) è una (parte di) circonferenza. \square

Proposizione 2.18. (*forma canonica locale*) Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet. Allora, per s sufficientemente piccolo, $\gamma(s)$ si può approssimare con la curva

$$\gamma_0(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right),$$

dove $\kappa_0 = \kappa(0)$, $\kappa_0' = \kappa'(0)$ e $\tau_0 = \tau(0)$.

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula di Taylor, abbiamo

$$(2.6) \quad \gamma(s) = \gamma(0) + s\dot{\gamma}(0) + s^2\frac{1}{2}\ddot{\gamma}(0) + s^3\frac{1}{6}\dddot{\gamma}(0) + R(s),$$

dove $\lim_{s \rightarrow 0} R(s)/s^3 = 0$. Usando il riferimento e le formule di Frenet, si ha

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \ddot{\gamma}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(s) &= (\kappa(s)N(s))' = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \\ &= -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2.6), abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(0) + sT(0) + \frac{s^2}{2}(\kappa(0)N(0)) \\ &\quad + \frac{s^3}{6}(-\kappa^2(0)T(0) + \kappa'(0)N(0) + \kappa(0)\tau(0)B(0)) + R(s) \\ &= \gamma(0) + \left(s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3 \right) T(0) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 \right) N(0) + \left(\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 \right) B(0) + R(s). \end{aligned}$$

Infine, considerando un riferimento cartesiano avente l'origine coincidente con $\gamma(0)$, $e_1 = T(0)$, $e_2 = N(0)$ e $e_3 = B(0)$, otteniamo la forma canonica enunciata. \square

Osservazione 2.19. Dalla Proposizione precedente segue che le proiezioni di $\gamma(s)$ sui piani del triedro di Frenet in $\gamma(0)$, localmente sono approssimate dalle curve:

- $\gamma_1(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 \right) = \left(s, \frac{\kappa_0}{2}s^2 \right) + (-\kappa_0^2, \kappa_0') \frac{s^3}{6}$ (proiezione di $\gamma(s)$ sul piano osculatore in $\gamma(0)$, piano determinato da T_0 e N_0);
- $\gamma_2(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right)$ (proiezione di $\gamma(s)$ sul piano rettificante in $\gamma(0)$, piano determinato da T_0 e B_0);
- $\gamma_3(s) = \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right)$ (proiezione di $\gamma(s)$ sul piano normale in $\gamma(0)$, piano determinato da N_0 e B_0).

2.2. Apparato di Frenet per curve a velocità arbitraria

Sia $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata a velocità arbitraria. Sia $s = s(t)$ la funzione ascissa curvilinea di γ e sia $t = t(s)$ la sua funzione inversa. Spesso si usa scrivere $\gamma(s)$ per indicare la curva $\gamma(t(s))$, tuttavia adesso poniamo

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = (\gamma \circ t)(s), \quad \text{e quindi} \quad \gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t)) = (\bar{\gamma} \circ s)(t).$$

La curva $\bar{\gamma}(s)$ è parametrizzata a velocità unitaria. Assumiamo che $\bar{\gamma}(s)$ sia di Frenet, ossia che $\bar{\kappa}(s) > 0$ per ogni s , dove $\bar{\kappa}$ è la curvatura di $\bar{\gamma}(s)$. Consideriamo quindi l'apparato di Frenet $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s), \bar{\kappa}(s), \bar{\tau}(s)\}$ associato a $\bar{\gamma}$. Allora

$$T(t) = \bar{T}(s(t)) = (\bar{T} \circ s)(t) \text{ è il campo tangente unitario di } \gamma(t),$$

$$N(t) = \bar{N}(s(t)) = (\bar{N} \circ s)(t) \text{ è il campo normale unitario di } \gamma(t),$$

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = (\bar{B} \circ s)(t) \text{ è il campo binormale unitario di } \gamma(t).$$

Si noti che

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = (\bar{T} \wedge \bar{N})(s(t)) = T(t) \wedge N(t).$$

$\{T(t), N(t), B(t)\}$ è un riferimento ortonormale lungo $\gamma(t)$. Inoltre, curvatura e torsione di $\gamma(t)$ sono date da

$$\kappa(t) = \bar{\kappa}(s(t)) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \bar{\tau}(s(t)).$$

Di conseguenza,

$$\{T(t), N(t), B(t), \kappa(t), \tau(t)\} \text{ è l'apparato di Frenet di } \gamma(t).$$

Le corrispondenti formule di Frenet per $\gamma(t)$ sono

$$\begin{cases} T'(t) &= & \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) N(t) \\ N'(t) &= & -\|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) T(t) & + \|\dot{\gamma}(t)\| \tau(t) B(t) \\ B'(t) &= & -\|\dot{\gamma}(t)\| \tau(t) N(t). \end{cases}$$

Per dimostrare tali formule, osserviamo che da $T(t) = \bar{T}(s(t))$, derivando si ottiene $T'(t) = s'(t) \bar{T}'(s(t))$, dove $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Pertanto,

$$T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{T}'(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{\kappa}(s(t)) \bar{N}(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) N(t).$$

Analogamente si procede per le altre due formule. Se $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, ritroviamo le formule di Frenet per curve parametrizzate a velocità unitaria.

Lemma 2.20. *Sia $\gamma(t)$ una curva regolare parametrizzata a velocità arbitraria e con $\kappa(t) > 0$. Allora*

$$(1) \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| T(t)$$

$$(2) \ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa(t) N(t).$$

DIMOSTRAZIONE. Derivando $\gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t))$ si ottiene

$$\dot{\gamma}(t) = s'(t) \dot{\bar{\gamma}}(s) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{T}(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| T(t).$$

Derivando quest'ultima, e applicando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\| T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa(t) N(t).$$

□

Notiamo che, mentre per una curva a velocità unitaria il vettore $\ddot{\gamma}(s)$ è parallelo al versore normale $N(s)$, nel caso di una curva $\gamma(t)$ a velocità arbitraria, la (2) del Lemma 2.20 ci dice che il vettore accelerazione $\ddot{\gamma}(t)$ è un vettore del piano osculatore ma non è detto che sia parallelo al versore normale $N(t)$.

Proposizione 2.21. *Se $\gamma(t)$ è una curva regolare di Frenet parametrizzata a velocità arbitraria, allora l'apparato di Frenet di $\gamma(t)$ è dato da*

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \wedge T(t),$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. La formula relativa a $T(t)$ è dimostrata nella (1) del Lemma 2.20. Inoltre, utilizzando (1) e (2) del Lemma 2.20, risulta

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= \|\dot{\gamma}(t)\| T(t) \wedge (\|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^2 N(t)) \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|^3 \kappa(t) T(t) \wedge N(t), \end{aligned}$$

e quindi

$$(2.7) \quad \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3 B(t).$$

Dalla (2.7) si ottiene la formula per $\kappa(t)$. Inoltre, sempre dalla (2.7), si ha

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}.$$

Per definizione $N = B \wedge T$. Infine, usando ancora la (2.7), la (2) del Lemma 2.20 e le prime due formule di Frenet di $\gamma(t)$, si ha

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} &= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot (\|\dot{\gamma}\|' T + \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 N)' \\
&= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot (\|\dot{\gamma}\|'' T + \|\dot{\gamma}\|' T' + (\kappa \|\dot{\gamma}\|^2)' N + \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 N') \\
&= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 (-\|\dot{\gamma}\| \kappa T + \|\dot{\gamma}\| \tau B) \\
&= (\kappa \|\dot{\gamma}\|^3)^2 \tau = \|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|^2 \tau.
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. \square

Corollario 2.22. *Sia $\gamma(s)$ una curva regolare di Frenet a velocità unitaria. Allora, curvatura e torsione sono date da*

$$\kappa(s) = \|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \quad e \quad \tau(s) = \frac{\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s)}{\kappa^2(s)}.$$

2.3. Curvatura (con segno) di curve piane

Le curve piane sono un caso particolare delle curve dello spazio e quindi anche per esse vale quanto detto per le curve dello spazio. Tuttavia, come conseguenza del fatto che il piano ha una struttura complessa, per le curve piane è possibile definire una curvatura con segno.

Sia $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Frenet del piano \mathbb{R}^2 . Sia $\{T(s), N(s), B(s)\}$ il riferimento di Frenet di γ come curva di \mathbb{R}^3 e quindi con $B(s) = (E_3)_{\gamma(s)}$, $E_3 = (0, 0, 1)$. Su \mathbb{R}^2 consideriamo l'orientazione indotta dalla base canonica $\{E_1, E_2\}$. Sia J la rotazione antioraria di 90° :

$$JE_1 = E_2 \quad e \quad JE_2 = -E_1.$$

Quindi,

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v = (v_1, v_2) \mapsto Jv = (-v_2, v_1).$$

J è una struttura complessa su \mathbb{R}^2 in quanto è un endomorfismo di \mathbb{R}^2 con la proprietà $J^2 = -I$. Inoltre, per $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, è facile vedere che (v, Jv) è una base ortogonale positiva di \mathbb{R}^2 .

I versori $T(s), N(s)$ del riferimento di Frenet sono ovviamente contenuti nel piano di γ (cf., ad esempio, la dimostrazione del Teorema 2.11). Ora indichiamo con $N^*(s)$ il versore normale definito in modo tale che la base $(T(s), N^*(s))$ sia equiversa alla base canonica (E_1, E_2) . Quindi

$$N^*(s) = JT(s) = \pm N(s).$$

Se $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, allora

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s))_{\gamma(s)} \quad e \quad N^*(s) = (-y'(s), x'(s))_{\gamma(s)}$$

Osserviamo che $\|T(s)\| = 1$ implica che $T'(s)$ è parallelo a $N^*(s)$.

Definizione 2.23. *La curvatura con segno di $\gamma(s)$ è la funzione $\kappa^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $T'(s) = \kappa^*(s) N^*(s)$, cioè*

$$\kappa^*(s) = T'(s) \cdot N^*(s).$$

Siccome $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ e $N^*(s) = \pm N(s)$, allora

$$\kappa^*(s) = T'(s) \cdot N^*(s) = \kappa(s)N(s) \cdot N^*(s) = \pm\kappa(s).$$

Si noti che il segno di κ^* dipende, oltre che dall'orientazione del piano, anche dal verso di percorrenza della curva (cf. Figura 3).

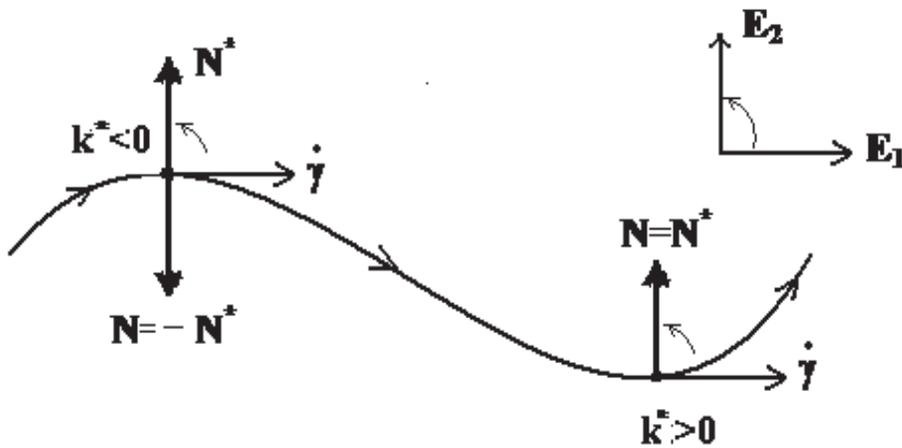


FIGURA 3. Curvatura con segno.

Un significato geometrico di κ^* è messo in evidenza anche da quanto segue. Sia $\vartheta(s)$ l'angolo di inclinazione della curva $\gamma(s)$ rispetto all'asse delle x , ossia l'angolo orientato da E_1 a $T(s)$. Allora, abbiamo

$$T(s) = \cos \vartheta(s)E_1 + \sin \vartheta(s)E_2 = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)),$$

$$T'(s) = \vartheta'(s)(-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)),$$

$$N^*(s) = JT(s) = (-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)),$$

e quindi

$$T'(s) = \vartheta'(s)N^*(s) \quad \text{e} \quad \kappa^*(s) = \vartheta'(s).$$

Pertanto, la curvatura con segno misura la variazione dell'angolo orientato $\vartheta(s)$ che la tangente forma con l'asse x :

- negli intervalli in cui $\vartheta(s)$ è crescente si ha $\kappa^*(s) > 0$;
- negli intervalli in cui $\vartheta(s)$ è decrescente si ha $\kappa^*(s) < 0$.

Infine, la curvatura con segno di una curva parametrizzata a velocità arbitraria è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.24. Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva piana regolare parametrizzata a velocità arbitraria. Allora, la curvatura con segno $\kappa^*(t) = \kappa^*(s(t))$ è data da

$$\kappa^*(t) = \frac{J\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot E_{3\gamma(t)}}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il versore tangente $T(t) = T(s(t)) = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$, per cui

$$N^*(t) = N^*(s(t)) = JT(s(t)) = JT(t)$$

e

$$T'(t) = s'(t)T'(s) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa^*(s(t))N^*(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa^*(t)N^*(t).$$

Inoltre, $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|T(t)$ e la precedente formula per $T'(t)$ implicano

$$\ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa^*(t)N^*(t),$$

e quindi

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot J\dot{\gamma}(t) = (\|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa^*(t)N^*(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|N^*(t),$$

ossia

$$J\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = \kappa^*(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3.$$

Le altre due uguaglianze seguono facilmente. \square

Esempio 2.25. La parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, si può parametrizzare con $(x = t, y = at^2 + bt + c)$, $t \in \mathbb{R}$, e quindi $(x' = 1, y' = 2at + b)$, $(x'' = 0, y'' = 2a)$. La curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{2a}{(1 + (2at + b)^2)^{3/2}}.$$

Dunque, $\kappa^*(t) > 0$ se $a > 0$ e $\kappa^*(t) < 0$ se $a < 0$. Inoltre, si vede facilmente che per $t = t_0 = -b/2a$, $\kappa^*(t_0) = 2a$ è un valore di massimo se $a > 0$, e $\kappa^*(t_0)$ è un valore di minimo se $a < 0$. Il punto corrispondente a t_0 è il vertice della parabola. Naturalmente, la curvatura (senza segno)

$$\kappa(t) = \frac{2|a|}{(1 + (2at + b)^2)^{3/2}}$$

ha sempre un massimo per $t = t_0 = -b/2a$, e $\kappa(t_0) = 2|a|$.

Esempio 2.26. La **catenaria** $y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ si può parametrizzare con $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$, e quindi

$$(x' = 1, y' = \sinh t), (x'' = 0, y'' = \cosh t).$$

Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} > 0.$$

Dunque, $\kappa(t) = \kappa^*(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per $t = 0$ si ottiene il punto $A(0, 1)$ ed è facile vedere che A è il punto di massimo per la curvatura.

Esempio 2.27. L'ellisse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $a > 0, b > 0$, si può parametrizzare con $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in \mathbb{R}$, e quindi

$$(x' = -a \sin t, y' = b \cos t), (x'' = -a \cos t, y'' = -b \sin t).$$

Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} > 0.$$

Dunque, $\kappa(t) = \kappa^*(t) > 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$ ($\kappa(t)$ è una funzione periodica). Per $t = 0, 2\pi$ si ottiene $A_1(a, 0)$ e per $t = \pi$ si ottiene $A_2(-a, 0)$. Per $t = \pi/2$ si ottiene $B_1(0, b)$ e $t = 3\pi/2$ si ottiene $B_2(0, -b)$. Assumiamo $a > b$, allora è facile vedere che i vertici A_1, A_2 sono punti di massimo per la curvatura, mentre i vertici B_1, B_2 sono di minimo per la curvatura (cf. Figura 4).

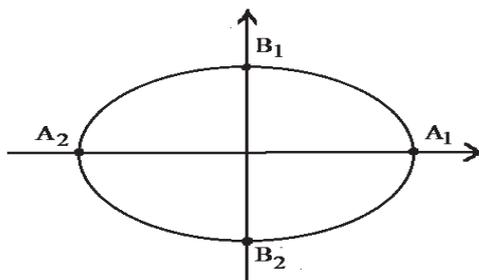


FIGURA 4. A_1, A_2 punti di massimo e B_1, B_2 punti di minimo per la curvatura dell'ellisse.

Esempio 2.28. Il ramo di iperbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, $a > 0, b > 0$, con $x > 0$, si può parametrizzare con $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t), t \in \mathbb{R}$, e quindi

$$(x' = a \sinh t, y' = b \cosh t), (x'' = a \cosh t, y'' = b \sinh t).$$

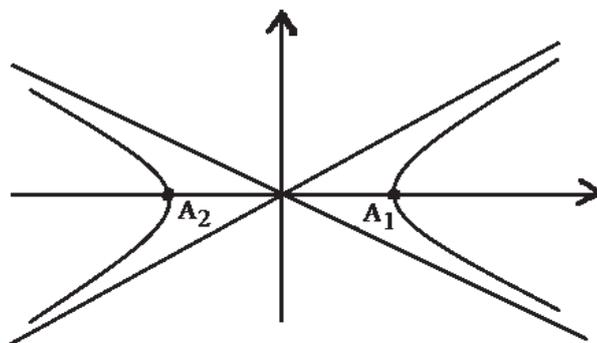
Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{-ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} < 0.$$

Dunque, $\kappa(t) = -\kappa^*(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si vede facilmente che

$$\kappa'(t) = -3ab (a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{-5/2} (a^2 + b^2) \sinh t \cosh t.$$

Il valore di massimo per la curvatura $\kappa(t)$ si ha per $t = 0$: $\kappa(0) = a/b^2$, il punto corrispondente è il vertice $A_1(a, 0)$. L'altro ramo dell'iperbole è parametrizzato da $\gamma(t) = (-a \cosh t, b \sinh t), t \in \mathbb{R}$. In questo caso, il valore di massimo per la curvatura $\kappa(t)$ si ha nel vertice $A_2(-a, 0) = \gamma(0)$ (cf. Figura 5).

FIGURA 5. A_1, A_2 punti di massimo per la curvatura dell'iperbole.

Sia $\gamma(t)$ una curva regolare di Frenet di \mathbb{R}^3 parametrizzata a velocità arbitraria, e sia $N(t)$ il versore normale a $\gamma(t)$. La curva $\tilde{\gamma}$ luogo dei centri di curvatura di γ , è definita da

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t),$$

e viene detta **curva centrale** di γ (cf. [20], p.75).

Definizione 2.29. Sia $\gamma(t)$ una curva regolare piana con $\kappa(t) > 0$. La curva centrale $\tilde{\gamma}(t)$ è detta **evoluta** di γ .

Si noti che se $\gamma(t)$ è regolare, non è detto che lo sia anche $\tilde{\gamma}(t)$.

Esempio 2.30. Se $\gamma(s)$ è una circonferenza di centro C_0 e raggio R parametrizzata a velocità unitaria, allora la curvatura $\kappa(s) = \text{cost.} = 1/R$ per cui

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + R N(s) = C_0.$$

Dunque, $\tilde{\gamma}(t)$ è costante e quindi $\tilde{\gamma}(t)$ non è regolare.

Esempio 2.31. Sia \mathcal{C} la circonferenza, di centro $C(0, 1)$ e raggio unitario, del piano $\mathbb{R}^2(x, y)$. La curva γ descritta da un punto p di \mathcal{C} mentre \mathcal{C} rotola (senza strisciare) sull'asse delle x nel verso positivo, è detta **cicloide**. La cicloide γ si può parametrizzare (cf. ad esempio [23] p.35) con

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), \quad t \in]0, 2\pi[.$$

Vogliamo trovare l'evoluta di γ . Siccome

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (1 - \cos t, \sin t, 0)_{\gamma(t)}, & \ddot{\gamma}(t) &= (\sin t, \cos t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= (0, 0, \cos t - 1)_{\gamma(t)}, & B(t) &= (0, 0, -1)_{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

si trova

$$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} (\sin t, \cos t - 1, 0)_{\gamma(t)},$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2(1 - \cos t)}}$$

e quindi

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = (t + \sin t, \cos t - 1, 0).$$

Osserviamo che $\tilde{\gamma}(t)$ si può ottenere da $\gamma(t)$ applicando una traslazione dopo una opportuna riparametrizzazione ($t = \bar{t} + \pi$):

$$\tilde{\gamma}(\bar{t}) = \tilde{\gamma}(t(\bar{t})) = \tilde{\gamma}(\bar{t} + \pi) = (\bar{t} + \pi - \sin \bar{t}, -1 - \cos \bar{t}, 0) = \gamma(\bar{t}) + (\pi, -2, 0).$$

Esercizio 2.32. Sia γ un arco di curva regolare (piana) definito, in coordinate polari, da un'equazione del tipo $\varrho = \varrho(\vartheta)$, $a \leq \vartheta \leq b$. Si verifichi che

- la lunghezza $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\varrho^2(\vartheta) + (\varrho'(\vartheta))^2} d\vartheta$;
- la curvatura $\kappa(\vartheta) = \frac{|2(\varrho'(\vartheta))^2 - \varrho(\vartheta)\varrho''(\vartheta) + \varrho^2(\vartheta)|}{(\varrho^2(\vartheta) + (\varrho'(\vartheta))^2)^{3/2}}$.

Suggerimento: considerare la parametrizzazione (cartesiana) di γ data da $(x(\vartheta) = \varrho(\vartheta)\cos \vartheta, y(\vartheta) = \varrho(\vartheta)\sin \vartheta)$.

Esercizio 2.33. Si verifichi che:

- l'evoluta della parabola $\gamma(t) = (t, t^2)$ è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (-4t^3, (6t^2 + 1)/2);$$

- l'evoluta della catenaria $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$ è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2 \cosh t);$$

- l'evoluta dell'ellisse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a, b > 0$, è la curva (detta *asteroide*, o anche *astroide*)

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{a} \sin^3 t \right);$$

- l'evoluta del ramo di iperbole $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $a, b > 0$, è la curva (detta *curva di Lamé*)

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \cosh^3 t, -\frac{a^2 + b^2}{a} \sinh^3 t \right).$$

Esercizio 2.34. Si consideri la curva $\gamma(t) = (\ln \tan t/2 + \cos t, \sin t)$, $t \in]0, \pi[$, detta **trattrice** (cf. Sezione 4.9, formula (4.24) con $R = 1$). Si noti che $\gamma(t)$ è una curva regolare tranne che per $t = \pi/2$. Verificare che l'evoluta di $\gamma(t)$ è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\ln \tan t/2, \frac{1}{\sin t} \right).$$

Si noti che se consideriamo il parametro \bar{t} definito da $\tan(t/2) = e^{\bar{t}}$, si ha $\ln \tan t/2 = \bar{t}$ e

$$\frac{1}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{2\operatorname{sen}(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{2}(\tan(t/2) + \cot(t/2)) = \frac{1}{2}(e^{\bar{t}} + e^{-\bar{t}}) = \cosh \bar{t}.$$

Quindi, $\tilde{\gamma}$ è la catenaria dell'Esempio 2.26.

2.4. Eliche circolari

Configurazioni elicoidali sono strutture che si trovano molto spesso in natura. Esse appaiono sia in sistemi microscopici (ad esempio fibre batteriche, catene proteiche in particolare del DNA, ecc.) che in fenomeni macroscopici (ad esempio: corde, funi, piante rampicanti, molle a spirale, ecc.). Per maggiori informazioni sulle configurazioni elicoidali in natura si rinvia all'articolo [3] e alla bibliografia riportata nello stesso articolo.

Nell'Esempio 1.10, una curva differenziabile γ parametrizzata da $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, dove $a = \operatorname{cost.} > 0$ e $b = \operatorname{cost.} \neq 0$, è stata chiamata *elica circolare*. Inoltre, abbiamo osservato che

- 1) $\gamma(t)$ appartiene a un cilindro circolare retto,
- 2) $\cos \vartheta = b/\sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{cost.} \neq 0$, dove ϑ è l'angolo tra $\dot{\gamma}(t)$ e $E_{3\gamma(t)}$.

Nell'Esempio 1.9 si assume la costante $a > 0$ in modo che tale costante rappresenti il raggio della circonferenza del cilindro che contiene l'elica. D'altronde la trasformazione ortogonale F , definita rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 da $F(e_1) = -e_1$, $F(e_2) = -e_2$ e $F(e_3) = e_3$, trasforma l'elica circolare $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ nell'elica circolare $\gamma(t) = (-a \cos t, -a \operatorname{sen} t, bt)$. Quindi, in un opportuno riferimento un'elica circolare si può esprimere con la costante $a > 0$.

Le proprietà 1) e 2) permettono di formalizzare la seguente definizione geometrica.

Definizione 2.35. *Una curva differenziabile regolare (non piana) $\gamma(t)$ si dice elica circolare, o arco di elica circolare, se è contenuta in un cilindro circolare retto Γ e forma un angolo costante con l'asse del cilindro, ossia*

$$T(t) \cdot V_{\gamma(t)} = \operatorname{cost.},$$

dove $T(t)$ è il versore tangente di $\gamma(t)$ e V è un versore parallelo all'asse di Γ .

Abbiamo quindi la seguente

Proposizione 2.36. *Un'elica circolare, in un opportuno riferimento, si può parametrizzare con l'equazione $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, dove $a = \operatorname{cost.} > 0$, $b = \operatorname{cost.} \neq 0$. Tale parametrizzazione la diremo parametrizzazione canonica dell'elica circolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia γ un'elica circolare e sia $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una sua parametrizzazione a velocità unitaria. Consideriamo un riferimento cartesiano $RC(O, x, y, z)$ con asse z coincidente con l'asse del cilindro Γ che contiene

γ e tale che $\gamma(0)$ appartenga al semiasse positivo delle x . Dalla definizione di elica circolare segue che

$$\dot{\gamma}(s) \cdot E_{3\gamma(s)} = \bar{b} = \text{cost}, \text{ e quindi } z'(s) = \bar{b} \text{ da cui } z(s) = \bar{b}s + c.$$

Siccome $\gamma(0)$ si trova sull'asse x , si ha $z(0) = 0$ ossia $c = 0$ e quindi $z(s) = \bar{b}s$, con $\bar{b} \neq 0$ (perchè γ non è piana). Rispetto al fissato riferimento cartesiano, il cilindro Γ ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ dove } a \text{ è l'ascissa di } \gamma(0), \text{ cioè } \gamma(0) = (a, 0, 0).$$

$\gamma(s) \in \Gamma$ implica $x(s)^2 + y(s)^2 = a^2$, e quindi abbiamo

$$x(s) = a \cos \bar{a}s, \quad y(s) = a \sin \bar{a}s, \quad z(s) = \bar{b}s,$$

dove \bar{a} (che è $\neq 0$, altrimenti γ sarebbe una retta e quindi curva piana) è determinata dalla condizione $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$, ossia $a^2\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 1$. Posto $b = \bar{b}/\bar{a}$, si ha $\bar{a} = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Pertanto, otteniamo

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

e quindi per $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$, si ottiene la rappresentazione canonica. \square

Osservazione 2.37. Dal punto di vista della Fisica, un'elica circolare è la traiettoria γ di un punto che descrive una circonferenza σ con moto circolare uniforme, mentre il piano π che contiene σ si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione ortogonale a π . In tal caso, se a è il raggio di σ , ω è la velocità angolare del moto rotatorio e v è la velocità del moto traslatorio, allora la curva γ si rappresenta con

$$\gamma(\vartheta) : x = a \cos(\omega\vartheta), \quad y = a \sin(\omega\vartheta), \quad z = v\vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$

Posto $t = \vartheta\omega$ e $b = v/\omega \neq 0$, si ottiene l'elica con equazioni parametriche $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

Per un'elica circolare $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0, b \neq 0$, l'arco $\gamma_0 = \gamma|_{[t_0, t_0+2\pi]}$ si chiama *spira* dell'elica. Ogni spira ha lunghezza costante. Infatti

$$L(\gamma_0) = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si chiama *passo* dell'elica circolare $\gamma(t)$ la distanza tra gli estremi di una spira:

$$d(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + 2\pi)) = 2\pi|b|,$$

per cui b viene detta *costante di passo dell'elica circolare*.

Esempio 2.38. Curvatura e torsione di un'elica circolare

Sia $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0, b \neq 0, t \in \mathbb{R}$, un'elica circolare. La riparametrizzazione a velocità unitaria dell'elica circolare è data da (cf. Esempio 1.22 e anche dimostrazione della Proposizione 2.36)

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Quindi,

$$T(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_{\gamma(s)}$$

e

$$T'(s) = \ddot{\gamma}(s) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}$$

Pertanto la curvatura di $\gamma(s)$ è

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2} = \operatorname{cost} > 0.$$

Consideriamo ora il campo normale lungo γ , ovvero

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = - \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \wedge N(s) \\ &= \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_{\gamma(s)}, \\ B'(s) &= \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}, \end{aligned}$$

e quindi la torsione di $\gamma(s)$ è

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = \frac{b}{a^2 + b^2} = \operatorname{cost} \neq 0.$$

Dunque, l'elica circolare è una curva con curvatura e torsione costanti non nulle. In particolare, se $b = 0$ si ha che γ è una circonferenza di raggio a , e le formule ottenute danno $\tau = 0$ e $\kappa = 1/a$.

2.5. Eliche cilindriche

Definizione 2.39. Una curva regolare $\gamma(t)$ di \mathbb{R}^3 si dice che è un'elica cilindrica, o un arco di elica cilindrica, se esiste un campo vettoriale unitario differenziabile $V(t)$ definito lungo $\gamma(t)$ tale che

- (1) $V(t)$ sia parallelo lungo γ (i.e., $V'(t) = 0$, e quindi $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$);
- (2) $V(t)$ formi un angolo costante ϑ con $T(t)$: $V(t) \cdot T(t) = \cos \vartheta (\neq \pm 1)$.

Un'elica cilindrica, a volte, è anche detta *elica generalizzata*. Il campo vettoriale $V(t)$, a volte indicato con V_0 in quanto costante, è detto *asse* dell'elica cilindrica, e l'angolo costante ϑ è detto *pendenza* dell'elica (rispetto a V). Se $V(t)$ è asse, anche $W(t) = -V(t)$ è asse con pendenza $\tilde{\vartheta} = \pi - \vartheta$. Un'elica circolare, per quanto detto precedentemente, è chiaramente un esempio di elica cilindrica. Si noti che anche le curve piane si possono considerare come eliche cilindriche (banali). Se $\gamma(t)$ è una curva piana, basta prendere $V(t)$ vettore unitario ortogonale al piano della curva (in tal caso $\vartheta = \pi/2$). Se $\gamma(t)$ fosse una

(parte di) retta, prendendo $V(t)$ vettore unitario parallelo con $\dot{\gamma}(t)$, si avrebbe $\cos \vartheta = \pm 1$.

Nel seguito considereremo, salvo diversa indicazione, eliche cilindriche che non sono rette, quindi in particolare con curvatura $\kappa(t)$ non nulla.

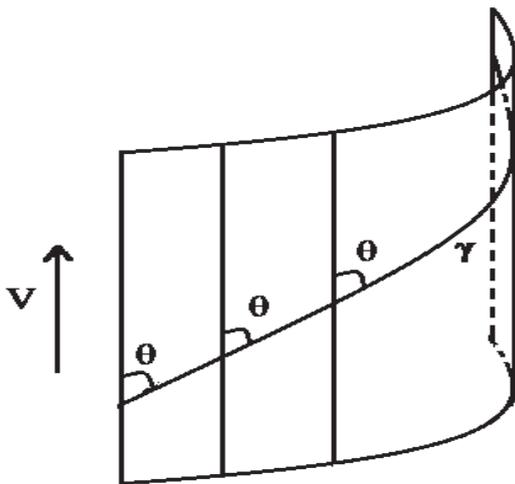


FIGURA 6. Elica cilindrica.

Osservazione 2.40. La Definizione 2.39 non dipende dalla parametrizzazione regolare scelta. Infatti se $\bar{t} = \bar{t}(t)$ è un cambiamento regolare di parametro, il campo vettoriale $V(t) = V(\bar{t}(t))$ è unitario e soddisfa

$$V'(t) = \bar{t}'(t) V'(\bar{t}), \quad \bar{t}'(t) \neq 0, \quad \text{e quindi} \quad V'(t) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad V'(\bar{t}) = 0.$$

Tracciando per ogni punto di un'elica cilindrica $\gamma(t)$ una retta con la direzione di V si ottiene un cilindro generalizzato che contiene γ (cf. Figura 6).

Proposizione 2.41. Sia $\gamma(t)$ un'elica cilindrica con pendenza ϑ rispetto all'asse $V(t)$. Allora,

$$(2.8) \quad V(t) = \cos \vartheta T(t) + \sin \vartheta B(t).$$

In particolare, V è ortogonale a N e $V \cdot B = \sin \vartheta > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(T(t), N(t), B(t))$ il riferimento di Frenet associato a $\gamma(t)$. L'asse $V(t)$ si può esprimere con

$$V(t) = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Per ipotesi $V \cdot T = \cos t = \cos \vartheta$. Derivando si ottiene $V' \cdot T + V \cdot T' = 0$. Ma $V'(t) = 0$ per ipotesi e quindi $T'(t) \cdot V(t) = 0$. Applicando poi la prima formula di Frenet, risulta $V(t) \cdot \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\| N(t) = 0$ dove $\kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$, per cui necessariamente $V(t) \cdot N(t) = 0$. Di conseguenza, l'equazione precedente diventa

$$V(t) = \cos \vartheta T(t) + (V(t) \cdot B(t))B(t).$$

Pertanto, essendo $V(t)$ unitario, scambiando $V(t)$ con $-V(t)$ se necessario, l'asse si può esprimere con la (2.8). In particolare, si ha $V(t) \cdot B(t) = \sin \vartheta > 0$. Infatti, se fosse $\sin \vartheta = 0$, dalla (2.8) si avrebbe $T'(t) = 0$ e quindi $\kappa(t)\|\dot{\gamma}(t)\|N(t) = 0$, per cui essendo la curva regolare si avrebbe $\kappa(t) = 0$, ma le eliche che consideriamo non sono segmenti di retta, pertanto $\sin \vartheta > 0$. \square

Una caratterizzazione delle eliche è data dal seguente Teorema stabilito da M.A. Lancret (1802), ma la prima dimostrazione è stata data da B. de Saint Venant nel 1845 (cf. anche [26], p.34).

Teorema 2.42. (di Lancret) *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet. Allora,*

$$\gamma(s) \text{ è un'elica cilindrica} \iff \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \text{cost.}$$

In tal caso,

$$\tau(s)/\kappa(s) = \cotg \vartheta, \text{ dove } \vartheta \text{ è la pendenza dell'elica.}$$

DIMOSTRAZIONE. “ \implies ” Assumiamo che $\gamma(s)$ sia un'elica cilindrica. Dalla Proposizione 2.41 segue che l'asse V è dato da

$$V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s).$$

Derivando, ricordando che $V'(s) = 0$ e applicando le formule di Frenet, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \vartheta T'(s) + \sin \vartheta B'(s) = \cos \vartheta \kappa(s)N(s) - \sin \vartheta \tau(s)N(s) \\ &= (\kappa(s)\cos \vartheta - \tau(s)\sin \vartheta)N(s), \end{aligned}$$

e quindi

$$\kappa(s) \cdot \cos \vartheta - \tau(s) \sin \vartheta = 0, \text{ ossia } \tau(s)/\kappa(s) = \cos \vartheta / \sin \vartheta = \cotg \vartheta = \text{cost.}$$

“ \impliedby ” Per ipotesi $\tau(s)/\kappa(s) = \text{cost} \in \mathbb{R} = \cotg([0, \pi[)$. Pertanto, esiste un unico $\vartheta \in]0, \pi[$ tale che $\cotg \vartheta = \tau(s)/\kappa(s)$. Ora consideriamo il campo vettoriale lungo $\gamma(s)$ definito da $V(s) := \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s)$. Ovviamente $V(s)$ è differenziabile, $\|V\| = 1$ e $V(s) \cdot T(s) = \cos \vartheta = \text{cost}$. Inoltre, usando le formule di Frenet, risulta

$$\begin{aligned} V'(s) &= \cos \vartheta T'(s) + \sin \vartheta B'(s) = \cos \vartheta \kappa(s)N(s) - \sin \vartheta \tau(s)N(s) \\ &= (\kappa(s)\cos \vartheta - \tau(s)\sin \vartheta)N(s) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, per definizione, $\gamma(s)$ è un'elica cilindrica. \square

Alla luce del teorema precedente, le eliche cilindriche sono anche dette *curve di Lancret*.

Osservazione 2.43. Si noti che le curve di Lancret (non escludendo le rette) si possono caratterizzare anche come le curve geodetiche di un cilindro generalizzato retto (cf. Esempio 5.74).

Teorema 2.44. *Sia $\gamma(s)$ una (parte di) elica cilindrica e sia E^2 un piano ortogonale all'asse V . Allora, la curva $\gamma_1(s)$ proiezione ortogonale di $\gamma(s)$ su E^2 , che in generale non è una (parte di) circonferenza, ha curvatura*

$$\kappa_1(s) = \kappa(s)/\text{sen}^2\vartheta,$$

dove ϑ è la pendenza dell'elica. Inoltre, $\tau(s) = \kappa_1(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta$.

DIMOSTRAZIONE. Sia E^2 un piano che, senza perdere in generalità possiamo considerare per l'origine, ortogonale all'asse V . Dalla decomposizione

$$\mathbb{R}^3 = E^2 \oplus \text{span}(V),$$

ne segue che la curva $\gamma_1(s)$ è data da

$$(2.9) \quad \gamma_1(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot V(s))V(s).$$

Il parametro s in generale non è ascissa curvilinea per γ_1 , quindi per trovare la curvatura $\kappa_1(s)$ di $\gamma_1(s)$ usiamo la formula

$$\kappa_1(s) = \|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|/\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3.$$

Derivando la (2.9), si ottiene

$$\dot{\gamma}_1(s) = \dot{\gamma}(s) - (\dot{\gamma}(s) \cdot V(s))V(s) = T(s) - (T(s) \cdot V(s))V(s),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_1\|^2 &= (T - (T \cdot V)V) \cdot (T - (T \cdot V)V) = 1 - 2(T \cdot V)^2 + (T \cdot V)^2 \\ &= 1 - \cos^2\vartheta, \quad \text{ossia} \end{aligned}$$

$$\|\dot{\gamma}_1(s)\| = \text{sen}\vartheta.$$

Inoltre,

$$\ddot{\gamma}_1(s) = T'(s) - (T'(s) \cdot V(s))V(s),$$

dove

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{e quindi} \quad T'(s) \cdot V(s) = 0.$$

Pertanto,

$$\ddot{\gamma}_1(s) = T'(s).$$

Allora, usando anche la (2.8), si ha

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s) &= (T - (T \cdot V)V) \wedge T' = \kappa(s)(T - (\cos\vartheta)V) \wedge N \\ &= \kappa(s)T \wedge N - \kappa(s)\cos\vartheta(\cos\vartheta T + \text{sen}\vartheta B) \wedge N \\ &= \kappa(s)B - \kappa(s)\cos^2\vartheta B + (\kappa(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta)T \\ &= (\kappa(s)\text{sen}^2\vartheta)B + (\kappa(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta)T, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|^2 = \kappa^2(s)\text{sen}^2\vartheta.$$

Dunque,

$$\kappa_1(s) = \|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|/\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3 = (\kappa(s)\text{sen}\vartheta)/\text{sen}^3\vartheta = \kappa(s)/\text{sen}^2\vartheta.$$

Infine, dal Teorema di Lancret, $\tau(s)/\kappa(s) = \cos\vartheta/\text{sen}\vartheta$ e quindi $\tau(s) = \kappa_1(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta$. \square

Osservazione 2.45. Si noti che i Teoremi 2.42 e 2.44 valgono anche per curve regolari $\gamma(t)$ parametrizzate a velocità arbitraria e con $\kappa(t) > 0$. Basta osservare che $\kappa(s) = \kappa(t(s))$ e $\tau(s) = \tau(t(s))$. In tal caso, la curva $\gamma_1(t)$ proiezione ortogonale di $\gamma(t)$ su un piano ortogonale all'asse $V(t)$ ha curvatura

$$(2.10) \quad \kappa_1(t) = \kappa(t)/\sin^2 \vartheta$$

Esercizio 2.46. Sia data un'elica circolare $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0, b \neq 0, t \in \mathbb{R}$, e sia E^2 un piano ortogonale all'asse di γ . Sia $\gamma_1(t)$ la circonferenza proiezione ortogonale di $\gamma(t)$ su E^2 . Si verifichi, applicando il Teorema 2.44, che $\gamma_1(t)$ ha curvatura $\kappa_1(t) = 1/a$, ossia $\kappa(t)/\sin^2 \vartheta = 1/a$.

Esercizio 2.47. Sia data la curva regolare $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determinare curvatura e torsione di γ , quindi riconoscere che γ è un'elica cilindrica ed esplicitare l'asse V di γ .

b) Determinare la curva $\gamma_1(t)$ proiezione ortogonale di γ su un piano ortogonale all'asse V di γ , inoltre determinare la curvatura di γ_1 .

Soluzione: a) Calcolando i vettori $\dot{\gamma}(t)$, $\ddot{\gamma}(t)$, $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$ e $\ddot{\gamma}(t)$, si ha

$$\dot{\gamma}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (e^t, e^{-t}, 0)_{\gamma(t)}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)_{\gamma(t)},$$

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)_{\gamma(t)},$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = (e^t + e^{-t})^2, \quad \|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2 = 2(e^t + e^{-t})^2.$$

Quindi, curvatura e torsione sono date da

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2},$$

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Pertanto, $\tau(t)/\kappa(t) = -1$ e quindi la curva $\gamma(t)$ è un'elica cilindrica con angolo di pendenza $\vartheta = 3\pi/4$. Ora determiniamo l'asse $V(t)$ dell'elica. Dalla Proposizione 2.41, l'asse $V(t)$ è il campo vettoriale

$$V(t) = (\cos \vartheta)T(t) + (\sin \vartheta)B(t) = (\sqrt{2}/2)(B(t) - T(t)),$$

dove

$$T(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \quad B(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}(-e^{-t}, e^t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}.$$

Pertanto, otteniamo

$$V(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)_{\gamma(t)}.$$

b) Siccome $V(t) \cdot \gamma(t) = (\sqrt{2}/2)(e^{-t} - e^t)$, la curva proiezione ortogonale di γ su un piano ortogonale all'asse V è data da

$$\gamma_1(t) = \gamma(t) - (V(t) \cdot \gamma(t))V(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t, e^{-t} + e^t, 2\sqrt{2}t).$$

Applicando la (2.10), la curva γ_1 ha curvatura

$$\kappa_1(t) = \frac{\kappa(t)}{\sin^2 \vartheta} = \frac{2\sqrt{2}}{(e^{-t} + e^t)^2}.$$

Esercizio 2.48. Sia data la curva $\gamma(t) = (2t, (2/3)t^3, (1/5)t^5)$, $t > 0$.

a) Determinare curvatura e torsione di γ , quindi riconoscere che γ è un'elica cilindrica ed esplicitare l'asse V di γ .

b) Determinare la curva $\gamma_1(t)$ proiezione ortogonale di γ su un piano ortogonale all'asse V di γ , inoltre determinare la curvatura di γ_1 .

Suggerimento: a) Usando le formule della Proposizione 2.21 si trova che $\tau(t) = \kappa(t) = 4t/(2+t^4)^2$. Quindi, per il Teorema di Lancret γ è un'elica cilindrica, $\tau/\kappa = \cotg(\pi/4)$ e $V(t) = (\sqrt{2}/2)T(t) + (\sqrt{2}/2)B(t) = (\sqrt{2}/2)(1, 0, 1)_{\gamma(t)}$ è l'asse dell'elica.

b) Usando la (2.9) si trova $\gamma_1(t) = (t - t^5/10, 2t^3/3, -t + t^5/10)$, e quindi dalla formula del Teorema 2.44 si ottiene $\kappa_1(t) = 8t/(2+t^4)^2$.

Esercizio 2.49. Sia $\gamma(t)$ una curva di Frenet parametrizzata con velocità scalare $\|\dot{\gamma}(t)\| = 3\sqrt{2}(1+t^2)$. Determinare curvatura e torsione di $\gamma(t)$ sapendo che il suo riferimento di Frenet è dato da

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} (1-t^2, 2t, 1+t^2)_{\gamma(t)}, \quad N(t) = \frac{1}{1+t^2} (-2t, 1-t^2, 0)_{\gamma(t)},$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} (t^2-1, -2t, 1+t^2)_{\gamma(t)}.$$

Quindi, riconoscere la curva $\gamma(t)$.

Suggerimento: calcolare i campi derivati $T'(t)$ e $B'(t)$. Applicando le formule di Frenet per curve parametrizzate a velocità arbitraria, si trova

$$\kappa(t) = \frac{T'(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dots = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

e

$$\tau(t) = -\frac{B'(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dots = \frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$

Dunque, $\gamma(t)$ è un'elica cilindrica.

Vogliamo dare ora una caratterizzazione dell'elica cilindrica in termini della curva immagine sferica che adesso introduciamo. Sia $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in I$, una curva di Frenet. Siccome s è ascissa curvilinea, si ha $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$. La curva

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, s \mapsto \beta(s) = \dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)),$$

è detta **immagine sferica** di γ . La curva β è regolare in quanto

$$\dot{\beta}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s) \neq 0, \text{ quindi } \|\dot{\beta}(s)\| = \kappa(s) > 0,$$

dove $\kappa(s)$ è la curvatura di $\gamma(s)$. In generale $\beta(s)$ non è parametrizzata a velocità unitaria, per cui per calcolare curvatura e torsione di β usiamo le formule della Proposizione 2.21. Derivando

$$\dot{\beta}(s) = \kappa(s)N(s),$$

e applicando le formule di Frenet, si ha

$$\ddot{\beta} = \kappa'N + \kappa N' = \kappa'N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa'N + \kappa\tau B$$

e

$$\ddot{\beta} = (-3\kappa\kappa')T + (\kappa'' - \kappa^3 - \tau^2\kappa)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B.$$

Quindi,

$$(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(s) = \kappa^2(s)\tau(s)T(s) + \kappa^3(s)B(s)$$

e

$$\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta} = \dots = \kappa^5(\tau/\kappa)',$$

per cui si ottiene

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\|\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta}\|}{\|\dot{\beta}\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^6 + \tau^2\kappa^4}}{\kappa^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$$

e

$$\tau_\beta = \frac{\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta}}{\|\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta}\|^2} = \frac{(\tau/\kappa)'}{\kappa(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2})}.$$

Pertanto, come conseguenza del Teorema 2.13 e del Teorema 2.42 (di Lancret), otteniamo la seguente

Proposizione 2.50. *Una curva di Frenet (non piana) $\gamma(s)$ è una (parte di) elica cilindrica se, e solo se, la sua immagine sferica $\beta(s)$ è una (parte di) circonferenza di curvatura $\kappa_\beta = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2} > 1$.*

Per le eliche circolari abbiamo la seguente caratterizzazione.

Teorema 2.51. *Sia $\gamma(t)$ una curva di Frenet (non piana). Allora, $\gamma(t)$ è una (parte di) elica circolare $\iff \tau(t) = \text{cost.}$ e $\kappa(t) = \text{cost.}$*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione " \implies " è stata vista nell'Esempio 2.38. Proviamo l'implicazione inversa. Dal Teorema di Lancret sappiamo che $\gamma(t)$ è una (parte di) elica cilindrica. Inoltre, siccome $\kappa(t)$ è costante per ipotesi, dal Teorema 2.44 segue che la curva γ_1 , proiezione ortogonale di γ su un piano ortogonale all'asse V , ha curvatura

$$\kappa_1(t) = \kappa(t)/\text{sen}^2\vartheta = \text{cost.}$$

Dunque, applicando il Teorema 2.13, γ_1 è una (parte di) circonferenza e quindi γ è una (parte di) elica circolare. \square

Osservazione 2.52. Sia $\gamma(s)$ un'elica circolare e sia $(T(s), N(s), B(s), \kappa, \tau)$ il suo apparato di Frenet. Dalla (2.8) segue che l'asse $V(s)$ di γ è dato da

$$V(s) = \cos\vartheta T(s) + \text{sen}\vartheta B(s),$$

dove $\cot \vartheta = \tau/\kappa$ (cf. Teorema 2.42) e ϑ è l'angolo convesso tra T e V . Allora, i vettori $V_1(s) = \sin \vartheta T(s) - \cos \vartheta B(s)$ ed $N(s)$ sono ortonormali e il piano $E^2(s) = \text{span}(V_1(s), N(s))$ è ortogonale a $V(s)$ lungo γ . Derivando, e applicando le formule di Frenet, otteniamo

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= \sin \vartheta T'(s) - \cos \vartheta B'(s) = \kappa \sin \vartheta N(s) + \tau \cos \vartheta N(s) \\ &= (\kappa \sin \vartheta + \tau \cos \vartheta)N(s) = \left(\kappa \sin \vartheta + \kappa \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} \right) N(s) \\ &= \frac{\kappa}{\sin \vartheta} N(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N'(s) &= -\kappa T(s) + \tau B(s) = -\kappa T(s) + \kappa \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} B(s) \\ &= \frac{\kappa}{\sin \vartheta} (-\sin \vartheta T(s) + \cos \vartheta B(s)) \\ &= -\frac{\kappa}{\sin \vartheta} V_1(s). \end{aligned}$$

Quindi,

$$V_1'(s) = \varrho N(s) \quad \text{e} \quad N'(s) = -\varrho V_1(s),$$

dove

$$\varrho = \frac{\kappa}{\sin \vartheta} = \dots = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Pertanto, derivando il riferimento ortonormale $(V(s), V_1(s), N(s))$ lungo γ , si ha $V'(s) = 0$ mentre il piano $E^2(s)$, ortogonale all'asse V , è trasformato in se mediante una rotazione di 90° seguita da una omotetia di coefficiente ϱ . Inoltre, si noti che ϱ è la lunghezza del campo vettoriale di Darboux (cf. Sezione 2.6).

Diamo ora un metodo per la **costruzione di eliche cilindriche**.

Teorema 2.53. *Sia $\alpha(t)$, $t \in I$, una curva regolare piana parametrizzata a velocità costante $\|\dot{\alpha}(t)\| = a > 0$ e sia V_0 un vettore unitario ortogonale al piano di α . Allora, la curva*

$$(*) \quad \gamma(t) = \alpha(t) + t b V_0 + c V_0, \quad b, c \in \mathbb{R},$$

è un'elica cilindrica con asse il campo vettoriale costante e unitario V_0 . Viceversa, se $\gamma(t)$ è un'elica cilindrica con asse un vettore unitario V_0 , allora $\gamma(t)$ è del tipo $()$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha(t)$, V_0 e $\gamma(t)$ come nell'enunciato. Intanto osserviamo che $\gamma(t)$ è regolare in quanto

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\alpha}(t) + b(V_0)_{\gamma(t)} \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 + b^2 = \text{cost.} > 0.$$

Inoltre, il campo vettoriale $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$ soddisfa: $\|V(t)\| = 1$, $V'(t) = 0$. Sia $\vartheta(t)$ l'angolo convesso individuato da γ e V . Allora

$$\dot{\gamma}(t) \cdot V(t) = (\dot{\alpha}(t) + b(V_0)_{\gamma(t)}) \cdot V(t) = b$$

e

$$\dot{\gamma}(t) \cdot V(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cos \vartheta(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \vartheta(t)$$

implicano che l'angolo $\vartheta(t)$ è costante. Pertanto, la curva $\gamma(t)$ è un'elica cilindrica parametrizzata con velocità scalare costante e con asse il campo vettoriale unitario $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$. Se le costanti a, b soddisfano la condizione $a^2 + b^2 = 1$, allora t è ascissa curvilinea per γ .

Viceversa, sia $\gamma(t)$ un'elica cilindrica parametrizzata con velocità scalare costante, $\|\dot{\gamma}(t)\| = d > 0$, e con asse il campo vettoriale unitario $V(t)$ che in quanto parallelo si può esprimere nella forma $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$. Consideriamo la curva

$$\alpha(t) = \gamma(t) - (\gamma(t) \cdot V_0) V_0.$$

α è una curva piana contenuta in un piano ortogonale all'asse V_0 . Dalla definizione di elica cilindrica segue che

$$(V_0 \cdot \gamma(t))' = V_0 \cdot \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cos \vartheta = d \cos \vartheta \text{ (costante),}$$

e quindi

$$V_0 \cdot \gamma(t) = (d \cos \vartheta) t + c, \quad c \text{ costante.}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \alpha(t) + (\gamma(t) \cdot V_0) V_0 \\ &= \alpha(t) + (d \cos \vartheta) t V_0 + c V_0 \\ &= \alpha(t) + b t V_0 + c V_0, \end{aligned}$$

dove si è posto $b = d \cos \vartheta$. □

Esercizio 2.54. Siano $\alpha(s)$ una curva regolare piana parametrizzata a velocità unitaria, V_0 un vettore unitario ortogonale al piano di α , e $\vartheta \in]0, \pi[$, $\vartheta \neq \pi/2$. Verificare che la curva

$$\gamma(s) = (\sin \vartheta) \alpha(s) + s (\cos \vartheta) V_0$$

è una (parte di) elica cilindrica con

$$\kappa_\gamma(s) = (\sin \vartheta) \kappa_\alpha(s) \quad \text{e} \quad \tau_\gamma(s) = (\cos \vartheta) \kappa_\alpha(s).$$

In particolare, $\gamma(s)$ è una (parte di) elica circolare se e solo se $\alpha(s)$ è una (parte di) circonferenza.

Suggerimento: applicare la definizione di curvatura per trovare κ_γ , e il Teorema di Lancret per trovare la torsione τ_γ .

Esempio 2.55. (Elica cilindrica su un cono rotondo)

Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t \cos \ln t, t \sin \ln t, \sqrt{2} t), \quad t > 0.$$

Si vede facilmente che γ è una curva del cono rotondo

$$S : 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, \quad z > 0,$$

ottenuto ruotando la retta $x = 0, z = \sqrt{2}y$ intorno all'asse z . Siccome

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (\cos \ln t - \operatorname{sen} \ln t, \cos \ln t + \operatorname{sen} \ln t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, & \|\dot{\gamma}(t)\| &= 2, \\ \ddot{\gamma}(t) &= -(1/t)(\cos \ln t + \operatorname{sen} \ln t, \operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \ddot{\gamma}(t) &= (2/t^2)(\operatorname{sen} \ln t, -\cos \ln t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= (\sqrt{2}/t)(\operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, -\operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \\ \|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2 &= 8/t^2, & \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) &= \frac{2\sqrt{2}}{t^3},\end{aligned}$$

si ottiene

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{4t} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4t}.$$

Pertanto, τ/κ è costante e quindi γ è un'elica cilindrica. Inoltre, è facile vedere che l'asse di γ è il campo vettoriale costante definito dall'asse delle z . Quindi, l'asse di γ coincide con l'asse del cono di rotazione S . Nell'articolo di Caddeo-Piu [8] c'è una bella presentazione delle eliche cilindriche su superfici di rotazione che hanno asse coincidente con l'asse della stessa superficie.

2.6. Il campo vettoriale di Darboux

Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet a velocità unitaria. Il campo di vettori

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

è il **campo vettoriale di Darboux** (cf., ad esempio, [14] Section 5.2) anche detto vettore velocità angolare di un corpo rigido che si muove lungo la curva $\gamma(s)$ (cf. Esempio 2.57). Osserviamo che il campo vettoriale di Darboux è il campo vettoriale assiale della matrice antisimmetrica

$$\mathcal{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, se $X(s)$ è un campo vettoriale lungo $\gamma(s)$ espresso con componenti $(X^1(s), X^2(s), X^3(s))$ rispetto al riferimento di Frenet, si ha

$$\mathcal{A}(s)X(s) = \begin{pmatrix} T & N & B \\ \tau & 0 & \kappa \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{pmatrix} (s) = D(s) \wedge X(s).$$

Si noti che, per ogni s , il vettore $D(s)$ è un autovettore di $\mathcal{A}(s)$ corrispondente all'autovalore nullo della stessa matrice $\mathcal{A}(s)$. Inoltre, si può facilmente verificare che il vettore $D(s)$ soddisfa

$$T'(s) = (D \wedge T)(s), \quad N'(s) = (D \wedge N)(s), \quad B'(s) = (D \wedge B)(s).$$

Tali equazioni, dette *equazioni di Darboux*, non sono altro che una variante delle formule di Frenet:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} (s) = \mathcal{A}^T \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} (s).$$

Il seguente Teorema caratterizza le eliche mediante il campo vettoriale di Darboux.

Teorema 2.56. *Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet. Allora,*

- $\gamma(s)$ è una (parte di) elica cilindrica se e solo se il normalizzato del campo vettoriale di Darboux $D(s)$ è parallelo lungo $\gamma(s)$;
- $\gamma(s)$ è una (parte di) elica circolare se e solo se il campo vettoriale di Darboux $D(s)$ è parallelo lungo $\gamma(s)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(s)$ un'elica cilindrica. L'asse V di $\gamma(s)$ è dato da

$$V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s),$$

e dal Teorema di Lancret, abbiamo $\tau(s)/\kappa(s) = \cos \vartheta / \sin \vartheta$. Allora,

$$V(s) = \frac{\sin \vartheta}{\kappa(s)} (\tau(s) T(s) + \kappa(s) B(s)) = \frac{\sin \vartheta}{\kappa(s)} D(s).$$

Pertanto, il campo vettoriale di Darboux soddisfa:

$$D(s) = f(s)V(s), \quad \text{dove} \quad f(s) = \frac{\kappa(s)}{\sin \vartheta},$$

e quindi il suo normalizzato $(1/f(s))D(s) = V(s)$ è parallelo.

Viceversa, sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet e quindi il campo vettoriale di Darboux $\|D(s)\| \neq 0$ per ogni s . Assumiamo che il normalizzato di $D(s)$ sia parallelo lungo $\gamma(s)$, ossia il campo vettoriale unitario $V(s) = (1/a(s))D(s)$, dove $a(s)^2 = \|D(s)\|^2 = \tau^2(s) + \kappa^2(s)$, soddisfi $V'(s) = 0$. Allora, derivando l'equazione

$$a(s)V(s) = D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} a'(s)V(s) &= \tau'(s)T(s) + \tau(s)T'(s) + \kappa'(s)B(s) + \kappa(s)B'(s) \\ &= \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s). \end{aligned}$$

Sostituendo $V(s)$ con $(1/a(s))D(s)$, si ottiene

$$\frac{a'(s)}{a(s)} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) = \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s),$$

che implica

$$\tau'(s) = \frac{a'(s)}{a(s)} \tau(s) \quad \text{e} \quad \kappa'(s) = \frac{a'(s)}{a(s)} \kappa(s),$$

e quindi

$$\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s) = 0.$$

Di conseguenza,

$$\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' = \frac{\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{\kappa^2(s)} = 0,$$

e quindi $\tau(s)/\kappa(s)$ è una costante, ovvero $\gamma(s)$ è una (parte di) elica cilindrica.

Per la seconda parte, basta notare che

$$D'(s) = \dots = \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s),$$

e quindi $D(s)$ è parallelo se e solo se τ e κ sono costanti (ovvero, $\gamma(s)$ è un'elica circolare). \square

Esempio 2.57. Come già osservato, un'elica circolare è la traiettoria γ di un punto che descrive una circonferenza σ con moto circolare uniforme, mentre il piano π che contiene σ si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione ortogonale a π . In tal caso, se a è il raggio di σ , ω è la velocità angolare del moto rotatorio e v è la velocità del moto traslatorio, la curva γ si parametrizza con

$$\gamma(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), vt), \quad t \text{ parametro.}$$

Il suo vettore velocità

$$\dot{\gamma}(t) = (-a\omega \sin(\omega t), a\omega \cos(\omega t), v)_{\gamma(t)}, \quad \text{e quindi } \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2\omega^2 + v^2.$$

Assumiamo che la curva sia parametrizzata a velocità scalare unitaria, ossia che le velocità ω e v soddisfino la condizione

$$a^2\omega^2 + v^2 = 1.$$

Siccome

$$\ddot{\gamma}(t) = (-a\omega^2 \cos(\omega t), -a\omega^2 \sin(\omega t), 0)_{\gamma(t)}$$

e

$$\ddot{\gamma}(t) = (a\omega^3 \sin(\omega t), -a\omega^3 \cos(\omega t), 0)_{\gamma(t)},$$

applicando, ad esempio, le formule del Corollario 2.22, si trova

$$\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = a\omega^2,$$

e

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\kappa^2(t)} = \frac{a^2 v \omega^5}{a^2 \omega^4} = v \omega,$$

e

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|} = (v \sin(\omega t), -v \cos(\omega t), a\omega)_{\gamma(t)}.$$

Inoltre,

$$\tau(t)T(t) = v\omega T(t) = (-av\omega^2 \sin(\omega t), av\omega^2 \cos(\omega t), v^2\omega)_{\gamma(t)}$$

e

$$\kappa(t)B(t) = a\omega^2 B(t) = (av\omega^2 \sin(\omega t), -av\omega^2 \cos(\omega t), a^2\omega^3)_{\gamma(t)}.$$

Pertanto, il campo vettoriale di Darboux

$$D(t) = \tau(t)T(t) + \kappa(t)B(t) = (0, 0, \omega(v^2 + a^2\omega^2))_{\gamma(t)} = (0, 0, \omega)_{\gamma(t)},$$

e la sua lunghezza è la velocità angolare ω .

2.7. Il teorema fondamentale sulle curve

Iniziamo con la seguente

Definizione 2.58. *Due curve parametrizzate $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dicono congruenti (o isometriche) se esiste un'isometria dello spazio euclideo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\beta(t) = F(\alpha(t))$ per ogni $t \in I$.*

Siano $\alpha(s), \beta(s)$, $s \in I$, due curve regolari parametrizzate a velocità unitaria. Se $\kappa_\alpha(s) = 0$ per ogni s , ossia $\alpha(s)$ è un segmento di retta, e $\beta(s)$ è congruente ad $\alpha(s)$, allora anche $\beta(s)$ è un segmento di retta. Viceversa, se $\alpha(s), \beta(s)$ sono due segmenti di retta, allora è facile costruire una isometria F tale che $\beta(s) = F(\alpha(s))$. Se $\kappa_\alpha(s)$ non è nulla, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 2.59. (Teorema fondamentale sulle curve, prima parte) *Siano $\alpha(s), \beta(s)$, $s \in I$, due curve regolari parametrizzate a velocità unitaria e con $\kappa_\alpha(s) > 0$. Allora,*

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ sono congruenti} \iff \kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s) \text{ e } \tau_\beta(s) = \pm \tau_\alpha(s) \text{ per ogni } s.$$

DIMOSTRAZIONE. “ \implies ” Sia $\beta(s)$ congruente ad $\alpha(s)$ e sia F un'isometria di \mathbb{R}^3 tale che $\beta(s) = F(\alpha(s))$ per ogni s . Dalla definizione di F_* si ha

$$T_\beta(s) = \dot{\beta}(s) = F_*(\dot{\alpha}(s)) = F_*T_\alpha(s).$$

Applicando la (2) del Teorema 1.79, si ha

$$T'_\beta(s) = \ddot{\beta}(s) = F_*(\ddot{\alpha}(s)) = F_*T'_\alpha(s).$$

Quindi,

$$\kappa_\beta(s) = \|T'_\beta(s)\| = \|F_*T'_\alpha(s)\| = \|T'_\alpha(s)\| = \kappa_\alpha(s) > 0.$$

Di conseguenza, anche $\beta(s)$ è una curva di Frenet con

$$N_\beta(s) = \frac{\ddot{\beta}(s)}{\kappa_\beta(s)} = \frac{F_*(\ddot{\alpha}(s))}{\kappa_\alpha(s)} = F_*\left(\frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}\right) = F_*N_\alpha(s)$$

e

$$\begin{aligned} B_\beta(s) &= T_\beta(s) \wedge N_\beta(s) = (F_*T_\alpha(s)) \wedge (F_*N_\alpha(s)) \\ &= \text{sign}(F) F_*(T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)) = \text{sign}(F) F_*B_\alpha(s). \end{aligned}$$

Pertanto, applicando la (1) del Teorema 1.79, otteniamo

$$\begin{aligned} \tau_\beta(s) &= -B'_\beta(s) \cdot N_\beta(s) = B_\beta(s) \cdot N'_\beta(s) = B_\beta(s) \cdot (F_*N_\alpha(s))' \\ &= B_\beta(s) \cdot F_*N'_\alpha(s) = \text{sign}(F) F_*B_\alpha(s) \cdot F_*N'_\alpha(s) = \pm B_\alpha(s) \cdot N'_\alpha(s) \\ &= \pm \tau_\alpha(s). \end{aligned}$$

“ \impliedby ” Per ipotesi $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ e $\tau_\beta(s) = \pm \tau_\alpha(s)$. Distinguiamo due casi.

• **I caso:** $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$ e $\tau_\beta = \tau_\alpha$.

Fissato $s_0 \in I$, sia $(T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0))$ il riferimento di Frenet di α in $\alpha(s_0)$ e sia $(T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), B_\beta(s_0))$ il riferimento di Frenet di β in $\beta(s_0)$.

Applicando la Proposizione 1.61, consideriamo l'isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ e

$$(2.11) \quad F_*T_\alpha(s_0) = T_\beta(s_0), \quad F_*N_\alpha(s_0) = N_\beta(s_0), \quad F_*B_\alpha(s_0) = B_\beta(s_0).$$

Tale F ha $\text{sign}(F) = +1$ in quanto i riferimenti di Frenet sono positivi. Ora poniamo $\tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s))$ e proviamo che $\tilde{\alpha}(s) = \beta(s)$. Poichè α e $\tilde{\alpha}$ sono congruenti, dalla dimostrazione dell'implicazione " \implies " segue che $\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s)$ e $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(s)$, inoltre

$$(A) \quad \begin{cases} T_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*T_\alpha(s_0) = T_\beta(s_0), \\ N_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*N_\alpha(s_0) = N_\beta(s_0), \\ B_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*B_\alpha(s_0) = B_\beta(s_0). \end{cases}$$

Scriviamo le formule di Frenet per $\tilde{\alpha}$ e β . Tenendo conto che $\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s)$, $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(s)$, $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ e $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$, si ha:

$$(B) \quad \begin{cases} T'_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) & = \kappa_\alpha(s)N_{\tilde{\alpha}}(s). \\ N'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\kappa_{\tilde{\alpha}}(s)T_{\tilde{\alpha}}(s) + \tau_{\tilde{\alpha}}(s)B_{\tilde{\alpha}}(s) & = -\kappa_\alpha(s)T_{\tilde{\alpha}}(s) + \tau_\alpha(s)B_{\tilde{\alpha}}(s). \\ B'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) & = -\tau_\alpha(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) \end{cases}$$

e

$$(C) \quad \begin{cases} T'_\beta(s) = \kappa_\beta(s)N_\beta(s) & = \kappa_\alpha(s)N_\beta(s), \\ N'_\beta(s) = -\kappa_\beta(s)T_\beta(s) + \tau_\beta(s)B_\beta(s) & = -\kappa_\alpha(s)T_\beta(s) + \tau_\alpha(s)B_\beta(s), \\ B'_\beta(s) = -\tau_\beta(s)N_\beta(s) & = -\tau_\alpha(s)N_\beta(s). \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(s) = \|T_{\tilde{\alpha}}(s) - T_\beta(s)\|^2 + \|N_{\tilde{\alpha}}(s) - N_\beta(s)\|^2 + \|B_{\tilde{\alpha}}(s) - B_\beta(s)\|^2.$$

Derivando tale funzione, tenendo conto delle formule di Frenet trovate in (B) e (C), si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(s) &= (T'_{\tilde{\alpha}} - T'_\beta)(s) \cdot (T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) + (N'_{\tilde{\alpha}} - N'_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad + (B'_{\tilde{\alpha}} - B'_\beta)(s) \cdot (B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) \\ &= \kappa_\alpha(s)(N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \cdot (T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) \\ &\quad - \kappa_\alpha(s)(T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad + \tau_\alpha(s)(B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad - \tau_\alpha(s)(N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \cdot (B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) = 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che $f(s) = \text{cost} = f(s_0) = 0$, dove nell'ultima uguaglianza si è usata la (A). Quindi, in particolare, si ha

$$\|T_{\tilde{\alpha}}(s) - T_\beta(s)\|^2 = 0, \quad \text{cioè } T_{\tilde{\alpha}}(s) = T_\beta(s) \quad (\text{come parti vettoriali}).$$

Pertanto, se

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{\alpha}_1(s), \tilde{\alpha}_2(s), \tilde{\alpha}_3(s)) \quad \text{e} \quad \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)),$$

abbiamo

$$\tilde{\alpha}(s) = \dot{\beta}(s), \quad \text{cioè} \quad \frac{d\tilde{\alpha}_i}{ds} = \frac{d\beta_i}{ds} \quad \text{per ogni } i = 1, 2, 3.$$

Di conseguenza,

$$\beta(s) = \tilde{\alpha}(s) + a, \quad \text{con } a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Ma $\beta(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$ e quindi $a = 0$. Dunque,

$$\beta(s) = \tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s)), \quad \text{cioè } \alpha(s) \text{ e } \beta(s) \text{ sono congruenti.}$$

• **II caso:** $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$ e $\tau_\beta = -\tau_\alpha$.

Fissato $s_0 \in I$, consideriamo l'isometria F che soddisfa $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ e che trasforma il riferimento di Frenet $(T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0))$ (base ortonormale positiva) nella base ortonormale negativa $(T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), -B_\beta(s_0))$. Tale isometria ha $\text{sign}(F) = -1$ e per la curva $\tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s))$ si ha

$$\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s) \quad \text{e} \quad \tau_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_\alpha(s).$$

Inoltre vale il sistema (A), ad esempio la terza equazione segue da:

$$B_{\tilde{\alpha}}(s_0) = \text{sign}(F) F_* B_\alpha(s_0) = -F_* B_\alpha(s_0) = -(-B_\beta(s_0)) = B_\beta(s_0).$$

Poi, siccome $\tau_\beta(s) = -\tau_\alpha(s)$ e $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_\alpha(s)$, nelle formule (A) e (B) si deve solo sostituire $\tau_\alpha(s)$ con $-\tau_\alpha(s)$. A questo punto, procedendo come nel primo caso, si ottiene che $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ sono congruenti. \square

Corollario 2.60. *Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curve regolari parametrizzate a velocità arbitraria. Allora, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono congruenti se, e solo se,*

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|, \quad \kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t) > 0 \quad \text{e} \quad \tau_\beta(t) = \pm\tau_\alpha(t).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ siano congruenti, ovvero esiste F isometria di \mathbb{R}^3 tale che $\beta(t) = F(\alpha(t))$. Allora,

$$\dot{\beta}(t) = F_* \dot{\alpha}(t) \quad \text{e quindi} \quad \|\dot{\beta}(t)\| = \|F_* \dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\alpha}(t)\|.$$

Inoltre, applicando il Teorema 1.79, si ha

$$\ddot{\beta}(t) = F_* \ddot{\alpha}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{\beta}(t) = F_* \ddot{\alpha}(t).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(t) &= \frac{\|(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(t)\|}{\|\dot{\beta}(t)\|^3} = \frac{\|(F_* \dot{\alpha} \wedge F_* \ddot{\alpha})(t)\|}{\|F_* \dot{\alpha}(t)\|^3} \\ &= \frac{\|\text{sign}(F) F_*(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|}{\|F_* \dot{\alpha}(t)\|^3} = \frac{\|(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} \\ &= \kappa_\alpha(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau_\beta(t) &= \frac{(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta})(t)}{\|(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(t)\|^2} = \frac{(F_*\dot{\alpha} \wedge F_*\ddot{\alpha} \cdot F_*\ddot{\alpha})(t)}{\|(F_*\dot{\alpha} \wedge F_*\ddot{\alpha})(t)\|^2} \\ &= \text{sign}(F) \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha})(t)}{\|(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|^2} = \pm \tau_\alpha(t).\end{aligned}$$

Proviamo ora il viceversa. Consideriamo $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s)) = (\alpha \circ t)(s)$ e $\bar{\beta}(s) = \beta(t(s)) = (\beta \circ t)(s)$, con s ascissa curvilinea. Per ipotesi $\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|$. Ciò implica che α e β hanno la stessa funzione ascissa curvilinea $s = s(t)$ e quindi la stessa funzione inversa $t = t(s)$. Allora, si ha

$$\begin{aligned}\kappa_{\bar{\alpha}}(s) &= \kappa_\alpha(t(s)) = \kappa_\beta(t(s)) = \kappa_{\bar{\beta}}(s) \\ \tau_{\bar{\alpha}}(s) &= \tau_\alpha(t(s)) = \pm \tau_\beta(t(s)) = \pm \tau_{\bar{\beta}}(s).\end{aligned}$$

Pertanto, applicando il Teorema 2.59, esiste una isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(\bar{\alpha}(s)) = \bar{\beta}(s)$, e quindi

$$F(\alpha(t)) = F(\alpha(t(s))) = F(\bar{\alpha}(s)) = \bar{\beta}(s) = \beta(t(s)) = \beta(t). \quad \square$$

Osservazione 2.61. Dalla dimostrazione del teorema fondamentale sulle curve segue che se la torsione $\tau \neq 0$, allora l'isometria F tale che $F(\alpha) = \beta$ è unica. Se la torsione $\tau = 0$, ovvero le curve sono piane, allora in tal caso esistono esattamente due isometrie con la suddetta proprietà.

Esercizio 2.62. Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, $t \in I$, curve regolari parametrizzate a velocità arbitraria, con

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|, \quad \kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t) > 0 \quad \text{e} \quad \tau_\beta(t) = \pm \tau_\alpha(t).$$

Assumiamo che $\tau_\beta(t) = +\tau_\alpha(t)$. Siano A_1 la matrice ortogonale che rappresenta il riferimento di Frenet di α in t_0 , e A_2 la matrice ortogonale che rappresenta il riferimento di Frenet di β in t_0 . Verificare che l'isometria $F = A + a$ tale che $F(\alpha(t)) = \beta(t)$ è definita da

$$A = A_2 A_1^T \quad \text{e} \quad a = \beta(t_0) - A\alpha(t_0).$$

Se si assume $\tau_\beta(t) = -\tau_\alpha(t)$, si può ripetere il discorso prendendo come A_2 la matrice ortogonale che rappresenta $(T_\beta(t_0), N_\beta(t_0), -B_\beta(t_0))$ che è una base ortonormale negativa.

Osservazione 2.63. Un'elica circolare $\gamma(s)$ con curvatura κ_0 e torsione τ_0 è congruente all'elica circolare

$$\gamma_{a,b}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

dove

$$a = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2} > 0 \quad \text{e} \quad b = \frac{\tau_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2} \neq 0.$$

Infatti, $\gamma_{a,b}(s)$ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, e quindi

$$\kappa_{\gamma_{a,b}} = \frac{a}{a^2 + b^2} = \dots = \kappa_0 \quad \text{e} \quad \tau_{\gamma_{a,b}} = \frac{b}{a^2 + b^2} = \dots = \tau_0.$$

Esercizio 2.64. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, si consideri la curva

$$\gamma(t) = (a \cos t, b(\sqrt{2}/2)\sin t, -b(\sqrt{2}/2)\sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinare curvatura e torsione di γ e riconoscere la stessa curva γ .

Suggerimento: Usando le formule della Proposizione 2.21 si trova che la torsione $\tau(t) = 0$ (quindi la curva è piana) e la curvatura

$$\kappa(t) = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}.$$

Quindi, tenendo conto del risultato dell'Esempio 2.27 e del Corollario 2.60, possiamo concludere che γ è una ellisse (del piano $y + z = 0$).

Il Teorema 2.59 è un teorema di unicità per curve regolari con assegnate curvatura e torsione. In effetti vale anche un teorema di esistenza che si può considerare come la seconda parte del Teorema fondamentale.

Teorema 2.65. (Teorema fondamentale sulle curve, seconda parte) Siano date due funzioni differenziabili $\kappa(s), \tau(s) : I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, con la funzione $\kappa(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Allora, esiste una curva regolare $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata con l'ascissa curvilinea che ha la funzione $\kappa(s)$ come curvatura e la funzione $\tau(s)$ come torsione. Tale curva è unica a meno di congruenze.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione consiste di tre parti.

- Consideriamo le formule di Frenet in forma matriciale:

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix},$$

dove $T(s), N(s), B(s)$ sono vettori riga. In forma compatta l'equazione matriciale (2.12) diventa

$$(2.13) \quad X'(s) = A(s)X(s),$$

dove

$$X(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (2.12), equivalentemente (2.13), rappresenta un sistema di nove equazioni differenziali del primo ordine in nove incognite (le componenti della matrice $X(s)$). Fissata una base ortonormale positiva

$$X_0 = (T_0, N_0, B_0) \quad (\text{quindi: } X_0^T X_0 = I \text{ e } \det X_0 = +1)$$

come condizione iniziale, dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie segue che esiste una ed una sola soluzione $X(s) = (T(s), N(s), B(s))$ del sistema (2.13), definita per $s \in I$, tale che

$$X(s_0) = X_0, \quad \text{ossia} \quad T(s_0) = T_0, \quad N(s_0) = N_0, \quad B(s_0) = B_0.$$

• Proviamo ora che la soluzione $X(s) = (T(s), N(s), B(s))$ rappresenta una base ortonormale positiva per ogni s . Derivando $X(s)^T X(s)$, tenendo conto dell'equazione (2.13), si ottiene

$$\begin{aligned} (X(s)^T X(s))' &= X'^T X + X^T X' = (AX)^T X + X^T AX \\ &= X^T A^T X + X^T AX = X^T (A^T + A)X = 0 \end{aligned}$$

in quanto A è antisimmetrica. Pertanto,

$$X^T(s)X(s) = \text{cost} \quad \text{per ogni } s \in I,$$

e quindi

$$X^T(s)X(s) = X^T(s_0)X(s_0) = X_0^T X_0 = I.$$

Dunque $X(s)$ è una matrice ortogonale, ossia $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale. Di conseguenza, abbiamo $\det X(s) = \pm 1$. D'altronde, il determinante $\det X(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua con $\det X(s_0) = +1$, per cui necessariamente $\det X(s) = +1$ per ogni s .

• Infine, proviamo che la curva

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \gamma(s) = \int_{s_0}^s T(s) ds,$$

è regolare, è parametrizzata con l'ascissa curvilinea e ha le funzioni $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ come curvatura e torsione. Intanto tale curva è regolare in quanto

$$\dot{\gamma}(s) = T(s) \neq 0 \quad \text{per ogni } s.$$

Il parametro s è ascissa curvilinea per γ in quanto

$$\|\dot{\gamma}(s)\| = \|T(s)\| = 1.$$

Poi $\ddot{\gamma}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$, con $\kappa(s) > 0$, implica che

$$\kappa(s) \text{ è la curvatura di } \gamma \text{ e } N(s) \text{ è il versore normale.}$$

Siccome $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale positiva, si ha

$$T(s) \wedge N(s) \cdot B(s) = \det X(s) = +1,$$

per cui $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ è il versore binormale. Infine, siccome $B'(s)$ soddisfa (2.12), la torsione è la funzione

$$-B'(s) \cdot N(s) = \tau(s)N(s) \cdot N(s) = \tau(s).$$

L'unicità di $\gamma(s)$, a meno di congruenze, segue dal Teorema 2.59. \square

Osservazione 2.66. Riassumendo, per le curve regolari a velocità unitaria $\gamma(s)$ valgono le seguenti caratterizzazioni:

- $\kappa(s) = 0 \iff \gamma(s)$ è una (parte di) retta;
- $\tau(s) = 0 \iff \gamma(s)$ è una curva piana;
- $\kappa(s) = \text{cost} > 0$ e $\tau(s) = 0 \iff \gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio $R = 1/\kappa$;
- $\kappa(s) = \text{cost} > 0$ e $\tau(s) = \text{cost} \neq 0 \iff \gamma(s)$ è una (parte di) elica circolare;
- $\tau(s)/\kappa(s) = \text{cost} \iff \gamma(s)$ è una (parte di) elica cilindrica.

Osservazione 2.67. Si noti che esistono curve con curvatura $\kappa = \text{cost}$ e torsione τ non costante, e curve con curvatura κ non costante e torsione $\tau = \text{cost}$. Tali curve sono note col nome di *curve di Salkowski* (cf. E. Salkowski, Math. Ann., 1909, (66) 4, 517-557).

Osservazione 2.68. Consideriamo una dilatazione (detta anche omotetia)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (ax, ay, az), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Sia $\gamma(t)$ una curva di Frenet con curvatura $\kappa(t)$ e torsione $\tau(t)$. Allora, la curva $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ è di Frenet con curvatura e torsione date da

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{1}{a}\kappa(t), \quad \tilde{\tau}(t) = \frac{1}{a}\tau(t).$$

Infatti, basta osservare che

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = a\|\dot{\gamma}(t)\|, \quad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \wedge \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\| = a^2\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|$$

e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \wedge \ddot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}(t) = a^3 \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t).$$

In particolare, i tipi di curve classificate nella Osservazione 2.66 sono invarianti per dilatazioni. Ad esempio, se $\gamma(t)$ è una circonferenza di raggio R (ossia, di curvatura $\kappa = 1/R$), la curva $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ è una circonferenza di raggio $\tilde{R} = aR$ (ossia, di curvatura $\tilde{\kappa} = 1/aR$).

Esercizi proposti

1. Esprimere con equazioni cartesiane il cerchio osculatore alla curva

$$\gamma(t) = (1/t, t - 1, t - (1/t)), \quad t > 0,$$

nel punto $p_0 = \gamma(1)$. Inoltre, dire se la curva è piana.

2. Determinare l'apparato di Frenet della curva

$$\gamma(t) = (4t, (4/3)t^3, (2/5)t^5), \quad t > 0.$$

Inoltre, determinare (se esiste) un campo vettoriale unitario parallelo che forma un angolo costante con la curva.

3. Per ogni $\kappa_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\kappa_0 > 0$, costruire una curva regolare $\gamma(t)$ avente curvatura costante κ_0 e torsione costante τ_0 .

4. Verificare che la curva

$$\gamma(t) = (t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t, 2 \cos t, \sqrt{3} t - \operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R},$$

è un'elica circolare. Inoltre, trovare una un'elica circolare del tipo $\gamma_{ab}(t) = (a \operatorname{sen} t, a \cos t, bt)$, $a > 0, b \neq 0$, e un'isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(\gamma_{ab}(t)) = \gamma(t)$.

5. Sia data la curva

$$\gamma(t) = (1 + \cos t + 2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t - \operatorname{sen} t, 3 + 2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la lunghezza dell'arco $\gamma|_{[0, 2\pi]}$.

(b) Determinare curvatura e torsione di $\gamma(t)$ e riconoscere la stessa curva $\gamma(t)$.

6. Sia data la curva $\gamma_a(t) = (3t^2, 1 + 3t, 2at^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori del parametro a la curva γ_a è: (i) piana; (ii) un'elica circolare. Inoltre, posto $a = 1$, trovare l'apparato di Frenet per la curva γ_1 .

7. Sia data la curva $\sigma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. (i) Determinare il riferimento di Frenet di σ nel generico punto $\sigma(t)$. (ii) Determinare curvatura e torsione della curva $\gamma(t) = F(\sigma(t))$, sapendo che F è una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^3 con $\det(F) = -1$.

8. Siano date le curve

$$\sigma_1(t) = (2 \operatorname{sen} t, 1, 3 + 2 \cos t) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1 + 2 \cos t, 1 + 2 \operatorname{sen} t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver verificato che σ_1 e σ_2 sono circonferenze di raggio uguale, trovare una isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(\sigma_1(t)) = \sigma_2(t)$.

9. Siano date le curve

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \operatorname{sen} t - \sqrt{2} t, -\operatorname{sen} t - \sqrt{2} t) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(t) = \sqrt{2}(\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2} t),$$

$t \in \mathbb{R}$.

a) Determinare curvatura e torsione delle due curve $\gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$, e dire (giustificando la risposta) se le stesse curve sono congruenti.

b) Determinare i riferimenti di Frenet di $\gamma(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)$ nei punti $\gamma(0)$ e $\tilde{\gamma}(0)$ rispettivamente.

c) Se la risposta in a) è positiva, indicare un metodo per costruire un'isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.

10. Sia data la curva $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, t + \operatorname{sen} t, -t + \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determinare curvatura e torsione di $\gamma(t)$, e quindi riconoscere la stessa curva $\gamma(t)$.

b) Trovare, se esiste, un campo vettoriale V unitario e parallelo, definito lungo γ , e che forma un angolo costante con la stessa curva γ .

c) Determinare, e riconoscere, la curva $\tilde{\gamma}(t)$ proiezione ortogonale di $\gamma(t)$ sul piano $\pi : y = z$.

11. Sia data la curva $\gamma(t) = (3t^2, 3t + t^3, 3t - t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Determinare curvatura e torsione di $\gamma(t)$ e il riferimento di Frenet nel punto $P_0(3, 4, 2)$. Riconoscere la stessa curva $\gamma(t)$.

12. (continuazione di **11.**) Sia F l'isometria di \mathbb{R}^3 che manda l'origine $O(0, 0, 0)$ nel punto $P_0(1, 1, 1)$, e il cui differenziale F_* trasforma ordinatamente la base canonica e_1, e_2, e_3 nella base ortonormale $v_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Esplicitare l'isometria F e calcolare curvatura e torsione di $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ (senza esplicitare la $\tilde{\gamma}(t)$).

13. Determinare la curva luogo dei centri di curvatura dell'elica circolare

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e individuare il tipo di curva che si ottiene.

14. Sia $X(t) = (t, 1 - t^2, 1 + t^2)$ il campo vettoriale definito lungo l'elica

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, 2t),$$

e sia F la trasformazione lineare di \mathbb{R}^3 definita da

$$F(e_1) = -e_1, F(e_2) = (1/\sqrt{2})e_2 + (1/\sqrt{2})e_3, F(e_3) = -(1/\sqrt{2})e_2 + (1/\sqrt{2})e_3.$$

Osservato che F è una trasformazione ortogonale, determinare $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$, $\tilde{X}(t) = F_*X(t)$, e verificare che

$$F_*X' = \tilde{X}', \quad F_*\ddot{\gamma} = \ddot{\tilde{\gamma}}, \quad X' \cdot \ddot{\gamma} = \tilde{X}' \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}.$$

15. Data una curva differenziabile $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ di \mathbb{R}^3 , provare che una curva $\tilde{\gamma}(t)$ è congruente a $\gamma(t)$ se e solo se $\tilde{\gamma}(t)$ si può scrivere nella forma

$$\tilde{\gamma}(t) = p_0 + x_1(t)v_1 + x_2(t)v_2 + x_3(t)v_3,$$

dove (v_1, v_2, v_3) è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .

16. Verificare che $\gamma_1(t) = (\sqrt{2}t, t^2, 0)$ e $\gamma_2(t) = (-t, t, t^2)$ sono parabole congruenti. Quindi, determinare le (due) isometrie che trasformano la parabola $\gamma_1(t) = (\sqrt{2}t, t^2, 0)$ nella parabola $\gamma_2(t) = (-t, t, t^2)$.

17. Sia $\alpha(t)$ una curva regolare del piano $\pi : x + y - z = 0$ e parametrizzata con velocità scalare $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1/3$. Determinare un'elica cilindrica $\gamma(t)$ parametrizzata a velocità unitaria tale che la curva $\gamma_1(t)$ proiezione ortogonale di γ sul piano per l'origine e ortogonale all'asse di γ sia proprio la curva $\alpha(t)$.

18. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet parametrizzata a velocità scalare unitaria. Verificare che la curva α proiezione ortogonale di γ sul piano osculatore in un fissato punto $p_0 = \gamma(s_0)$, ha curvatura $\kappa_\alpha(s_0) = \kappa_\gamma(s_0)$.

19. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet parametrizzata a velocità scalare unitaria e con torsione $\tau \neq 0$. Verificare che se la curva $\gamma(s)$ è contenuta in una sfera \mathbb{S}^2 , allora curvatura e torsione di γ soddisfano l'equazione

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\left(\frac{1}{\kappa} \right)' \left(\frac{1}{\tau} \right)' \right)' = 0.$$

20. Determinare una curva regolare $\gamma(s)$ di \mathbb{R}^3 , parametrizzata a velocità unitaria, avente curvatura $\kappa(s) = \text{cost.} = +2$ e torsione $\tau = \text{cost.} = -2$.

21. Sia $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ una curva regolare di \mathbb{R}^2 parametrizzata a velocità scalare costante. Verificare che la curva $\gamma(s)$ di \mathbb{R}^3 parametrizzata da

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = s \cos \vartheta,$$

è un'elica cilindrica.

22. Sia \mathcal{C} una curva algebrica piana di equazione $f(x, y) = 0$ e sia $p_0(x_0, y_0)$ un punto semplice di \mathcal{C} , ovvero $(f'_x = f_x(x_0, y_0), f'_y = f_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$. Si assuma, ad esempio, che sia $f'_y \neq 0$. Si determini:

a) una formula che esprima la curvatura di \mathcal{C} in p_0 in termini di derivate parziali di f in p_0 ;

b) la curvatura dell'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 1$ nel punto $p_0(0, 1/3)$ applicando a) e la formula ottenuta nell'Esempio 2.27.

23. Si verifichi che se $\alpha(t)$ è un'elica cilindrica ed F un'isometria di \mathbb{R}^3 , allora anche $\beta(t) = F(\alpha(t))$ è un'elica cilindrica. Inoltre, si verifichi che se $V(t)$ è asse per $\alpha(t)$ con pendenza ϑ , allora $W(t) = F_*V(t)$ è asse per $\beta(t)$ con pendenza $\tilde{\vartheta} = \vartheta$.

24. Sia $\gamma(s)$, s ascissa curvilinea, un'elica circolare con curvatura $\kappa > 0$ e torsione $\tau \neq 0$. Si verifichi che la curva $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + (1/\kappa)N(s)$, dove $N(s)$ è il campo normale principale di $\gamma(s)$, è un'elica circolare con curvatura $\tilde{\kappa} = \kappa$ e torsione $\tilde{\tau} = \kappa^2/\tau$. Inoltre, esprimere le costanti \tilde{a}, \tilde{b} dell'elica $\tilde{\gamma}$ in funzione delle costanti a, b dell'elica γ .

25. Sia $\gamma(t)$ una curva regolare parametrizzata con velocità scalare costante. Si verifichi che: $\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\|/\|\dot{\gamma}(t)\|^2$.

2.8. Curve magnetiche

Scopo di questa sezione è dare una breve introduzione allo studio delle curve magnetiche di \mathbb{R}^3 associate a un campo magnetico, curve che sono in stretta relazione con le eliche cilindriche. Un ruolo fondamentale per la determinazione delle curve magnetiche è svolto dalle formule di Frenet. Per una più approfondita e motivata presentazione dell'argomento, anche dal punto di vista della Fisica, si possono vedere, ad esempio, gli articoli [2],[3], [4], [6], [10] i quali contengono anche i principali risultati esposti in questa e nella successiva sezione.

Iniziamo introducendo velocemente i concetti di r -forma (differenziale) e di *differenziale esterno* su \mathbb{R}^n . Una r -forma (differenziale) ω è una applicazione r -lineare antisimmetrica, ovvero

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)}_{r\text{-volte}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

è r -lineare rispetto alla somma e al prodotto per funzioni differenziabili, e inoltre

$$\alpha(X_1, \dots, X_i \dots X_j \dots, X_r) = -\alpha(X_1, \dots, X_j \dots X_i \dots, X_r)$$

per ogni $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $i \neq j$. In particolare, una r -forma (differenziale) su \mathbb{R}^n , con $r > n$, è necessariamente nulla. L'insieme $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ di tutte le r -forme differenziali ha una struttura naturale di \mathcal{F} -modulo rispetto alle operazioni di somma $\alpha_1 + \alpha_2$ di r -forme, di prodotto $\lambda\omega$ per un numero reale λ , e di prodotto $f\omega$ per un elemento $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Le componenti di una r -forma $\alpha \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$, rispetto alla base canonica (E_i) , sono $\binom{n}{r}$ e sono definite da

$$\alpha_{i_1 \dots i_r} = \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

In particolare, una n -forma ω ha una sola componente

$$\omega_{1 \dots n} = \omega(E_1, \dots, E_n).$$

Notiamo che $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{X}^*(M)$, e quindi il differenziale $df \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (cf. Osservazione 1.51). In particolare, il differenziale sulle funzioni è l'operatore

$$d : \Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto df.$$

Il differenziale sulle funzioni si estende a un operatore sulle r -forme, detto *differenziale esterno*,

$$d : \Lambda^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{r+1}(\mathbb{R}^n),$$

definito per ogni $\alpha \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ dalla formula

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

In particolare, se $\beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$(d\beta)(X, Y) = X\beta(Y) - Y\beta(X) - \beta([X, Y]),$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} (d\beta)(X, Y, Z) &= X\beta(Y, Z) - \beta([X, Y], Z) + Y\beta(Z, X) - \beta([Y, Z], X) \\ &+ Z\beta(X, Y) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned}$$

Una delle proprietà del differenziale esterno è che $d^2 := d \circ d = 0$. Una r -forma (differenziale) α si dice *chiusa* se il suo differenziale esterno $d\alpha = 0$. In particolare, ogni n -forma $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ è chiusa.

Ora consideriamo il caso di \mathbb{R}^3 e sia F una 2-forma differenziale su \mathbb{R}^3 . Le componenti di F rispetto alla base canonica (E_1, E_2, E_3) sono le funzioni

$$\begin{aligned} F_{12} &= F(E_1, E_2) = -F(E_2, E_1), & F_{13} &= F(E_1, E_3) = -F(E_3, E_1), \\ F_{23} &= F(E_2, E_3) = -F(E_3, E_2). \end{aligned}$$

Applicando la (2.14), e tenendo conto che $[E_i, E_j] = 0$, la componente del differenziale dF , che è una 3-forma, è data

$$(dF)(E_1, E_2, E_3) = E_1(F_{23}) - E_2(F_{13}) + E_3(F_{12}).$$

Quindi, la 2-forma F è chiusa se e solo se

$$(2.15) \quad E_1(F_{23}) - E_2(F_{13}) + E_3(F_{12}) = 0.$$

Dato un campo vettoriale $V = (V^1, V^2, V^3) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, ricordiamo che la sua divergenza è definita dalla (1.6), e quindi

$$\operatorname{div}V = E_1(V^1) + E_2(V^2) + E_3(V^3).$$

Pertanto, V ha divergenza nulla se e solo se

$$(2.16) \quad E_1(V^1) + E_2(V^2) + E_3(V^3) = 0.$$

A un fissato campo vettoriale $V = (V^1, V^2, V^3) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ si può associare la 2-forma $F \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ definita da

$$F(X, Y) := V \wedge X \cdot Y = \operatorname{vol}(V, X, Y).$$

Dalla definizione di F si ha

$$F_{12} = V^3, \quad F_{13} = -V^2, \quad F_{23} = V^1.$$

Se V ha $\operatorname{div}V = 0$, le componenti F_{ij} soddisfano la (2.15) e quindi F è una 2-forma chiusa. Viceversa, data una 2-forma chiusa F , il campo vettoriale V di componenti

$$V^1 = F_{23}, \quad V^2 = -F_{13}, \quad V^3 = F_{12},$$

soddisfa la (2.16) e quindi ha divergenza nulla. Pertanto, vale la seguente

Proposizione 2.69. *Su \mathbb{R}^3 assegnare un campo vettoriale V con divergenza nulla è equivalente ad assegnare una 2-forma chiusa F .*

Definizione 2.70. *Un campo vettoriale differenziabile $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ si dice che è un **campo magnetico** se la sua divergenza $\operatorname{div}V = 0$. Equivalentemente, un campo magnetico è definito da una 2-forma chiusa $F \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ (ossia, $dF = 0$).*

A un campo magnetico V , equivalentemente a una 2-forma chiusa F , si può associare l'endomorfismo antisimmetrico

$$\Phi(X) := V \wedge X$$

detto **forza di Lorentz**, equivalentemente Φ è definito da

$$\Phi(X) \cdot Y = F(X, Y) \quad (= V \wedge X \cdot Y = \operatorname{vol}(V, X, Y)).$$

Si noti che Φ è metricamente equivalente alla 2-forma F .

Definizione 2.71. *Una curva differenziabile regolare $\gamma(t)$ si dice **curva magnetica**, associata a un campo magnetico V , se soddisfa l'**equazione di Lorentz***

$$(2.17) \quad \ddot{\gamma}(t) = V(t) \wedge \dot{\gamma}(t).$$

Quindi, un campo magnetico V genera un flusso magnetico le cui traiettorie sono curve magnetiche. Usando l'endomorfismo antisimmetrico associato a una fissata 2-forma chiusa F , l'equazione di Lorentz (2.17) si può esprimere nella forma

$$\ddot{\gamma}(t) = \Phi(\dot{\gamma}(t)).$$

Con questo approccio l'equazione di Lorentz si può considerare in una situazione geometrica più generale in cui lo spazio ambiente è una varietà riemanniana (cf., ad esempio, [2], [4], [6], [10]). In particolare, su una varietà riemanniana orientabile 3-dimensionale con una fissata forma di volume Ω , c'è una corrispondenza biunivoca (così come osservato per \mathbb{R}^3) tra campi vettoriali con divergenza nulla e 2-forme chiuse. Inoltre, per una varietà riemanniana orientabile 3-dimensionale con una fissata forma di volume Ω , è possibile definire un prodotto vettoriale.

La seguente osservazione giustifica, dal punto di vista della Fisica, la definizione data di curva magnetica.

Osservazione 2.72. Il classico problema di Landau-Hall studia il moto di una particella carica in presenza di un campo magnetico statico W . Una particella di carica e , massa m e velocità $v(t)$, in presenza di un campo magnetico W , assumendo il campo elettrico nullo, soddisfa la legge di Lorentz

$$(2.18) \quad P' = \frac{e}{c} v \wedge W,$$

dove c denota la velocità della luce, $P'(t)$ è la forza magnetica sulla particella, $P(t) = (\varepsilon/c^2)v(t)$ indica il momento della particella, ed

$$\varepsilon = mc^2(1 - (\|v\|^2/c^2))^{-1/2}$$

è la sua energia (cf. [2]). Dalla (2.18) segue che

$$(1/2)(P \cdot P)' = P' \cdot P = \frac{e}{c} v \wedge W \cdot P = \frac{e}{c} v \wedge W \cdot (\varepsilon/c^2)v = 0,$$

da cui si ha che $\|P\|$ è costante, e quindi anche ε e $\|v\|$ sono costanti. In particolare, siccome $P(t) = (\varepsilon/c^2)v(t)$ con ε costante, l'equazione di Lorentz (2.18) diventa

$$(2.19) \quad v' = qW \wedge v,$$

dove $q := -(ec)/\varepsilon$ è una costante. Se il moto della particella è descritto dalla curva $\gamma(t)$, posto $V(t) = qW(\gamma(t))$, l'equazione (2.19) si può scrivere nella forma

$$\ddot{\gamma}(t) = V(t) \wedge \dot{\gamma}(t).$$

Dalla (2.17) segue che il concetto di curva magnetica generalizza quello di retta, o più in generale quello di curva geodetica (nel caso delle varietà riemanniane), traiettoria descritta da una particella in assenza di campo magnetico. Facciamo ora alcune considerazioni su analogie e differenze tra rette (pensate come curve che soddisfano $\ddot{\gamma} = 0$) e curve magnetiche.

• La forza di Lorentz è un endomorfismo antisimmetrico, e ciò implica che una curva magnetica ha (come per le rette) velocità scalare costante. Infatti, Φ antisimmetrico implica $\Phi(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$, ovvero $\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$, e quindi

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

implica che $\|\dot{\gamma}(t)\|$ è una costante. Curve magnetiche parametrizzate a velocità unitaria si dicono **curve magnetiche normali**.

• Fissato $p \in \mathbb{R}^3$ e $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$, la retta $\gamma(t) = tv + p$ è l'unica retta che soddisfa le condizioni $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v_p$. Anche per le curve magnetiche vale un analogo risultato di esistenza e unicità. Infatti, posto $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $V(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t))$, l'equazione di Lorentz (2.17) corrisponde al sistema di equazioni differenziali

$$(2.20) \quad x'' = z'V^2 - y'V^3, \quad y'' = x'V^3 - z'V^1, \quad z'' = y'V^1 - x'V^2.$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali, si ha l'esistenza e l'unicità della curva magnetica con le fissate condizioni iniziali $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v_p$.

• A differenza delle rette, assegnato un campo magnetico V , una curva magnetica $\gamma(t)$ associata a V non si può riscalarare, essa dipende dalla velocità scalare $\|\dot{\gamma}(t)\|$, e quindi dalla sua energia $E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$. Infatti, posto $t = cs$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, e $\beta(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(cs)$, si ha $\dot{\beta}(s) = c\dot{\gamma}(t) = c\dot{\gamma}(t(s))$ e

$$\ddot{\beta}(s) = c^2\ddot{\gamma}(t) = c^2\Phi(\dot{\gamma}(t)) = c\Phi(\dot{\beta}(s)).$$

In questa Sezione studiamo curve magnetiche normali dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet (quindi parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura $\kappa(s) > 0$) e sia V un campo magnetico. Indichiamo con $\{T, N, B\}$ il riferimento di Frenet lungo γ . Il seguente teorema ci dice quando una curva di Frenet appartiene al flusso magnetico di V .

Teorema 2.73. *Una curva di Frenet $\gamma(s)$ è una curva magnetica associata al campo magnetico V se, e solo se, il campo magnetico V si può esprimere lungo γ nel modo seguente*

$$(2.21) \quad V(s) = \omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s), \quad \forall s \in I,$$

dove la funzione $\omega(s) := V(s) \cdot \dot{\gamma}(s)$ è nota in letteratura col nome di **quasi-slope** (cf.[4]). Quindi, $V(s)$ si trova nel piano rettificante di ogni curva magnetica $\gamma(s)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia V un campo magnetico e sia $\gamma(s)$ una curva magnetica associata a V . Posto $V(s) = V(\gamma(s))$, si può scrivere

$$V(s) = \omega(s)T(s) + (V(s) \cdot N(s))N(s) + (V(s) \cdot B(s))B(s).$$

Dall'equazione di Lorentz $T'(s) = V(s) \wedge T(s)$, usando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\kappa(s)N(s) = V(s) \wedge T(s),$$

e quindi

$$0 = V(s) \wedge T(s) \cdot V(s) = \kappa(s)N(s) \cdot V(s), \quad \kappa(s) > 0,$$

implica $N(s) \cdot V(s) = 0$. Inoltre,

$$\kappa(s)N(s) \cdot N(s) = V(s) \wedge T(s) \cdot N(s) = T(s) \wedge N(s) \cdot V(s) = B(s) \cdot V(s).$$

Pertanto, vale la (2.21).

Viceversa, supponiamo che il campo magnetico V soddisfi la (2.21). Allora, usando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\begin{aligned} V(s) \wedge \dot{\gamma}(s) &= V(s) \wedge T(s) = (\omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) \wedge T(s) \\ &= \kappa(s)B(s) \wedge T(s) = \kappa(s)N(s) \\ &= T'(s) = \ddot{\gamma}(s), \end{aligned}$$

ossia l'equazione di Lorentz. Pertanto, $\gamma(s)$ è una curva magnetica (normale). \square

Esercizio 2.74. Sia $\gamma(s)$ una curva di Frenet magnetica rispetto a V , e sia Φ la forza di Lorentz definita da V . Si verifichi che il riferimento di Frenet (T, N, B) soddisfa

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \kappa(s)N(s) \\ \Phi(N) &= -\kappa(s)T(s) + \omega(s)B(s) \\ \Phi(B) &= -\omega(s)N(s). \end{aligned}$$

Suggerimento: usare la (2.21), la prima formula di Frenet e tenere conto che $T \wedge N = B$, $B \wedge N = -T$, $T \wedge B = -N$.

Corollario 2.75. *Una curva di Frenet $\gamma(s)$ è un'elica circolare se, e solo se, $\gamma(s)$ è una curva magnetica rispetto a un campo vettoriale V parallelo (ovvero, le componenti di V sono costanti).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(s)$ un'elica circolare di asse V_0 . Sia ϑ la pendenza di $\gamma(s)$ e sia κ_1 la curvatura della circonferenza $\gamma_1(s)$ proiezione ortogonale di $\gamma(s)$ su un piano ortogonale a V_0 . Per il Teorema 2.44, l'elica circolare γ ha curvatura $\kappa = \kappa_1 \sin^2 \vartheta$ e torsione $\tau = \kappa_1 \sin \vartheta \cos \vartheta$. Allora, $V = \kappa_1 \sin \vartheta V_0$ ha componenti costanti, e applicando la Proposizione 2.41 si ottiene

$$\begin{aligned} V(s) &= \kappa_1 \sin \vartheta V_0(s) = \kappa_1 \sin \vartheta (\cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s)), \\ &= (\kappa_1 \sin \vartheta \cos \vartheta) T(s) + \kappa B(s) \\ &= \tau T(s) + \kappa B(s). \end{aligned}$$

Quindi $V(s)$ è il campo vettoriale di Darboux $D(s)$ (cf. Sezione 2.6). Dal Teorema 2.73 segue che $\gamma(s)$ è una curva magnetica rispetto a V . Viceversa, se $\gamma(s)$ è una curva (di Frenet) magnetica rispetto a un campo vettoriale V parallelo, allora come conseguenza del Teorema 2.59, e delle formule di Frenet, si ha che $\gamma(s)$ è un'elica circolare. Infatti, derivando la (2.21) si ha

$$0 = V' = \omega' T + \kappa' B + \omega T' + \kappa B' = \omega' T + \kappa' B + (\omega \kappa - \kappa \tau) N$$

e quindi $\kappa' = \omega' = 0$ e $\omega \kappa - \kappa \tau = 0$. Pertanto κ e τ sono delle costanti, e quindi $\gamma(s)$ è un'elica circolare. \square

Più in generale, per le eliche cilindriche abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.76. *Una curva di Lancret $\gamma(s)$ ha la proprietà di essere una curva magnetica rispetto a un campo magnetico V parallelo all'asse V_0 di γ mediante un potenziale che dipende dalla curvatura $\kappa_1(s)$ della curva $\gamma_1(s)$ proiezione ortogonale di γ su un piano ortogonale all'asse:*

$$V(s) = \kappa_1(s)\text{sen } \vartheta V_0 = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s).$$

Quindi, $V(s)$ coincide con il campo vettoriale di Darboux $D(s)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(s)$ un'elica cilindrica con asse V_0 . Senza perdere in generalità, possiamo assumere $V_0 = E_3$ (basta applicare una opportuna isometria). Consideriamo il campo vettoriale

$$V = f(x, y)V_0 = f(x, y)E_3 = (0, 0, f(x, y)),$$

dove $f(x, y)$ è una funzione differenziabile in x, y . Il campo vettoriale V è un campo magnetico in quanto

$$\text{div}V = \sum_{i=1}^3 E_i(V^i) = \partial_z f = 0.$$

Siccome $\gamma(s)$ è un'elica cilindrica vale la (2.8), ossia

$$V_0(s) = \cos \vartheta T(s) + \text{sen } \vartheta B(s).$$

Allora, $V(s) = f(x(s), y(s))V_0 = f(\gamma_1(s))V_0$ dove $\gamma_1(s) = (x(s), y(s), 0)$ è la proiezione ortogonale di $\gamma(s)$ sul piano $z = 0$ ortogonale a $E_3 = V_0$. Quindi,

$$V(s) = f(\gamma_1(s))\cos \vartheta T(s) + f(\gamma_1(s))\text{sen } \vartheta B(s).$$

Applicando il Teorema 2.73, la curva $\gamma(s)$ è una curva magnetica per V se e solo se $f(\gamma_1(s))\text{sen } \vartheta = \kappa(s)$. D'altronde, per il Teorema 2.44, $(\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s) = \kappa(s)$. Pertanto, $\gamma(s)$ è una curva magnetica per V se e solo se è soddisfatta la condizione

$$f(\gamma_1(s)) = (\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s).$$

Per cui, prendendo $f(x, y)$ in modo tale che sia $f(\gamma_1(s)) = (\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s)$, si ha che $\gamma(s)$ è una curva magnetica. Ad esempio, si può prendere una funzione $f(x, y)$ in modo tale che $z = f(x, y)$ definisca una superficie regolare contenente la curva regolare $(x(s), y(s), \text{sen } \vartheta\kappa_1(s))$. In tal caso, $V(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$ e quindi $V(s)$ è il campo vettoriale di Darboux $D(s)$. \square

2.9. Curve magnetiche di Killing

I campi vettoriali di Killing sono i più importanti campi vettoriali in geometria euclidea (e più in generale in geometria riemanniana). Essi generano gruppi a un parametro di isometrie, e giocano un ruolo fondamentale in diversi contesti geometrici.

Nel caso dello spazio Euclideo, un campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ è di **Killing** se soddisfa l'equazione di Killing

$$(\bar{\nabla}_X V) \cdot Y + (\bar{\nabla}_Y V) \cdot X = 0$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, dove $\bar{\nabla}$ è la derivata covariante euclidea definita dalla (1.4). Equivalentemente, V è di Killing se e solo se

$$(2.22) \quad (\bar{\nabla}_{E_i} V) \cdot E_j + (\bar{\nabla}_{E_j} V) \cdot E_i = 0, \quad \text{ossia } E_i(V^j) + E_j(V^i) = 0,$$

per ogni $i, j = 1, 2, 3$. Si noti che un campo vettoriale parallelo (cf. Esercizio 1.43) è di Killing. Inoltre, ogni campo vettoriale di Killing ha divergenza nulla e quindi definisce un campo magnetico.

Sia quindi $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ di Killing e sia $\gamma(s)$ è una curva magnetica associata a V . In questo caso, la funzione $\omega(s) = T(s) \cdot V(s)$ della formula (2.21) è costante. Infatti, siccome V è di Killing si ha $(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(s)} V) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$, cioè $V'(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$. Inoltre, dall'equazione di Lorentz segue

$$V(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = V(s) \cdot \Phi(\dot{\gamma}(s)) = V \cdot (V \wedge \dot{\gamma}) = 0,$$

e quindi

$$\omega'(s) = V'(s) \cdot \dot{\gamma}(s) + V(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = 0.$$

I campi vettoriali di Killing su \mathbb{R}^3 sono campi vettoriali del tipo (cf., ad esempio, [21] p.270)

$$X = V + v, \quad \text{ossia } X_p = V_p + v_p,$$

dove v varia in \mathbb{R}^3 e V è del tipo

$$V = \left(\sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \right) E_1 + \left(\sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \right) E_2 + \left(\sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j \right) E_3$$

e $A = (a_{ij})$ è una matrice antisimmetrica di ordine 3. Siccome \mathbb{R}^3 e lo spazio delle matrici antisimmetriche hanno entrambi dimensione 3, lo spazio $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ dei campi vettoriali di Killing su \mathbb{R}^3 avrà dimensione 6. Chiaramente una base per $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ è data da

$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

$$V_1 = z\partial_y - y\partial_z, \quad V_2 = z\partial_x - x\partial_z, \quad V_3 = -y\partial_x + x\partial_y,$$

dove V_1, V_2, V_3 sono rappresentati rispettivamente dalle matrici antisimmetriche

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo a un parametro di isometrie generato da $E_1 = \partial_x$ è costituito da trasformazioni di \mathbb{R}^3 del tipo $\Phi_t : p = (x, y, z) \mapsto (x + t, y, z)$ (traslazioni parallele all'asse x). Il gruppo a un parametro di isometrie generato da $V_1 = z\partial_y - y\partial_z$, è costituito da trasformazioni di \mathbb{R}^3 del tipo $\Phi_t : p = (x, y, z) \mapsto (x, y \cos t + z \sin t, -y \sin t + z \cos t)$ (rotazioni intorno all'asse x).

Esempio 2.77. Consideriamo il campo vettoriale di Killing

$$V = aE_3 = a\partial_z, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

La forza di Lorentz determinata da V soddisfa

$$\Phi E_1 = aE_3 \wedge E_1 = aE_2, \quad \Phi E_2 = aE_3 \wedge E_2 = -aE_1, \quad \Phi E_3 = aE_3 \wedge E_3 = 0.$$

Quindi, per $X = (X^1, X^2, X^3)$ si ha $\Phi X = (-aX^2, aX^1, 0)$. In particolare, per una curva regolare $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ a velocità unitaria, si ha

$$\Phi \dot{\gamma}(s) = (-ay'(s), ax'(s), 0).$$

Pertanto, in questo caso il sistema di equazioni differenziali (2.20), che traduce l'equazione di Lorentz $\ddot{\gamma}(s) = \Phi \dot{\gamma}(s)$, diventa

$$(2.23) \quad x''(s) = -ay'(s), \quad y''(s) = ax'(s), \quad z''(s) = 0.$$

Risolvendo il sistema (2.23), con le condizioni iniziali date da

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) \text{ e } \dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0),$$

si trova

$$\begin{cases} x(s) &= (u_0/a)\text{sen}(as) + (v_0/a)\text{cos}(as) + x_0 - (v_0/a), \\ y(s) &= -(u_0/a)\text{cos}(as) + (v_0/a)\text{sen}(as) + y_0 + (u_0/a), \\ z(s) &= w_0s + z_0. \end{cases}$$

Siccome, $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$, dalla (2.23) si ha

$$\|\ddot{\gamma}(s)\|^2 = a^2 ((y')^2 + (x')^2)(s) = a^2 (\|\dot{\gamma}(s)\|^2 - z'^2(s)) = a^2(1 - w_0^2),$$

e quindi la curvatura

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = |a|\sqrt{1 - w_0^2} \text{ (costante)}.$$

Ora assumiamo che $w_0 \neq \pm 1$, ossia la curvatura $\kappa > 0$. In questo caso la curva è di Frenet, e siccome

$$\dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s) = w_0) \text{ e } \ddot{\gamma}(s) = a(-y'(s), x'(s), 0),$$

si ha

$$\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = a(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2) \text{ e } \|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\|^2 = a^2(1 - w_0^2) = \kappa^2.$$

Quindi,

$$B(s) = (1/\kappa)\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = (a/\kappa)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2)$$

e

$$\begin{aligned} B'(s) &= (a/\kappa)(-w_0x'', -w_0y'', 0) = -(aw_0/\kappa)(x'', y'', 0) \\ &= -(aw_0/\kappa)\ddot{\gamma}(s) = -aw_0N(s), \end{aligned}$$

da cui segue che la torsione è data da

$$\tau(s) = aw_0 \text{ (costante)}.$$

Pertanto, si hanno i seguenti casi determinati dalla condizione iniziale $z'(0) = w_0$.

- $w_0 = \pm 1$, ossia la curvatura è identicamente nulla. In questo caso, la curva magnetica è una (parte di) retta.
- $w_0 = 0$. In questo caso la curva magnetica è piana con curvatura costante $\kappa(s) = |a| > 0$, e quindi $\gamma(s)$ è una (parte di) circonferenza.
- $w_0 \neq 0, \pm 1$. In questo caso curvatura e torsione sono costanti non nulle, per cui la curva magnetica è un'elica circolare di asse E_3 .

Analogo discorso vale prendendo $V = aE_1$ e $V = aE_2$. Per esempi di curve magnetiche relative ad altri campi vettoriali di Killing su \mathbb{R}^3 si può vedere [10].

Esempio 2.78. Consideriamo un campo vettoriale V parallelo a una fissata direzione V_0 (campo vettoriale costante). Senza perdere in generalità, possiamo assumere $V_0 = E_3$ e quindi $V = fE_3 = f\partial_z$, con $f(x, y, z)$ funzione differenziabile. Dalla (2.22) segue che il campo vettoriale V è di Killing se e solo se

$$\begin{aligned} E_1(V^3) &= -E_3(V^1) = 0, \quad i.e., \quad \partial_x f = 0; \\ E_2(V^3) &= -E_3(V^2) = 0, \quad i.e., \quad \partial_y f = 0; \\ E_3(V^3) &= 0, \quad i.e., \quad \partial_z f = 0. \end{aligned}$$

Dunque, V è di Killing se e solo se la funzione f è costante. Dalla definizione di divergenza segue che il campo vettoriale V è un campo magnetico se e solo se $\partial_z f = 0$. Consideriamo quindi il campo vettoriale magnetico $V = f(x, y)\partial_z$, $f(x, y) \neq 0$ per ogni (x, y) . Procedendo come nell'esempio precedente, la forza di Lorentz determinata da V soddisfa

$$\Phi E_1 = fE_3 \wedge E_1 = fE_2, \quad \Phi E_2 = fE_3 \wedge E_2 = -fE_1, \quad \Phi E_3 = fE_3 \wedge E_3 = 0.$$

Quindi, per una curva regolare $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ a velocità unitaria si ha

$$\Phi \dot{\gamma}(s) = f(s)(-y'(s), x'(s), 0),$$

dove si è posto $f(s) = f(x(s), y(s))$. Pertanto, l'equazione di Lorentz

$$\ddot{\gamma}(s) = \Phi \dot{\gamma}(s)$$

è equivalente al sistema di equazioni differenziali

$$(2.24) \quad x''(s) = -f(s)y'(s), \quad y''(s) = f(s)x'(s), \quad z''(s) = 0.$$

Sia $\gamma(s)$ la curva magnetica definita dalle condizioni iniziali $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0)$. Procedendo come nel caso dell'Esempio precedente, dalla (2.24) si trova

$$\|\ddot{\gamma}(s)\|^2 = f(s)^2 ((y')^2 + (x')^2)(s) = f(s)^2(1 - w_0^2),$$

e quindi la curvatura

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = |f(s)|\sqrt{1 - w_0^2}.$$

La funzione

$$\omega(s) = T(s) \cdot V(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot f(s)E_3 = f(s)z'(s) = f(s)w_0.$$

Inoltre,

$$\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = f(s)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2)$$

e

$$\|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\|^2 = f^2(s)(1 - w_0^2) = \kappa^2(s).$$

Assumiamo che $w_0 \neq \pm 1$, ossia la curvatura $\kappa > 0$. In questo caso la curva è di Frenet e

$$B(s) = (1/\kappa)\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = (f(s)/\kappa)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2).$$

Siccome $f(s)/\kappa(s) = \pm 1/\sqrt{(1 - w_0^2)}$ è costante,

$$\begin{aligned} B'(s) &= (f/\kappa)(-w_0x'', -w_0y'', 0) = -(fw_0/\kappa)(x'', y'', 0) \\ &= -(fw_0/\kappa)\ddot{\gamma}(s) = -fw_0N(s) \end{aligned}$$

da cui segue che la torsione è data da

$$\tau(s) = f(s)w_0 = \omega(s).$$

Pertanto, abbiamo

$$V(s) = \omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

e $V(s)$ è il campo vettoriale di Darboux.

Si hanno quindi i seguenti casi:

- $w_0 = \pm 1$. In questo caso la curvatura è identicamente nulla per cui la curva magnetica è una (parte di) retta indipendentemente dalla funzione f .
- $w_0 = 0$. In questo caso la curva magnetica è una curva piana con curvatura $\kappa(s) = |f(s)|$ (intensità del campo magnetico).
- $w_0 \neq \pm 1, 0$. In questo caso, curvatura e torsione sono funzioni non nulle

e

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm \frac{w_0}{\sqrt{(1 - w_0^2)}} = \text{cost} \neq 0.$$

Pertanto, la curva magnetica è un'elica cilindrica. In particolare, la curva magnetica è un'elica circolare se la curvatura (equivalentemente, la torsione) è costante. In questo caso, la curva magnetica è in generale un'elica cilindrica, e dalle espressioni di τ e κ segue che: *il campo magnetico $V = f(x, y)E_3$ è di Killing se e solo se il flusso magnetico è costituito da eliche circolari di curvatura κ_0 e torsione τ_0* . Infatti, se V è di Killing allora $V = aE_3$ e per quanto visto nell'esempio precedente la curva magnetica è un'elica circolare. Viceversa, se il flusso magnetico è costituito da eliche circolari di curvatura κ_0 e torsione τ_0 , dalle formule di prima segue che la funzione $f(s) = \tau/w_0$ è costante lungo ogni traiettoria del flusso magnetico, per cui f è costante e V è di Killing.