CAPITOLO 1

Calcolo differenziale nello spazio euclideo

In questo capitolo presentiamo alcuni concetti del calcolo differenziale nello spazio euclideo che ci saranno utili per i capitoli successivi.

1.1. Curve parametrizzate regolari

Prima di iniziare con le curve parametrizzate, ricordiamo brevemente la definizione di funzione differenziabile e quella di spazio tangente a $\mathbb{R}^n$.

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ p = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto F(p) = F(x_1, \ldots, x_n),$$

si dice *differenziabile* di classe C^k se F ammette derivate parziali continue fino all'ordine k, e quindi si dice di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ p = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto F(p) = \big(F_1(p), \ldots, F_m(p)\big),$$

una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con π_i la *proiezione*

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ p = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \pi_i(p) = x_i.$$

La funzione F si dice differenziabile di classe C^k se lo sono le sue funzioni componenti

$$F_i = \pi_i \circ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto F_i(p) = \pi_i \circ F(p), \quad \text{per ogni } i = 1, ..., m.$$

Tuttavia, nel seguito con il termine "differenziabile" si intenderà sempre "differenziabile di classe C^∞".

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la struttura naturale di spazio vettoriale reale euclideo. È noto che

$$\big\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\big\}$$

è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Fissato $p \in \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$\{p\} \times \mathbb{R}^n = \{v_p = (p, v)\ :\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

si indica con $T_p\mathbb{R}^n$ e si dice *spazio dei vettori tangenti in p a $\mathbb{R}^n$* (o *spazio tangente in p a $\mathbb{R}^n$*). Ogni elemento $v_p = (p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$ si dice *vettore tangente* in p a $\mathbb{R}^n$ o *vettore applicato in p*. $T_p\mathbb{R}^n$ ha una struttura di spazio vettoriale reale n-dimensionale rispetto alle seguenti operazioni:

$$v_p + w_p := (p, v + w),\ \ \lambda v_p := (p, \lambda v).$$

La corrispondenza $\phi : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ v_p \longmapsto \phi(v_p) = v$, è un isomorfismo tra spazi vettoriali (a volte un vettore tangente si identifica con la sua parte vettoriale). La base canonica di $T_p\mathbb{R}^n$ è

$$\{e_{1_p} = (p, e_1), \ldots, e_{n_p} = (p, e_n)\}.$$

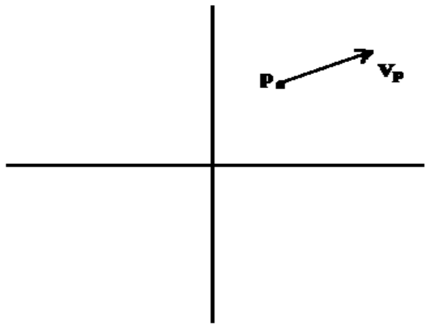

FIGURA 1. Vettore tangente.

$T_p\,\mathbb{R}^n$ è anche uno spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare:

$$v_p \cdot w_p := v \cdot w \quad \text{ per ogni } v_p, w_p \in T_p\,\mathbb{R}^n,$$

dove

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

è il prodotto scalare euclideo naturale di $\mathbb{R}^n$. Si pone quindi

$$\|v_p\| := \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Nel seguito con I indicheremo sempre, salvo diversa indicazione, un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1. *Una curva differenziabile parametrizzata di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione differenziabile*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \;\; t \mapsto \alpha(t) = \big(x_1(t), ..., x_n(t)\big).$$

Quindi, la curva $\alpha(t)$ è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti $x_1(t), ..., x_n(t)$ sono differenziabili. La variabile t si dice *parametro* e il sottoinsieme $\alpha(I)$ si dice *sostegno* della curva. Se il sostegno $\alpha(I)$ è contenuto in un piano, allora α si dice *curva piana*. Nel caso di $\mathbb{R}^3$, le coordinate verranno indicate anche con (x, y, z).

Definizione 1.2. *Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \alpha(t)$, una curva differenziabile parametrizzata. Il vettore velocità di α in $\alpha(t_0)$ è il vettore $\dot\alpha(t_0)$ che ha come componenti le derivate delle componenti di α calcolate in t_0:*

$$\dot\alpha(t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i'(t_0)(e_i)_{\alpha(t_0)} = (x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0))_{\alpha(t_0)} \in T_{\alpha(t_0)}\,\mathbb{R}^n.$$

Si noti che, a volte, il vettore tangente $\dot\alpha(t_0)$ verrà indicato anche con la n-pla $(x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0))$ omettendo il punto di applicazione $\alpha(t_0)$.

Definizione 1.3. *Una curva parametrizzata differenziabile $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ si dice* regolare *se il vettore velocità $\dot\alpha(t)$ è non nullo per ogni $t \in I$.*

Ricordiamo che per una curva parametrizzata differenziabile $\alpha(t)$ dello spazio $\mathbb{R}^n$, la *retta tangente* ad α nel punto $\alpha(t_0)$ è la posizione limite (se esiste) della corda $\big(\alpha(t_0), \alpha(t)\big)$ per $t \to t_0$ (cf. Figura 2). La corda $\big(\alpha(t_0), \alpha(t)\big)$ ha equazioni

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x_1(t) - x_1(t_0)} = \ldots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x_n(t) - x_n(t_0)}.$$

Dividendo i denominatori per $(t - t_0)$ e facendo il limite per $t \to t_0$, si ottiene

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x_1'(t_0)} = \ldots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x_n'(t_0)}.$$

Tali equazioni rappresentano una retta se

$$\big(x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)\big) \neq (0, \ldots, 0).$$

Pertanto, una curva parametrizzata differenziabile $\alpha(t)$ di $\mathbb{R}^n$ è regolare se e solo se esiste la retta tangente in ogni suo punto.

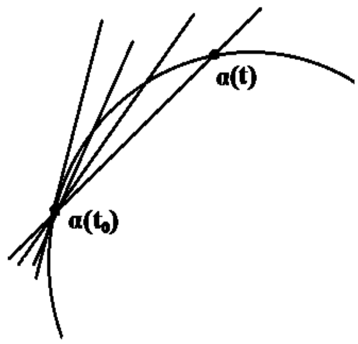

FIGURA 2. Retta tangente.

Esempio 1.4. La **retta**. Siano $p, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. La retta per p e parallela a v, è la curva regolare

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \alpha(t) = p + tv = \big(p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n\big).$$

In particolare vale la seguente proprietà: *ogni vettore $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ si puó esprimere come vettore tangente a una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$ passante per p.* Ad esempio, la curva $\alpha(t) = p + tv$ soddisfa $\alpha(0) = 0$ e $\dot\alpha(0) = v_p$.

Esempi 1.5.

(1) L'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^3, t^2, 0)$, è una curva differenziabile parametrizzata di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che α non è regolare per $t = 0$ in quanto $\dot\alpha(0) = 0$.

(2) L'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t, |t|, 0)$, è una curva parametrizzata ma non è differenziabile per $t = 0$.

(3) L'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4, 0)$, è una curva parametrizzata differenziabile, inoltre è regolare. Osserviamo che α non è iniettiva in quanto $\alpha(2) = 0 = \alpha(-2)$.

Esempio 1.6. La **circonferenza** $\mathbb{S}^1$. Le curve parametrizzate

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$
$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \beta(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0),$$

sono distinte, ma hanno lo stesso sostegno in quanto $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$, dove $\mathbb{S}^1$ è la circonferenza di centro O e raggio 1 del piano $z = 0$. La circonferenza (sempre del piano $z = 0$) di centro $C(x_0, y_0, 0)$ e raggio r si può parametrizzare con $\gamma(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\operatorname{sen} t, 0)$. $\dot\gamma(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t, 0)$, e quindi $\gamma(t)$ è una parametrizzazione regolare di tale circonferenza.

Esempio 1.7. **Ellisse, iperbole e parabola**. Per l'ellisse di equazione cartesiana $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$, una sua parametrizzazione regolare è data da

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

I due rami dell'iperbole di equazione cartesiana $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$, sono parametrizzate in modo regolare da

$$\alpha_1(t) = (a\cosh t, b\sinh t, 0), \quad \alpha_2(t) = (-a\cosh t, b\sinh t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che le funzioni **coseno iperbolico** e **seno iperbolico** sono definite da

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \text{ e soddisfano } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Infine, una parametrizzazione regolare della parabola $y = ax^2$, $a \neq 0$, è data da

$$\alpha(t) = (t, at^2, 0).$$

Il caso della parabola è un caso particolare di *grafici di funzioni in una variabile*. Infatti, il grafico di una funzione differenziabile $y = f(x)$ si può parametrizzare con $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$. Tale parametrizzazione è regolare in quanto

$$\dot\alpha(t) = (1, f'(t), 0) \neq (0, 0, 0).$$

Esempio 1.8. **Curve di livello**. Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile definita in $\mathbb{R}^2$. L'insieme dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, si dice curva di livello. Possiamo sempre assumere che la costante $c = 0$ (basta sostituire f con $f - c$) e quindi considerare la curva definita dall'equazione cartesiana

$$f(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

In particolare, se $f(x, y)$ è un polinomio algebrico, nelle variabile x e y, di grado n, allora la curva definita dall'equazione (1.1) si dice *curva algebrica di ordine* n. Si consideri una curva γ del piano $z = 0$, definita dall'equazione cartesiana (1.1). Dal Teorema del Dini segue che se una delle due derivate parziali di f, ad esempio f_y, è diversa da zero in un punto (x_0, y_0) di γ, allora esiste una funzione differenziabile $g(x)$, definita in un intorno di x_0, tale che (in un intorno del punto (x_0, y_0)) l'equazione $f(x, y) = 0$ è verificata se e solo se $y = g(x)$. Pertanto, in un intorno del punto (x_0, y_0), γ è una curva differenziabile regolare, parametrizzata da $\gamma(t) = (t, g(t), 0)$. Inoltre, si ha l'identità

$$f(x, g(x)) = 0$$

che, derivata rispetto a x, dà $f_x(x, g(x)) + g'(x)f_y(x, g(x)) = 0$, da cui

$$g'(x) = -f_x/f_y.$$

Pertanto, nel piano $z = 0$, la tangente alla curva γ nel punto (x_0, y_0) ha equazione cartesiana

$$f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) = 0.$$

Esempio 1.9. **L'elica circolare**. La curva parametrizzata

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) \quad \text{, con } a > 0 \text{ e } b \neq 0,$$

si dice *elica circolare*. Osserviamo che il sostegno $\alpha(\mathbb{R})$ è contenuto nel cilindro circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = a^2$. L'elica circolare è una curva regolare e il suo vettore velocità

$$\dot\alpha(t) = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b)_{\alpha(t)} \neq (0, 0, 0)_{\alpha(t)}$$

forma un angolo ϑ costante con l'asse delle z :

$$\sqrt{a^2 + b^2}\cos\vartheta = \dot\alpha(t) \cdot e_{3\alpha(t)} = b = const \neq 0.$$

Uno studio più approfondito sulle eliche (curve molto importanti in fisica) verrà fatto nella Sezione 2.4 .

Esercizio 1.10. Verificare che le curve algebriche

$\mathcal{C}_1 : x^3 - y^2 = 0$ (cubica cuspidale) e $\mathcal{C}_2 : x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (cubica nodale)

non sono regolari (cf. Figura 3).
Suggerimento: parametrizzare $\mathcal{C}_1$ con (t^2, t^3) e $\mathcal{C}_2$ con $(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$.

FIGURA 3. Curve non regolari.

Esercizio 1.11. Determinare la curva $\gamma(t)$ che soddisfa le seguenti condizioni: $\gamma(0) = (-1, 3, -2)$ e $\dot\gamma(t) = (t, e^t, t^2)$.

Esercizio 1.12. Per tutti gli esempi di curve regolari dati precedentemente, determinare il vettore velocità e la retta tangente per $t = 0$.

Esercizio 1.13. Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (\cos\alpha\cos at, \cos\alpha \operatorname{sen} at, \operatorname{sen}\alpha\cos bt, \operatorname{sen}\alpha\cos bt)$$

dello spazio $\mathbb{R}^4$, dove $\alpha \in]0, \pi/2[$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Si verifichi che $\gamma(t)$ è una curva della sfera $\mathbb{S}^3$ di centro l'origine e raggio 1 di $\mathbb{R}^4$. Inoltre, trovare la condizione che devono soddisfare le costanti a, b affinchè $\gamma(t)$ sia regolare.

Esercizio 1.14. Si considerino nel piano le coordinate polari (ϱ, ϑ), $\varrho > 0, \vartheta \in]0, 2\pi[$. Si verifichi che la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = \big(\varrho(t), \vartheta(t)\big) = \Big(\sqrt{t^2 + \varrho_0^2}, \vartheta_0 + \arccos\frac{\varrho_0}{\sqrt{t^2 + \varrho_0^2}}\Big),$$

è una retta del piano.

Osservazione 1.15. Una curva regolare $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice che è una **curva semplice** se l'applicazione γ è un omeomorfismo dall'intervallo I su $\gamma(I)$. Se, inoltre, $I = [a, b]$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora curva γ è detta *curva chiusa semplice*. Un classico risultato di topologia (*Teorema della curva di Jordan*) afferma che: *ogni curva chiusa semplice piana divide il piano in due componenti connesse int*(γ) *ed ext*(γ), dove $\mathrm{int}(\gamma)$ è la componente limitata (quindi contenuta in un disco di raggio abbastanza grande) ed $\mathrm{ext}(\gamma)$ è la componente connessa illimitata. Più in generale, se c è una costante positiva, una curva regolare $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \text{se e solo se} \quad t_2 = t_1 + kc \quad \text{per qualche intero } k,$$

si dice *curva chiusa periodica*, e il più piccolo c che soddisfa tale proprietà è detto periodo di γ. Ad esempio, la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, è periodica di periodo 2π.

Denotiamo con J la rotazione antioraria di 90 gradi del piano (cf. Sezione 2.3). Diciamo che una curva chiusa semplice piana $\gamma(t)$ è orientata positivamente se il vettore $J\dot\gamma(t)$ è sempre diretto verso l'interno di γ. Possiamo sempre assumere che la curva γ sia orientata positivamente (cambiando se necessario t con $-t$). Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, è una curva chiusa semplice piana di periodo c e orientata positivamente, allora vale la seguente formula

$$\mathrm{area}(\mathrm{int}(\gamma)) := \textstyle\iint_{int(\gamma)} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^c (xy' - yx')dt.$$

Infatti, applicando il Teorema di Green alle funzioni $f(x,y) = (-1/2)y$ e $g(x,y) = (1/2)x$, si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(\text{int}(\gamma)) &:= \iint_{int(\gamma)} dxdy = \iint_{int(\gamma)} (g_x - f_y)dxdy \\
&= \int_\gamma f(x,y)dx + \int_\gamma g(x,y)dy = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma xdy - \int_\gamma ydx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^c (xy' - yx')dt.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.16. Verificare che l'area dell'interno dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$, è data da πab.
Suggerimento: considerare la parametrizzazione $(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$.

1.2. Lunghezza di un arco di curva e ascissa curvilinea

Nello studio di una curva le proprietà più interessati sono quelle invarianti per cambiamenti di parametro. Consideriamo una curva differenziabile parametrizzata $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = \big(x_1(t), ..., x_n(t)\big)$, e un diffeomorfismo

$$h : J \longrightarrow I,\ s \longmapsto t = h(s), \text{ quindi } h'(s) \neq 0 \text{ per ogni } s \in J,$$

dove J è un altro intervallo aperto di $\mathbb{R}$. In tal caso,

$$\beta(s) := \alpha(h(s)), \quad \beta : J \xrightarrow{h} I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3,$$

è una *riparametrizzazione (regolare)* di $\alpha(t)$. La funzione h si dice ***cambiamento regolare di parametro***. Posto

$$\beta(s) = \big(\tilde{x}_1(s), ..., \tilde{x}_n(s)\big) = \big(x_1(h(s)), ..., x_n(h(s))\big),$$

si ha

$$\tilde{x}_1'(s) = h'(s)\ x_1'(h(s)), ..., \ \tilde{x}_n'(s) = h'(s)\ x_n'(h(s)),$$

per cui il vettore velocità $\dot\beta(s)$ soddisfa

$$\dot\beta(s) = \big(\tilde{x}_1'(s),\ ...\ , \tilde{x}_n'(s)\big) = h'(s)\,\dot\alpha(h(s)) = h'(s)\,\dot\alpha(t).$$

Di conseguenza,

$$\alpha(t) \text{ è regolare } \iff \beta(s) = \alpha(h(s)) \text{ è regolare.}$$

Osserviamo che essendo $h'(s) \neq 0$, allora $h(s) > 0$ oppure $h(s) < 0$ per ogni $s \in J$. Pertanto,

- $h'(s) > 0 \iff$ i vettori $\dot\alpha(t)$ e $\dot\beta(s)$ sono concordi,
- $h'(s) < 0 \iff$ i vettori $\dot\alpha(t)$ e $\dot\beta(s)$ sono discordi.

Si noti che a volte la curva riparametrizzata $\beta(s) = \alpha(h(s))$ si indica anche con $\alpha(s) = \alpha(h(s))$.

Esempio 1.17. Sia data la curva regolare $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$, $t \in]0, +\infty[$. Si consideri il cambiamento di parametro

$$h :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, s \mapsto t = h(s) = s^2.$$

$t = h(s)$ è un cambiamento regolare di parametro con inverso dato $s = h^{-1}(t) = \sqrt{t}$. La nuova parametrizzazione

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (s, s^3, 1 - s^2)$$

conserva il verso di percorrenza definito da $\alpha(t)$, infatti $h'(s) = 2s > 0$ per ogni $s > 0$.

Data una curva differenziabile parametrizzata $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t)$, consideriamo un intervallo $[a, b]$ contenuto in I e sia

$$\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

una partizione dell'intervallo $[a, b]$. Poniamo

$$\ell(\alpha, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} \left\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\right\| = \sum_{i=1}^{k} d\big(\alpha(t_i), \alpha(t_{i-1})\big).$$

$\ell(\alpha, \mathcal{P})$ è la lunghezza delle poligonale di vertici $\alpha(t_0), \ldots, \alpha(t_k)$.

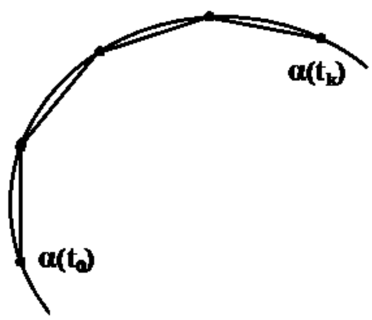

Figura 4. Poligonale di vertici $\alpha(t_0), \ldots, \alpha(t_k)$.

Inoltre, poniamo

$$|\mathcal{P}| := \max_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}|.$$

$|\mathcal{P}|$ è detta *norma della partizione* e rappresenta l'ampiezza massima degli intervalli che costituiscono la stessa partizione. Osserviamo che se $\mathcal{P}'$ è un'altra partizione con $|\mathcal{P}'| < |\mathcal{P}|$, allora $\ell(\alpha, \mathcal{P}') > \ell(\alpha, \mathcal{P})$. Possiamo dunque dare la seguente definizione.

Definizione 1.18. *Si definisce* **lunghezza dell'arco** $\alpha_{|[a,b]}$ *la quantità:*

$$\mathcal{L}\big(\alpha_{|[a,b]}\big) := \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sup_{|\mathcal{P}| \to 0} \ell(\alpha, \mathcal{P}).$$

Risulta che

$$\mathcal{L}\big(\alpha_{|[a,b]}\big) = \int_a^b \|\dot\alpha(t)\| \, \mathrm{d}t < +\infty,$$

dove $\|\dot\alpha(t)\|^2 = \dot\alpha(t) \cdot \dot\alpha(t) = {x'_1}^2(t) + ... + {x'_n}^2(t)$, ovvero $\|\dot\alpha(t)\|$ è la lunghezza del vettore velocità (detta *velocità scalare*, o semplicemente velocità, di $\alpha(t)$ all'istante t).

Proposizione 1.19. *La lunghezza di un arco di curva è invariante per un cambiamento regolare di parametro.*

Dimostrazione. Sia $h : [c, d] \subset J \to [a, b] \subset I,\ s \mapsto t = h(s)$, un cambiamento regolare di parametro. Allora

$$\beta(s) = \alpha\big(h(s)\big) \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(s) = h'(s)\,\dot{\alpha}\big(h(s)\big), \quad \text{con } h'(s) \neq 0 \ \text{ per ogni } \ s,$$

e quindi

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_c^d \|\dot{\beta}(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_c^d |h'(s)|\,\big\|\dot{\alpha}\big(h(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}s.$$

Distinguiamo due casi. Se $h'(s) > 0$, allora

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_c^d h'(s)\,\big\|\dot{\alpha}\big(h(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}s = \int_{h(c)=a}^{h(d)=b} \|\dot{\alpha}(t)\|\ \mathrm{d}t = \mathcal{L}(\alpha)$$

Se $h'(s) < 0$, anche in questo caso

$$\mathcal{L}(\beta) = -\int_c^d h'(s)\big\|\dot{\alpha}\big(h(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}s = -\int_{h(c)=b}^{h(d)=a} \|\dot{\alpha}(t)\|\ \mathrm{d}t = \mathcal{L}(\alpha).$$

□

Proviamo ora la seguente

Proposizione 1.20. *Ogni curva regolare $\alpha : I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \alpha(t)$, ammette una riparametrizzazione $\beta(s) = \alpha\big(h(s)\big)$, $s \in J$ (intervallo di $\mathbb{R}$), a velocità unitaria, ovvero $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.*

Dimostrazione. Fissiamo un $t_0 \in I$ e consideriamo la funzione

$$s : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot{\alpha}(t)\|\ \mathrm{d}t,$$

detta ***ascissa curvilinea*** di origine $\alpha(t_0)$. La funzione $s(t)$ rappresenta la lunghezza (con segno) dell'arco di curva compresa tra l'estremo fisso $\alpha(t_0)$ e l'estremo variabile $\alpha(t)$. Osserviamo che $J = s(I)$ è un intervallo in quanto $s(t)$ è continua e I intervallo, $s(t)$ è differenziabile e $s'(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \|\dot{\alpha}(t)\|$. Inoltre, siccome $\alpha(t)$ è una curva regolare, $\|\dot{\alpha}(t)\| > 0$ per ogni $t \in I$ e di conseguenza $s'(t) > 0$ per ogni $t \in I$. Pertanto, $s(t)$ è una funzione strettamente crescente in I e quindi invertibile su $J = s(I)$, con funzione inversa differenziabile

$$t(s) : J \to I,\ s \mapsto t(s),$$

che soddisfa

$$t'(s) \ = \ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \ = \ \frac{1}{\big\|\dot{\alpha}\big(t(s)\big)\big\|} \ = \ \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \ > \ 0.$$

Dunque, $t = t(s)$ è un cambiamento regolare di parametro e la curva riparametrizzata $\beta(s) = \alpha\big(t(s)\big)$ ha velocità scalare

$$\|\dot{\beta}(s)\| = t'(s)\ \big\|\dot{\alpha}\big(t(s)\big)\big\| = \frac{1}{\big\|\dot{\alpha}\big(t(s)\big)\big\|}\big\|\dot{\alpha}\big(t(s)\big)\big\| = 1.$$

□

Il nuovo parametro ascissa curvilinea $s = s(t)$ non è parametro fra i tanti, esso è un parametro intrinseco, essendo legato alla geometria della curva. La nuova parametrizzazione è espressa da $\alpha(t(s))$ che, con abuso di notazione, scriveremo $\alpha(s)$. Si noti che il calcolo esplicito della funzione inversa $t = t(s)$ è spesso molto complicato, ma in compenso (come già visto) la sua derivata è data dalla formula $t'(s) = 1/\|\dot\alpha\big(t(s)\big)\|$. Se si fissa come origine un altro punto invece che $\alpha(t_0)$, la nuova ascissa curvilinea si altera solo per l'aggiunta di una costante. Più in generale, vale la seguente

Proposizione 1.21. *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$, una curva regolare. Se $s = s(t)$ è ascissa curvilinea per $\gamma(t)$ è $\gamma(\bar t)$ è una riparametrizzazione di $\gamma(t)$ a velocità unitaria, allora*

$$\bar t = \pm s + c, \quad \textit{dove } c \textit{ è una costante.}$$

Dimostrazione. Posto $\bar t = \bar t(t)$ e $s = s(t)$, da $\gamma(t) = \gamma(\bar t(t))$ e $\gamma(t) = \gamma(s(t))$ segue che

$$\dot\gamma(t) = \bar t'(t)\,\dot\gamma(\bar t) \quad \text{e} \quad \dot\gamma(t) = s'(t)\,\dot\gamma(s).$$

Di conseguenza,

$$\|\dot\gamma(\bar t)\|\,|\bar t'(t)| = \|\dot\gamma(s)\|\,|s'(t)|$$

e quindi $|\bar t'(t)| = |s'(t)|$ da cui si ottiene $\bar t(t) = \pm s(t) + c$, con c costante. □

Esempio 1.22. Consideriamo l'elica circolare $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, con $a > 0$ e $b \neq 0$. L'elica $\gamma(t)$ è regolare, infatti

$$\dot\gamma(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)_{\gamma(t)} \neq (0,0,0)_{\gamma(t)},$$

tuttavia non è parametrizzata a velocità unitaria. Siccome

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = a^2\,\mathrm{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2,$$

l'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \textstyle\int_0^t \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\,t \quad \text{e quindi} \quad t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Pertanto, una riparametrizzazione a velocità unitaria dell'elica circolare è

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Esempio 1.23. Consideriamo la spirale logaritmica

$$\gamma(t) = (ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\,\mathrm{sen}\,t, 0),\ t \in \mathbb{R},\ \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

La spirale logaritmica $\gamma(t)$ è regolare. Infatti,

$$\dot\gamma(t) = ae^{-bt}(-b\cos t - \mathrm{sen}\,t, -b\,\mathrm{sen}\,t + \cos t, 0)_{\gamma(t)}$$

e

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = a^2\,e^{-2bt}(1+b^2) \neq 0.$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^t a\, e^{-bt}\sqrt{1+b^2} \, \mathrm{d}t = a\sqrt{1+b^2} \ \frac{e^{-bt}-1}{-b}.$$

Quindi,

$$s(t) = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}\,(1-e^{-bt}).$$

Per $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = 1$, si ha $s(t) = 1 - e^{-t} < 1$. Si noti che $\gamma(0) = (a, 0, 0) = (1/\sqrt{2}, 0, 0)$ e per $t \to +\infty$ il punto $\gamma(t)$ si avvicina all'origine e l'ascissa curvilinea $s(t)$ tende a 1.

Esempio 1.24. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 0),\ t \in]0, 2\pi[.$$

Tale curva $\gamma(t)$ è regolare. Infatti

$$\dot\gamma(t) = (1-\cos t, \operatorname{sen} t, 0)_{\gamma(t)} \quad \text{e} \qquad \|\dot\gamma(t)\|^2 = 2(1-\cos t) = 4\operatorname{sen}^2(t/2) \neq 0.$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}t = 2\int_0^t \operatorname{sen}(t/2) \, \mathrm{d}t = 4\big(1 - \cos(t/2)\big).$$

Osservazione 1.25. Consideriamo la circonferenza γ_0 parametrizzata da $\gamma_0(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, di $\mathbb{R}^3$. γ_0 è una curva chiusa semplice piana, e chiaramente

$$\mathcal{L}^2(\gamma_0)/4\pi = (2\pi r)^2/4\pi = \pi r^2 = \text{area}(int(\gamma_0)).$$

In generale, se $\gamma(t)$ è una curva chiusa semplice piana, vale la classica *disuguaglianza isoperimetrica*

$$\text{area}(int(\gamma)) \leq \mathcal{L}^2(\gamma)/4\pi$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se γ è una circonferenza (per una dimostrazione di questo risultato si può vedere, ad esempio, [**9**] p. 31).

1.3. Campi vettoriali e derivazione nello spazio euclideo

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile in un intorno U di un fissato punto p.

Definizione 1.26. *Il vettore* ***gradiente*** *di f in p, che si indica con $(\nabla f)_p$, è il vettore tangente in p che ha come componenti le derivate parziali di f calcolate in p:*

$$(\nabla f)_p := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)_p \in T_p\,\mathbb{R}^n.$$

Fissato $v_p \in T_p\,\mathbb{R}^n$, per ε "piccolo", consideriamo l'applicazione

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ t \mapsto (p + tv) \mapsto f(p + tv).$$

Definizione 1.27. *La **derivata direzionale** di f rispetto al vettore tangente v_p è definita da*

$$v_p(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p+tv)_{|t=0}.$$

Proposizione 1.28. *Sia $v_p \in T_p\,\mathbb{R}^n$, $v_p = (v_1, \dots, v_n)_p$, allora*

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = v_p \cdot (\nabla f)_p. \tag{1.2}$$

Inoltre, se $\alpha(t)$ è una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$ con $\alpha(I) \subset U$, risulta

$$\dot\alpha(t)(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\alpha(t)\big). \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Per definizione $v_p(f) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p+tv)_{|t=0}$, dove

$$f(p+tv) = f(x_1(t), ..., x_n(t)) = f(p_1 + tv_1, ..., p_n + tv_n).$$

Esplicitando, si ha

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right)_{|t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = v_p \cdot (\nabla f)_p\,.$$

Ora, sia $\alpha(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$, $\dot\alpha(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_n'(t)\big)_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}\,\mathbb{R}^n$. Allora, applicando la (1.2) e la formula di derivazione per la funzione $f(\alpha(t))$, si ha

$$\dot\alpha(t)(f) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\big(\alpha(t)\big) \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\alpha(t)\big).$$

□

Esercizio 1.29. Siano dati il vettore tangente $v_p = (1,2,3)_p \in T_p\mathbb{R}^3$, $p = (1,2,-1)$, e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Si calcoli la derivata direzionale $v_p(f)$.

Osservazione 1.30. Dalla (1.2), prendendo $v_p = e_{j_p}$, segue facilmente che

$$e_{j_p}(f) = (\partial f/\partial x_j)(p).$$

Quindi, in questo contesto,

e_{j_p} si può identificare con la derivata parziale $\left(\partial/\partial x_j\right)_p$.

Denotiamo con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni differenziabili

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ dove } A \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{F}(A)$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale. Inoltre, considerando anche il prodotto interno $(f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2$, $\mathcal{F}(A)$ ha una struttura di algebra reale commutativa. Analogamente, l'insieme $\mathcal{F}(p)$ di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabili in un intorno U di p, ha una struttura di algebra reale commutativa.

Proposizione 1.31. *Siano $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(p)$, valgono le seguenti proprietà:*

(1) $v_p(\lambda f + \mu g) = \lambda v_p(f) + \mu v_p(g)$

(2) $v_p(f \cdot g) = f(p)\, v_p(g) + g(p)\, v_p(f)$

(3) $(\lambda v_p + \mu w_p)(f) = \lambda v_p(f) + \mu w_p(f)$

Dimostrazione. Segue dalla (1.2). □

Le proprietà (1) e (2) ci dicono che l'applicazione $v_p^* : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}, f \mapsto v_p(f)$, è una derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(p)$.

Definizione 1.32. *Un **campo di vettori** su A (aperto di $\mathbb{R}^n$) è una corrispondenza*

$$V : A \subseteq \mathbb{R}^n \to TA := \dot{\bigcup_{p\in A}} T_p\mathbb{R}^n,\ p \mapsto V(p) \in T_p\mathbb{R}^n.$$

In particolare, i vettori $e_1, \dots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si possono considerare come campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$. Nel seguito denoteremo con $E_1, ..., E_n$ i campi vettoriali definiti dalla **base canonica**, $E_i : p \mapsto E_{ip} = e_{ip}$. Se V, W sono campi vettoriali su A e $g : A \to \mathbb{R}$, si possono definire i campi vettoriali $V + W$ e gV ponendo

$$(V + W)(p) = V(p) + W(p) \ \text{ e } \ (gV)(p) = g(p)V(p).$$

Se V è campo vettoriale su A ed $f \in \mathcal{F}(A)$, si può definire la funzione $V(f)$ *derivata di f rispetto al campo vettoriale V* nel seguente modo:

$$V(f) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p \mapsto V(f)(p) := V_p(f).$$

Naturalmente, se V, W sono campi vettoriali ed $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{F}(A)$, allora

$$(V + W)(f) = V(f) + W(f) \ e\ (gV)(f) = gV(f).$$

Definizione 1.33. *Un campo vettoriale V si dice* campo di vettori differenziabile *se per ogni $f \in \mathcal{F}(A)$ risulta $V(f) \in \mathcal{F}(A)$.*

Denotiamo con $\mathfrak{X}(A)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali differenziabili definiti sull'aperto A di $\mathbb{R}^n$. I campi vettoriali $E_1, \dots, E_n$ sono differenziabili in quanto per ogni $f \in \mathcal{F}(A)$:

$$E_i(f)(p) = E_{i_p}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \ \text{ per ogni } p \implies E_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Quindi, in questo contesto,

E_j si può identificare con la derivata parziale $(\partial/\partial x_j)$.

Sia V un campo vettoriale su A e sia $p \in A$. Ricordiamo che $\{(E_i)_p\}$ è una base ortonormale di $T_p\mathbb{R}^n$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. Allora, $V(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ e quindi

$$V(p) = \sum_{i=1}^n V^i(p)E_{i_p} = \sum_{i=1}^n \big(V(p) \cdot E_{i_p}\big)E_{i_p} = \sum_i (V^i E_i)(p) \qquad \forall\, p \in A,$$

per cui

$$V = \sum_{i=1}^{n} V^i\, E_i.$$

Le funzioni

$$V^i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p \mapsto V^i(p) = V(p) \cdot E_{i_p} = (V \cdot E_i)(p),$$

si dicono *funzioni componenti* di V (rispetto alla base canonica), e quindi $V^i = V \cdot E_i$.

Esempio 1.34. Per ogni funzione differenziabile $f \in \mathcal{F}(A)$, il gradiente ∇f è un esempio di campo vettoriale differenziabile su A. Più precisamente,

$$\nabla f : p \longmapsto (\nabla f)_p \in T_p\mathbb{R}^n$$

e quindi

$$\nabla f = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Proposizione 1.35. *Un campo vettoriale V è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti V^i sono differenziabili.*

Dimostrazione. Possiamo esprimere $V = \sum_{i=1}^{n} V^i E_i$. Assumiamo V differenziabile. Consideriamo la funzione coordinata i-esima

$$f = x_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = x_i.$$

Tale funzione è differenziabile e

$$V(f) \;=\; V(x_i) \;=\; \sum_{j=1}^{n} V^j E_j(x_i) \;=\; \sum_{j} V^j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = V^i.$$

Pertanto, le funzioni componenti V^i sono differenziabili per ogni i. Viceversa, se le funzioni V^i sono differenziabili, allora per ogni $f \in \mathcal{F}(A)$ si ottiene $V(f) = \sum_{i=1}^{n} V^i\ E_i(f) \in \mathcal{F}(A)$. □

Osservazione 1.36. Sia $V = \sum_i V^i E_i$ un campo vettoriale su $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Da $V(f) = \sum_{i=1}^{n} V^i(\partial f/\partial x_i)$ seguono le proprietà:

$$V(af + bg) = aV(f) + bV(g) \quad \text{ e } \quad V(f \cdot g) = fV(g) + gV(f)$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(A)$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi, un campo vettoriale differenziabile definisce una **derivazione** di $\mathcal{F}(A)$. Inoltre, se V, W sono due campi vettoriali su A e $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A)$, si può definire in modo naturale il campo di vettori

$$f_1V + f_2W : p \mapsto \big(f_1(p)V_p + f_2(p)W_p\big) \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Risulta facilmente che

$$(f_1V + f_2W)(f) = f_1V(f) + f_2W(f) \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}(A).$$

Osservazione 1.37. Si può dimostrare che ogni derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(A)$ (risp. $\mathcal{F}(p)$) definisce un campo di vettori differenziabile su A (risp. un vettore tangente in p a $\mathbb{R}^n$).

Esempio 1.38. Data la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

si consideri la circonferenza $\mathbb{S}^1$ parametrizzata da $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$. Il campo vettoriale gradiente

$$\nabla f : p \mapsto (\nabla f)_p = 2(x_1, x_2)_p$$

e il campo vettoriale

$$X : p \mapsto X_p = -x_2 \left(E_1\right)_p + x_1 \left(E_2\right)_p$$

soddisfano

$$X_{\gamma(t)} = \dot\gamma(t) \quad \text{e} \quad (\nabla f)_{\gamma(t)} \cdot \dot\gamma(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In generale, dato un campo vettoriale differenziabile X, una curva differenziabile $\gamma(t)$, $|t| < \varepsilon$, che soddisfa

$$\gamma(0) = p_0 \quad \text{e} \quad X_{\gamma(t)} = \dot\gamma(t) \quad \text{per ogni } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

si dice **curva integrale** di X con inizio in p_0.

Esempio 1.39. Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definiti rispettivamente da

$$X = x_1E_1 + x_2E_2, \;\; Y = x_2E_1 - x_1E_2, \quad Z = x_1E_1 - x_2E_2.$$

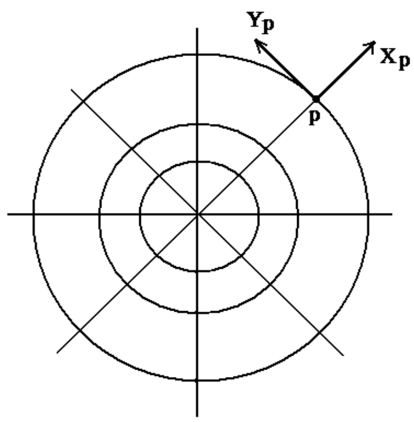

FIGURA 5. Curve integrali di X e Y.

La curva integrale di X con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\gamma(t) = (a_1e^t, a_2e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Quindi le curve integrali di X sono semirette radiali (il parametro non è affine). La curva integrale di Y con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\gamma(t) = (a_1\cos t - a_2\operatorname{sen} t, a_1\operatorname{sen} t + a_2\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, che è una circonferenza di centro l'origine e con inizio in p. La curva integrale di Z con inizio in $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ è data da $\gamma(t) = (a_1e^t, a_2e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$. In questo caso, una curva integrale è un semiasse coordinato (quando $a_1a_2 = 0$) oppure un ramo di iperbole equilatera (quando $a_1a_2 \neq 0$).

Parentesi di Lie

Sia $\mathcal{L}$ uno spazio vettoriale reale. $\mathcal{L}$ si dice che è un'*algebra di Lie* (reale) se è definito un prodotto, detto *parentesi di Lie*,

$$[,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}, (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

che soddisfa le seguenti proprietà

(1) $[,]$ è bilineare,
(2) $[,]$ è antisimmetrica : $[X, Y] = -[Y, X]$,
(3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identità di Jacobi).

$\mathbb{R}^3$ con l'usuale prodotto vettoriale e lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $\mathbb{R}^{n,n}$ con $[A, B] := AB - BA$, dove AB denota l'usuale prodotto tra matrici, sono esempi di algebre di Lie. Se $\mathcal{L}$ è un'*algebra di Lie abeliana*, cioè $[X, Y] = [Y, X]$, allora la parentesi di Lie $[,] = 0$.

Consideriamo ora due campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, $X = (X^1, ..., X^n)$, $Y = (Y^1, ..., Y^n)$. Il campo vettoriale differenziabile $[X, Y]$ definito da

$$[X, Y] := \sum_{j=1}^{n} \big(X(Y^j) - Y(X^j)\big) E_j, \quad \text{ossia} \quad [X, Y]^j = X(Y^j) - Y(X^j),$$

viene detto *parentesi di Lie* dei campi vettoriali X, Y (nell'ordine dato). Il campo vettoriale differenziabile $[X, Y]$, pensato come una derivazione di $\mathcal{F}(A)$, soddisfa la proprietà

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f), \quad \text{per ogni} \quad f \in \mathcal{F}(A).$$

In particolare, per i campi vettoriali definiti dalla base canonica si ha

$$[E_i, E_j] = 0.$$

Se nello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(A)$, consideriamo il prodotto

$$[,] : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), \ (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

è facile verificare che $\mathfrak{X}(A)$ è un'algebra di Lie. Inoltre, vale la seguente proprietà :

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X,$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(A)$.

Esercizio 1.40. Considerati i campi di vettori $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definiti da:

$$X = x_3E_2 - x_2E_3, \ Y = x_1E_3 - x_3E_1, \quad Z = -x_1E_2 + x_2E_1,$$

verificare che

$$[X, Y] = Z, \ [Y, Z] = X, \ [Z, X] = Y.$$

Derivata covariante (euclidea)

Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, $X = (X^1, ..., X^n), Y = (Y^1, ..., Y^n)$.

- Il prodotto scalare di X e Y è la funzione

$$X \cdot Y : A \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto (X \cdot Y)(p) := X(p) \cdot Y(p) = \textstyle\sum_{i=1}^n X^i(p)Y^i(p)\,.$$

Quindi

$$(X \cdot Y) = \textstyle\sum_{i=1}^n X^i Y^i \quad \text{e} \quad \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n (X^i)^2.$$

In particolare, siccome X, Y sono differenziabili, la funzione $X \cdot Y \in \mathcal{F}(A)$.

- Il campo vettoriale differenziabile $\bar{\nabla}_X Y$ definito da

$$\bar{\nabla}_X Y := (X(Y^1), ..., X(Y^n)) = \sum_{j=1}^n X(Y^j) E_j = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} E_j.$$

viene detto *derivata covariante (euclidea)* di Y rispetto a X. Quindi la derivata covariante è la naturale generalizzazione della derivata direzionale. L'operatore $\bar{\nabla}_X$ si dice *derivata covariante (euclidea) rispetto a X*.

Proposizione 1.41. *L'operatore*

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(A), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered}
\bar{\nabla}_{fX} Y = f \bar{\nabla}_X Y, \\
\bar{\nabla}_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\
\bar{\nabla}_X (Y + Z) = \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z, \\
\bar{\nabla}_X (fY) = X(f) Y + f \bar{\nabla}_X Y \quad \textit{(regola di Leibniz)}, \\
X(Y \cdot Z) = (\bar{\nabla}_X Y) \cdot Z + Y \cdot (\bar{\nabla}_X Z) \quad \textit{(compatibilità di } \bar{\nabla} \textit{ con } \cdot), \\
\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y] \ \textit{(simmetria di } \bar{\nabla}),
\end{gathered}$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(A)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}(A)$.

Dimostrazione. (Per esercizio). □

Le prime quattro proprietà della Proposizione 1.41 ci dicono che $\bar{\nabla}$ è una *connessione lineare* su $\mathbb{R}^n$. Preferiamo usare il simbolo $\bar{\nabla}$ per questa esplicita connessione lineare (detta anche **connessione lineare euclidea**), in quanto il simbolo ∇ generalmente è usato per indicare una arbitraria connessione lineare.

Fissato $p \in \mathbb{R}^n$, l'operatore $\bar{\nabla} : T_p\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}(A) \to T_p\mathbb{R}^n, (X_p, Y) \mapsto \bar{\nabla}_{X_p} Y$, dove

$$\bar{\nabla}_{X_p} Y = (X_p(Y^1), ..., X_p(Y^n)), \tag{1.4}$$

soddisfa proprietà analoghe a quelle della Proposizione 1.41. Si noti che, per $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$,

$$\left(\bar{\nabla}_X Y\right)_p = (X(Y^1), ..., X(Y^n))_p = (X_p(Y^1), ..., X_p(Y^n)) = \bar{\nabla}_{X_p} Y.$$

Definizione 1.42. *Un campo vettoriale differenziabile Y si dice parallelo se $\bar{\nabla} Y = 0$, ossia $\bar{\nabla}_X Y = 0$ per ogni campo vettoriale differenziabile X.*

Esercizio 1.43. Si verifichi che un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(A)$ è parallelo se, e solo se, le sue funzioni componenti sono delle costanti.

Definizione 1.44. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si definisce divergenza di un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(A)$ la funzione differenziabile*

$$(1.5) \qquad divY := \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{\nabla}_{E_i} Y \cdot E_i \right) = ... = \sum_{i=1}^{n} E_i(Y^i) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i Y^i.$$

Se $f \in \mathcal{F}(A)$, il laplaciano *di f è la funzione differenziabile*

$$\Delta f = div\, \nabla f \ .$$

Siccome il gradiente di f è il campo vettoriale $\nabla f = (f_{x_1}, ..., f_{x_n})$, allora

$$\Delta f = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i} \ .$$

Esercizio 1.45. Si verifichi che div $Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{\nabla}_{\bar{E}_i} Y \cdot \bar{E}_i \right)$, dove $(\bar{E}_i)$ è una arbitraria base ortonormale di campi vettoriali differenziabili su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.46. Considerati i campi di vettori $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definiti da:

$$X = x_3 E_2 - x_2 E_3, \quad Y = x_1 E_3 - x_3 E_1, \quad Z = -x_1 E_2 + x_2 E_1,$$

calcolare i campi vettoriali $\bar{\nabla}_X Y, \bar{\nabla}_Y X, \bar{\nabla}_Y Z, \bar{\nabla}_Z Y, \bar{\nabla}_X Z, \bar{\nabla}_Z X$, e verificare che

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = Z, \ \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Z Y = X, \ \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_Z X = Y.$$

Esercizio 1.47. Sia $\bar{R} : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \longrightarrow \mathfrak{X}(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, l'applicazione definita da

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \ .$$

Si verifichi che l'applicazione $\bar{R}$ è identicamente nulla.

1.4. Il differenziale (di un'isometria)

Nel seguito le isometrie (e il loro differenziale) giocheranno un ruolo fondamentale nello studio della geometria delle curve di $\mathbb{R}^3$. Iniziamo introducendo il differenziale di una arbitraria applicazione differenziabile.

Definizione 1.48. *Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, $F = (F_1, \dots, F_m)$, e sia $p \in \mathbb{R}^n$. Ogni dato vettore $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ si può sempre scrivere come vettore tangente a una curva differenziabile passante per p, quindi sia $\alpha(t)$ una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$ con $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = v_p$. La curva $\beta(t) = F(\alpha(t))$ è una curva differenziabile di $\mathbb{R}^m$ con $\beta(0) = F(p)$. Il* differenziale *di F in p, detta anche* applicazione tangente *in p, è l'applicazione*

$$F_{*_p} : T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m, \ v_p \longmapsto F_{*_p} v_p := \dot{\beta}(0) \in T_{F(p)} \mathbb{R}^m.$$

La definizione data è ben posta. Infatti, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 1.49. *Sia $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ applicazione differenziabile, e sia $p \in \mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ si ha*

$$F_{*_p} v_p = \textstyle\sum_{j=1}^{m} v_p(F_j)\, E_{j_{F(p)}} = \left(v_p(F_1), ..., v_p(F_m)\right)_{F(p)} ,$$

e quindi

$$F_{*_p} v_p = \sum_{j=1}^m \big(v_p \cdot (\nabla F_j)_p\big) E_{j_{F(p)}}.$$

In particolare:
(a) *La definizione di F_{*_p} non dipende dalla scelta della curva $\alpha(t)$.*
(b) *F_{*_p} è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare tra spazi vettoriali.*
(c) *Se $F = f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, allora F_{*_p} si identifica con la forma lineare*

$$(\mathrm{d}f)_p : T_p\,\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \equiv T_{f(p)}\mathbb{R},\ v_p \longmapsto (\mathrm{d}f)_p(v_p) = v_p(f) = (\nabla f)_p \cdot v_p.$$

Quindi, $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*\,\mathbb{R}^n$ è la forma lineare duale del vettore $(\nabla f)_p \in T_p\,\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $v_p \in T_p\,\mathbb{R}^n$, $v_p = \sum_{i=1}^m v^i E_{i_p}$. Sia $\alpha(t)$ una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$ con $\alpha(0) = p$ e $\dot\alpha(0) = v_p$. Se $\alpha(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$, allora $\dot\alpha(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_n'(t)\big)_{\alpha(t)}$ e $v_p = \dot\alpha(0) = \sum_{i=1}^n x_i'(0)\, E_{i_p}$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Quindi, la curva

$$\beta(t) = F(\alpha(t)) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = \Big(F_1\big(x_i(t)\big), \dots, F_m\big(x_i(t)\big)\Big)$$

è una curva differenziabile di $\mathbb{R}^m$ con $\beta(0) = F(\alpha(0)) = F(p)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
F_{*_p} v_p := \dot\beta(0) &= \sum_{j=1}^m \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}(0) E_{j_{F(p)}} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\big(\alpha(0)\big)\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(0) \right) E_{j_{F(p)}} \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) v^i \right) E_{j_{F(p)}} = \sum_{j=1}^m \big((\nabla F_j)_p \cdot v_p\big) E_{j_{F(p)}} \\
&= \sum_{j=1}^m v_p(F_j) E_{j_{F(p)}},
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall Proposizione 1.28. Le proprietà (a), (b), (c) seguono facilmente dalla prima parte del Teorema. □

Osservazione 1.50. Naturalmente per definire il differenziale F_{*_p} basta la differenziabilità di F in un intorno del punto p.

Osservazione 1.51. Dalla (c) del Teorema 1.49 segue che, per $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, il differenziale *df* definisce un elemento di $\mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^n)$, ossia la forma $\mathcal{F}$-lineare

$$df : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), X \mapsto X(f), \text{ dove } X(f)(p) = X_p(f).$$

Naturalmente, si può sostituire $\mathbb{R}^n$ con un suo aperto.

Osservazione 1.52. Data una curva differenziabile $\alpha(t)$ di $\mathbb{R}^n$. Dalla definizione di F_{*_p}, prendendo $p = \alpha(t)$ e $v_p = \dot\alpha(t)$, si ha

$$F_{*_{\alpha(t)}}\big(\dot\alpha(t)\big) = \dot\beta(t), \quad \text{dove } \beta(t) = F\big(\alpha(t)\big).$$

Quindi il differenziale di una applicazione differenziabile $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ trasforma un vettore tangente a una curva $\alpha(t)$ in un vettore tangente alla curva immagine $\beta(t) = F(\alpha(t))$.

Esercizio 1.53. Siano dati la funzione $F(x, y, z) = (xy, xz, yz)$, il punto $p = (1, 1, 1)$ e il vettore $v_p = (1, 2, 3)_p$. Si determini il vettore $F_{*_p} v_p$.

Esempio 1.54. Un esempio, anche se in una forma un pò mascherata, di applicazione tangente è dato dal vettore velocità di una curva differenziabile $\alpha(t)$ di $\mathbb{R}^n$. Infatti, la curva α è una funzione differenziabile $\alpha : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$, e $\alpha_* : T_t I = T_t\mathbb{R} \to T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$. Indicato con $E_t = (E_1)_t$ il vettore tangente che rappresenta la base canonica di $T_t\mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_*(E_t) = \big(E_t(x_1), ..., E_t(x_n)\big)_{\alpha(t)} = \big(x_1'(t), ..., x_n'(t)\big)_{\alpha(t)} = \dot\alpha(t).$$

Matrice associata al differenziale F_{*p}

Il differenziale $F_{*_p} : T_p\,\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)}\,\mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare. Determiniamo quindi la matrice associata a F_{*_p} rispetto alle basi canoniche $\big(E_{i_p}\big)$ di $T_p\,\mathbb{R}^n$ e $\big(E_{j_{F(p)}}\big)$ di $T_{F(p)}\,\mathbb{R}^m$. Dal Teorema 1.49 segue

$$F_*(E_{i_p}) = \big(E_{i_p}(F_1), \dots, E_{i_p}(F_m)\big)_{F(p)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p)\right)_{F(p)}.$$

Pertanto, la matrice associata al differenziale F_{*_p} è la seguente matrice (a m righe ed n colonne):

$$\mathcal{M}(F_{*_p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(p) & \ddots & & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \left(\Big(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p)\Big)\right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}}.$$

$\mathcal{M}(F_{*_p})$ è detta *matrice jacobiana* di F nel punto p e si indica con $J(F)_p$. Si può anche scrivere

$$J(F)_p = \begin{pmatrix} (\nabla F_1)_p \\ \vdots \\ (\nabla F_m)_p \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$F_{*_p} \text{ isomorfismo } \iff n = m \;\text{ e }\; \det(J(F)_p) \neq 0.$$

Esercizio 1.55. Sia F la funzione dell'Esercizio 1.53. Si determinino i punti di $\mathbb{R}^3$ in cui F_{*_p} è un isomorfismo.

Se $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ sono applicazioni differenziabili, con A, B aperti e $F(A) \subseteq B$, allora $G \circ F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile, e applicando la definizione di differenziale, si ottiene

$$(G \circ F)_{*_p} = G_{*_{F(p)}} \circ F_{*_p} \quad \text{per ogni} \quad p \in A.$$

Infatti, se $v_p = \dot\alpha(0)$ con $\alpha(0) = p$, posto

$$\beta(t) = F(\alpha(t)) \quad \text{ e } \quad \gamma(t) = G(\beta(t) = (G \circ F)(\alpha(t)),$$

si ha

$$G_{*_{F(p)}}(F_{*_p}v_p) = G_{*_{F(p)}}(\dot{\beta}(0)) = \dot{\gamma}(0) = (G \circ F)_{*_p}(v_p).$$

Inoltre, se $I_d : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'identità, allora $(I_d)_* = I_d : T_p\,\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\,\mathbb{R}^n$.

Queste proprietà implicano il seguente teorema.

Teorema 1.56. *Se $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo, cioè F è bigettiva con F, F^{-1} differenziabili, allora F_{*_p} è un isomorfismo e $F^{-1}_{*_p} = (F^{-1})_{*_{F(p)}}$.*

Dimostrazione. Da $F \circ F^{-1} = I = F^{-1} \circ F$ segue che

$$(F \circ F^{-1})_{*_{F(p)}} = I_{T_{F(p)}\,\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad (F^{-1} \circ F)_{*_p} = I_{T_p\,\mathbb{R}^n},$$

cioè

$$F_{*_p} \circ (F^{-1})_{*_{F(p)}} = I_{T_{F(p)}\,\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad (F^{-1})_{*_{F(p)}} \circ F_{*_p} = I_{T_p\,\mathbb{R}^n}.$$

Pertanto, F_{*_p} è un isomorfismo e $(F_{*_p})^{-1} = (F^{-1})_{*_{F(p)}}$. □

Inoltre, il Teorema della funzione inversa si può esprimere nella seguente forma (usando il differenziale F_{*_p} al posto della matrice jacobiana).

Teorema 1.57. ***(della funzione inversa)*** *Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile e sia $p \in \mathbb{R}^n$. Allora F_{*_p} è un isomorfismo se, e solo se, esistono U (intorno aperto di p) e $\tilde{U}$ (intorno aperto di $F(p)$) tali che $F\big|_U : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo.*

Sia ora F un diffeomorfismo di A con A aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $X \in \mathfrak{X}(A)$, allora si può definire il campo vettoriale F_*X ponendo per ogni $q \in F(A) \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$(F_*X)_q = F_{*p}X_p, \quad \text{dove} \quad p = F^{-1}(q).$$

Dall'espressione di F_{*p} trovata nel Teorema 1.49 segue che $F_*X \in \mathfrak{X}(F(A))$. Infatti,

$$(F_*X)_q = \textstyle\sum_{j=1}^m X_p(F_j)\,E_{j_q} = \sum_{j=1}^m X(F_j)(p)\,E_{j_q} = \sum_{j=1}^m X(F_j)(F^{-1}(q))\,E_{j_q},$$

quindi le funzioni componenti di F_*X sono date da

$$(F_*X)^j = X(F_j) \circ F^{-1}\ .$$

In particolare, se F è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$, $F_*X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Differenziale di un'isometria

Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono (come vedremo) particolari applicazioni affini. Consideriamo quindi prima il caso di un'*applicazione affine*, ossia di un'applicazione

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ del tipo } F = A + a,$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare (che si può identificare con una matrice quadrata di ordine n). Se A è invertibile, F è detta **trasformazione affine**.

Proposizione 1.58. *Se $F = A + a$ è un'applicazione affine, allora*

$$F_{*_p} v_p = (Av)_{F(p)}.$$

In particolare, il differenziale di un'applicazione lineare coincide con l'applicazione stessa.

Dimostrazione. Applicando la definizione di differenziale, $F_{*_p} v_p$ è il vettore velocità, per $t = 0$, della curva

$$\beta(t) \;=\; F(p + tv) \;=\; A(p + tv) + a \;=\; Ap + a + tAv\,.$$

Pertanto, $\quad F_{*_p} v_p = \dot{\beta}(0) = (Av)_{\beta(0)} = (Av)_{F(p)}\,.$

□

Ricordiamo che, per definizione, una **isometria** di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che conserva la distanza euclidea, ossia per ogni $p, q \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|q - p\| = \|F(q) - F(p)\|.$$

Inoltre, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detta trasformazione ortogonale se soddisfa la condizione

$$x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

equivalentemente

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Una trasformazione ortogonale f si può identificare con una matrice ortogonale A ($A^T A = I_n$), basta considerare la matrice associata ad f rispetto a una fissata base ortonormale (ad esempio la base canonica).

Teorema 1.59. *Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le trasformazioni $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo*

$$F(x) = A(x) + a,$$

dove A è una ***trasformazione ortogonale*** *di $\mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Una trasformazione ortogonale A è anche detta* ***isometria lineare****.*

Dimostrazione. Sia F un'applicazione del tipo

$$F(x) = f(x) + a,$$

dove f è una trasformazione ortogonale e a è un fissato elemento di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|F(x) - F(y)\| = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\|,$$

e quindi F è un'isometria di $\mathbb{R}^n$.

Viceversa, sia ora $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'isometria. Per provare quanto enunciato, basta provare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita:

$$f(x) = F(x) - F(0)$$

è una trasformazione ortogonale. Poiché F è una isometria, F conserva le distanze e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x)\| = \|F(x) - F(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|,$$

dove

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y,$$

e

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2f(x) \cdot f(y)).$$

Quindi, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y.$$

Sia ora $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, poiché f conserva il prodotto scalare anche $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ sarà una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Di conseguenza f è anche lineare in quanto, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum x_i e_i$, si ha:

$$f(\textstyle\sum_i x_i e_i) = f(x) = \sum_i \big(f(x) \cdot f(e_i)\big) f(e_i) = \sum_i \big(x \cdot e_i) f(e_i) = \sum_i x_i f(e_i).$$

Pertanto, f è una trasformazione ortogonale. □

Dalla Proposizione 1.58 e dal Teorema 1.59, segue il seguente

Corollario 1.60. *Se F è un'isometria di $\mathbb{R}^n$, $F = A + a$, con A trasformazione (matrice) ortogonale di $\mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, allora*

$$F_{*_p} v_p = (Av)_p.$$

Quindi, F_{*_p} conserva il prodotto scalare:

$$F_{*_p} v_p \cdot F_{*_p} w_p = v_p \cdot w_p \quad \textit{per ogni} \quad v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n\,.$$

In particolare, F_{*_p} trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Proposizione 1.61. *Siano $p, q \in \mathbb{R}^n$ e $\{v_{1_p}, \dots, v_{n_p}\}$, $\{w_{1_q}, \dots, w_{n_q}\}$ basi ortonormali di $T_p \mathbb{R}^n$ e $T_q \mathbb{R}^n$ rispettivamente. Allora, esiste una sola isometria F di $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$F(p) = q \quad \textit{e} \quad F_{*_p} v_{i_p} = w_{i_q} \qquad \textit{per ogni} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Sia A la trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ definita da

$$Av_i = w_i \qquad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, n.$$

Posto $a := q - A(p) \in \mathbb{R}^n$, l'isometria $F = A + a$ soddisfa:

$$F(p) \; = \; A(p) + a \; = \; q, \qquad F_{*_p} v_{i_p} \; = \; (Av_i)_q \; = \; w_{i_q} \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, n.$$

Mostriamo ora l'unicità. Sia $\widetilde{F} = \widetilde{A} + \tilde{a}$ un'altra isometria tale che $\widetilde{F}(p) = q$ e $\widetilde{F}_{*_p}(v_{i_p}) = w_{i_p}$ per ogni i. Allora, per ogni i, si ha

$$\widetilde{F}_{*_p} v_{i_p} = w_{i_q} = F_{*_p} v_{i_p} \quad \Longrightarrow \quad (Av_i)_q = (\widetilde{A} v_i)_q \quad \Longrightarrow \quad Av_i = \widetilde{A} v_i\ ,$$

e quindi $\widetilde{A} = A$. Inoltre,

$$\widetilde{F}(p) = q = F(p) \;\Longrightarrow\; \widetilde{A}(p) + \tilde{a} = A(p) + a \;\Longrightarrow\; \widetilde{a} = a.$$

Pertanto $\widetilde{F} = F$. □

Ricordiamo che se F è un'isometria di $\mathbb{R}^n$, $F = A + a$, il **segno di** F è definito da

$$sign(F) := \det(A) = \pm 1.$$

Una trsformazione ortogonale A con $\det(A) = +1$ si dice *rotazione* (o *trasformazione ortogonale speciale*).

Esercizio 1.62. Sia E un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Si verifichi che l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp \to \mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp, x = x_E + x_{E^\perp} \mapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp},$$

è una trasformazione ortogonale (che viene detta *riflessione*, o *simmetria ortogonale*, rispetto al sottospazio E).

Esercizio 1.63. Siano dati i vettori $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ e $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ di $\mathbb{R}^3$. Si verifichi che l'applicazione lineare F di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$F(v_1) = v_1, \quad F(v_2) = \cos\vartheta\, v_2 + \operatorname{sen}\vartheta\, v_3, \quad F(v_3) = -\operatorname{sen}\vartheta\, v_2 + \cos\vartheta\, v_3,$$

è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, si determini il tipo di trasformazione ortogonale.

Esercizio 1.64. Scrivere in forma esplicita le seguenti isometrie (lineari) di $\mathbb{R}^3$:

- F_i(rotazione intorno all'asse x_i), $i = 1,2,3$;
- G_1(riflessione rispetto al piano coordinato $\mathbb{R}^2(x_2,x_3)$);
- G_2(riflessione rispetto al piano coordinato $\mathbb{R}^2(x_1,x_3)$);
- G_3(riflessione rispetto al piano coordinato $\mathbb{R}^2(x_1,x_2)$).

Esercizio 1.65. Sia A_1 una matrice le cui colonne definiscono i vettori di una base ortonormale di $T_p\mathbb{R}^n$ e sia A_2 una matrice le cui colonne definiscono i vettori di una base ortonormale di $T_q\mathbb{R}^n$. Determinare, in termini di A_1 e A_2, la matrice A dell'isometria F definita nella Proposizione 1.61.

Esercizio 1.66. Sia $F = A + a$ una isometria di $\mathbb{R}^3$ e sia π un piano di $\mathbb{R}^3$ per p e ortogonale a v. Si verifichi che $F(\pi)$ è il piano per $F(p)$ e ortogonale al vettore Av.

Sia F una trasformazione affine, $F = A + a$, A matrice invertibile. Dalla Proposizione 1.58, per $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ si ha $F_*X = AX$, ovvero

$$(F_*X)_q = \left(AX_{F^{-1}(q)}\right)_q = (AX_p)_q.$$

In particolare, se F è una isometria, si ha

$$F_*X \cdot F_*Y = (X \cdot Y) \circ F^{-1}$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Infatti,

$$\begin{aligned}(F_*X \cdot F_*Y)(q) &= (F_*X)_q \cdot (F_*Y)_q = F_{*p}X_p \cdot F_{*p}Y_p \\ &= X_p \cdot Y_p = (X \cdot Y)(p) \\ &= (X \cdot Y) \circ F^{-1}(q).\end{aligned}$$

Esercizio 1.67. Siano dati il campo vettoriale $X = (\sqrt{2}x_1, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$ e l'isometria $F = A + a$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a = (1,1,1).$$

Determinare il campo vettoriale F_*X e il vettore tangente $(F_*X)_q$ nel punto $q = (2,2,2)$.

Soluzione: per quanto osservato prima, $F_*X = AX = \sqrt{2}(x_1, x_2, x_3)$. Inoltre, ponendo $F(p) = q = (2,2,2)$ si trova $p = (1, 0, \sqrt{2})$. Pertanto,

$$X_p = \sqrt{2}(1,-1,1) \quad \text{e} \quad (F_*X)_q = (AX_p)_q = (\sqrt{2}, 0, 2)_q.$$

1.5. Orientazione e prodotto vettoriale

Siano $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ due basi ordinate di $\mathbb{R}^n$. Poniamo

$$w_j = \sum a_{ij} v_i, \quad (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Allora

$$(v_i) \sim (w_i) \text{ (sono } \textit{equiverse}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \det(a_{ij}) > 0.$$

Si vede facilmente che $\sim$ è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathcal{B}$ di tutte le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$. Una classe di equivalenza di basi equiverse $[(v_1, \dots, v_n)]$ si dice **orientazione** di $\mathbb{R}^n$. L'insieme quoziente $\mathcal{B}/\sim$ ha chiaramente solo due classi di equivalenza, e quindi $\mathbb{R}^n$ ha due orientazioni. Si assume come *orientazione positiva* quella individuata dalla base canonica $(e_1, \dots, e_n)$, e quindi $(e_2, e_1, e_3, e_4, \dots, e_n)$ individua l'orientazione negativa di $\mathbb{R}^n$. Pertanto, una base $(v_1, \dots, v_n)$ la diremo positiva se è equiversa alla base canonica.

FIGURA 6. Retta e piano orientati.

• Per $n = 1$, fissare un'orientazione significa fissare un verso positivo di percorrenza della retta (cf. Fig. 6).

• Per $n = 2$, fissare un'orientazione significa fissare un verso positivo di rotazione nel piano (cf. Fig. 6). L'orientazione positiva è quella determinata dalla base canonica (e_1, e_2). In questo caso, una base ordinata (v_1, v_2) è positiva (risp. negativa) se la più piccola rotazione che sovrappone v_1 a v_2 avviene in senso antiorario (risp. orario).

• Per $n = 3$, assumendo come orientazione positiva quella determinata dalla base canonica (e_1, e_2, e_3), una base ordinata (v_1, v_2, v_3) è positiva (risp. negativa) se la più piccola rotazione nel piano v_1, v_2 che sovrappone v_1 a v_2 è vista da un osservatore nel semispazio individuato da v_3 in senso antiorario (risp. orario).

Per $n = 3$, il **prodotto vettoriale** di due vettori non paralleli v_1, v_2 è il vettore, che indichiamo con $v_1 \wedge v_2$, che ha:

– direzione ortogonale a v_1 e v_2;
– modulo $\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\|\,\|v_2\| \operatorname{sen}(v_1 \hat{,} v_2)$;
– verso tale che la terna $(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$ sia positiva.

Se v_1, v_2 sono paralleli, come prodotto vettoriale $v_1 \wedge v_2$ si assume il vettore nullo. In particolare, $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ e i vettori della base canonica (e_1, e_2, e_3) soddisfano (cf. Figura 7):

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad \text{e} \quad e_1 \wedge e_2 \cdot e_3 = 1.$$

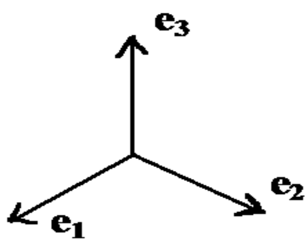

Figura 7

In modo equivalente, il prodotto vettoriale si può definire nel modo seguente. Consideriamo la 3-forma Ω su $\mathbb{R}^3$ (i.e., un'applicazione 3-lineare alternante) definita da

$$\Omega(v_1, v_2, v_3) := \det(v_1, v_2, v_3) = \det(b_{ij})$$

per ogni $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ con $v_j = \sum_{i=1}^{3} b_{ij} e_i$. In particolare,

$$\Omega(e_1, e_2, e_3) = +1.$$

Dalle proprietà del determinante segue Ω è 3-lineare alternante. Il prodotto vettoriale $v_1 \wedge v_2$ è il vettore definito da

$$v_1 \wedge v_2 \cdot w = \Omega(v_1, v_2, w) \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathbb{R}^3,$$

ovvero il prodotto misto

$$v_1 \wedge v_2 \cdot v_3 = \det(v_1, v_2, w). \tag{1.6}$$

Quindi, (v_1, v_2, v_3) è una base positiva se $\Omega(v_1, v_2, v_3) > 0$ (ossia, il prodotto misto $v_1 \wedge v_2 \cdot v_3 > 0$), mentre è una base negativa se $\Omega(v_1, v_2, v_3) < 0$ (ossia, il prodotto misto $v_1 \wedge v_2 \cdot w_3 < 0$). Di conseguenza Ω determina l'orientazione di $\mathbb{R}^3$. Infine, osserviamo che il valore assoluto

$$|\Omega(v_1, v_2, v_3)| = \text{volume}(\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)),$$

dove $\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$ è il parallelepipedo (cf. Fig. 8) avente come spigoli concorrenti nello stesso vertice p i tre vettori applicati nello stesso punto p.

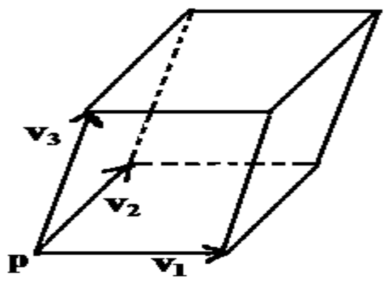

Figura 8

Pertanto, la 3-forma Ω è anche detta *elemento di volume* di $\mathbb{R}^3$.

Siano ora v_p, w_p vettori di $T_p\,\mathbb{R}^3$, in tal caso si pone

$$v_p \wedge w_p := (v \wedge w)_p.$$

Proposizione 1.68. *Siano $v_{1_p}, v_{2_p}, v_{3_p} \in T_p\,\mathbb{R}^3$, ed F un'isometria di $\mathbb{R}^3$. Allora*

(a) $F_{*_p}v_{1_p} \wedge F_{*_p}v_{2_p} \cdot F_{*_p}v_{3_p} = sign(F)\ v_{1_p} \wedge v_{2_p} \cdot v_{3_p} = sign(F)\ v_1 \wedge v_2 \cdot v_3,$

(b) $F_{*_p}v_p \wedge F_{*_p}w_p = sign(F)\ F_{*_p}(v \wedge w)_p.$

Dimostrazione. (a) Poniamo $v_j = \sum_i b_{ij}e_i$, $j = 1, 2, 3$, e sia $B = (b_{ij})$. L'isometria F è del tipo $F = A + a$, con A matrice ortogonale, e soddisfa (per ogni $j = 1, 2, 3$)

$$F_{*_p}v_{j_p} = (Av_j)_{F(p)} = \textstyle\sum_i c_{kj}\, e_{kF(p)} \quad \text{dove la matrice } C = (c_{ij}) = A \cdot B.$$

Pertanto, usando la (1.6) e tenendo conto che $sign(F) = \det A$, si ottiene

$$F_{*_p}v_{1_p} \wedge F_{*_p}v_{2_p} \cdot F_{*_p}v_{3_p} = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = sign(F)\, v_1 \wedge v_2 \cdot v_3.$$

(b) Siccome $\{F_{*_p} e_{i_p}\}$ è una base ortonormale di $T_{F(p)}\,\mathbb{R}^3$, usando la precedente proprietà (a) e il fatto che F_{*_p} conserva il prodotto scalare, si ha

$$\begin{aligned} F_{*_p} v_p \wedge F_{*_p} w_p &= \sum_{i=1}^{3} \Big(F_{*_p} v_p \wedge F_{*_p} w_p \cdot F_{*_p} e_{i_p} \Big) F_{*_p} e_{i_p} \\ &= \sum_i sign(F)(v \wedge w \cdot e_i) F_{*_p} e_{i_p} \\ &= sign(F) \sum_i \big(F_{*_p}(v \wedge w)_p \cdot F_{*_p} e_{i_p} \big)\, F_{*_p} e_{i_p} \\ &= sign(F)\ F_{*_p}(v \wedge w)_p\,. \end{aligned}$$

□

Esercizio 1.69. Sia $(\bar{e}_i)$ una base di $\mathbb{R}^3$, $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}\, e_i$, $P = (p_{ij})$ matrice di cambiamento di base. Sia $\bar{\Omega}$ la 3-forma definita dalla base $(\bar{e}_i)$:

$$\bar{\Omega}(v_1, v_2, v_3) := \det(\bar{b}_{ij}), \quad \text{equivalentemente } \bar{\Omega}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1,$$

per ogni $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ con $v_j = \sum_{i=1}^{3} \bar{b}_{ij}\, \bar{e}_i$.

Trovare il legame tra Ω (3-forma definita dalla base canonica) e $\bar{\Omega}$. Inoltre, osservare che il risultato vale anche per lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Soluzione: Si trova che $\bar{\Omega} = \lambda\, \Omega$, dove $\lambda = \det(P^{-1})$. Di conseguenza,

$$\bar{\Omega} = \lambda\, \Omega, \quad \lambda > 0 \iff \text{la base } (\bar{e}_i) \text{ è equiversa alla base canonica.}$$

1.6. Campi vettoriali lungo curve

Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \big(x_1(t), ..., x_n(t)\big)$. Un *campo vettoriale lungo* γ è un'applicazione

$$X : I \longrightarrow \dot{\bigcup_{t \in I}} T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^n, \ t \longmapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}\, R^n.$$

I campi vettoriali definiti della base canonica $(E_1, ..., E_n)$ definiscono campi vettoriali lungo γ:

$$E_i(t) := E_{i\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}\, \mathbb{R}^n \quad \text{per ogni} \quad i = 1, ..., n.$$

Poiché $X(t) \in T_{\gamma(t)}\, \mathbb{R}^n$, si può scrivere

$$X(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} X^i(t)\, E_i(t) \text{ per ogni } t \in I.$$

Le funzioni $X^i(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dicono *funzioni componenti* di X (rispetto alla base canonica). Se X, Y sono campi vettoriali lungo γ, e $\lambda \in \mathbb{R}$, si definiscono in modo naturale i campi vettoriali $X + Y$ e λX lungo γ.

Definizione 1.70. *Un campo vettoriale X definito lungo γ si di dice* differenziabile *se le sue funzioni componenti $X^i(t)$ sono differenziabili.*

Esempi 1.71. Il campo di vettori velocità

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, ..., \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \right)_{\gamma(t)} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i'(t) E_i(t)$$

e il campo di vettori accelerazione

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\gamma(t)} = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i''(t) E_i(t),$$

sono campi vettoriali differenziabili lungo γ.

Se X, Y sono campi vettoriali lungo γ,

$$X(t) = \textstyle\sum_{i=1}^n X^i(t) E_i(t) \ \text{ e } \ Y(t) = \sum_{i=1}^n Y^i(t) E_i(t),$$

ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, si possono definire i seguenti prodotti.

• Il prodotto fX è il campo vettoriale

$$(fX)(t) := f(t)X(t).$$

Quindi fX ha funzioni componenti $\big(f(t)X^1(t), ..., f(t)X^n(t)\big)$. In particolare, se X ed f sono differenziabili, allora anche fX è differenziabile .

• Il prodotto scalare di $X(t)$ e $Y(t)$ è la funzione

$$(X \cdot Y)(t) = X(t) \cdot Y(t) = \textstyle\sum_{i=1}^n X^i(t) Y^i(t).$$

In particolare, se $X(t), Y(t)$ sono differenziabili, la funzione $(X \cdot Y)(t)$ è differenziabile.

• Assumiamo $n = 3$. In tal caso, il prodotto vettoriale di $X(t)$ e $Y(t)$ è il campo vettoriale

$$X \wedge Y : I \to \dot{\bigcup_{t \in I}} T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3, \ t \mapsto (X \wedge Y)(t) := X(t) \wedge Y(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3 .$$

Quindi

$$(X \wedge Y)(t) = \begin{vmatrix} E_1(t) & E_2(t) & E_3(t) \\ X^1(t) & X^2(t) & X^3(t) \\ Y^1(t) & Y^2(t) & Y^3(t) \end{vmatrix},$$

dove il determinante viene calcolato rispetto agli elementi della prima riga. In particolare, se $X(t), Y(t)$ sono differenziabili, il campo vettoriale $(X \wedge Y)(t)$ è differenziabile.

Definizione 1.72. *Sia* $X(t) = \big(X^1(t), ..., X^n(t)\big)_{\gamma(t)}$ *un campo vettoriale differenziabile definito lungo* γ. *Il **derivato** di* $X(t)$ *è il campo vettoriale*

$$\frac{dX}{dt}(t) = \big((X^1)'(t), ..., (X^n)'(t)\big)_{\gamma(t)}$$

che indichiamo anche con $X'(t)$.

Si noti che se $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, allora $Y(t) = Y(\gamma(t)$ è differenziabile lungo $\gamma(t)$ e, usando la (1.4) e la (1.3), si ottiene

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} Y = \big(\dot{\gamma}(t)(Y^1), ..., \dot{\gamma}(t)(Y^n)\big) = \left(\frac{\mathrm{d}Y^1}{\mathrm{d}t}, ..., \frac{\mathrm{d}Y^n}{\mathrm{d}t}\right) = Y'(t). \tag{1.7}$$

Esempio 1.73. L'accelerazione $\ddot{\gamma}(t)$ è il campo vettoriale derivato di $\dot{\gamma}(t)$.

Denotiamo con $\mathfrak{X}(\gamma)$ lo spazio vettoriale reale di tutti i campi vettoriali differenziabili definiti lungo γ. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora $X \cdot Y, X \wedge Y, fX \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Rispetto alla somma $X + Y$ e al prodotto fX, $\mathfrak{X}(\gamma)$ ha anche una struttura di $\mathcal{F}(I)$-modulo, dove $\mathcal{F}(I) = C^\infty(I)$. L'operatore

$$\frac{d}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma), X(t) \mapsto X'(t),$$

è un endomorfismo che soddisfa anche le seguenti proprietà:

(1) $(X \cdot Y)'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t)$;

(2) per $n = 3$, il derivato $(X \wedge Y)'(t) = (X' \wedge Y)(t) + (X \wedge Y')(t)$;

(3) $(fX)' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$.

Infine, se $t = t(s)$ è un cambiamento di parametro, allora il derivato di $X(s) = X\big(t(s)\big)$ soddisfa

$$X'(s) = t'(s)X'(t(s)).$$

Infatti, le funzioni componenti $X^i(s) = X^i(t(s))$ soddisfano

$$(X^i)'(s) = t'(s)(X^i)'(t).$$

Esercizio 1.74. Determinare un campo vettoriale unitario $X(t)$ definito lungo l'elica $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ sapendo che $X(t)$ è ortogonale a $\dot{\gamma}(t)$ e $\ddot{\gamma}(t)$.

Soluzione: $X(t)$ è parallelo al prodotto vettoriale $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$, dove $\dot{\gamma}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)_{\gamma(t)}$ e $\ddot{\gamma}(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)_{\gamma(t)}$. Siccome

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)_{\gamma(t)},$$

allora deve essere $X(t) = f(t)\big(\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\big)(t) = f(t)(\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)_{\gamma(t)}$ per qualche funzione $f(t)$. D'altronde $X(t)$ è unitario: $\|X(t)\|^2 = 1$, per cui deve essere $f^2(t)(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1) = 1$, e quindi $f(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pertanto $X(t) = \pm(\sqrt{2}/2)(\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)_{\gamma(t)}$.

Proposizione 1.75. *Sia* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva differenziabile e sia* $X(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$*. Allora,*

$$\|X(t)\| = \text{cost} \iff X(t) \perp X'(t).$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$X(t) \cdot X(t) = \text{cost} \Leftrightarrow 0 = \big(X(t) \cdot X(t)\big)' = 2X(t) \cdot X'(t) \Leftrightarrow X(t) \perp X'(t)\,.$$

Corollario 1.76. *Se* $\gamma(s)$ *è una curva differenziabile parametrizzata a velocità scalare costante, allora* $\ddot{\gamma}(s) \perp \dot{\gamma}(s)$*.*

Definizione 1.77. *Un campo vettoriale $X(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si dice* ***parallelo*** *lungo γ se il suo derivato $X'(t) = 0$ (vettore nullo di $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$) per ogni $t \in I$.*

Se $X(t) = \big(X^1(t), ..., X^n(t)\big)_{\gamma(t)}$, allora $X(t)$ è parallelo se e solo se le sue funzioni componenti $X^i(t)$ sono costanti.

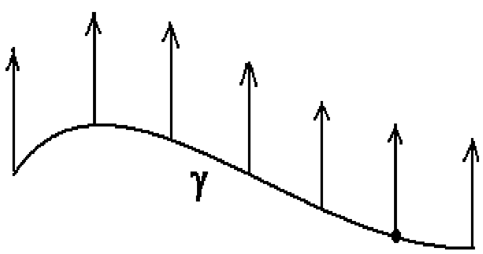

FIGURA 9. Campo vettoriale parallelo.

Proposizione 1.78. *Se $\gamma(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva differenziabile, allora*

(1) $\dot\gamma(t) = 0_{T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n} \iff \gamma(t)$ *è una curva costante, cioè* $\gamma(t) = p_0$ *per ogni* t;

(2) $\ddot\gamma(t) = 0_{T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n} \iff$ *esiste* $v \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $\gamma(t) = p_0 + tv$ *per ogni* t.

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio. □

Dalla proprietà (2) segue che $\ddot\gamma(t) = 0$ implica che $\gamma(t)$ è una (parte di) retta (quando $v \neq 0$). Tuttavia, in generale, non vale il viceversa. Infatti, la proprietà $\ddot\gamma(t) = 0$ dipende anche dalla parametrizzazione di γ. Ad esempio, la curva γ parametrizzata da $\gamma(t) = (t^3, t^3, 0, ..., 0)$, $t \in]0,1[$, è un segmento di retta che ha accelerazione non nulla.

Il campo vettoriale $(F_*X)(t)$

Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile e sia $X(t)$ campo vettoriale differenziabile lungo una curva parametrizzata $\gamma(t)$. Denotiamo con F_*X il campo vettoriale lungo $\widetilde\gamma(t) = F\big(\gamma(t)\big)$ definito da

$$(F_*X)(t) := F_{*_{\gamma(t)}}X(t), \quad F_{*_{\gamma(t)}} : T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\widetilde\gamma(t)}\mathbb{R}^n.$$

Se $F = (F_1, ..., F_n)$, applicando il Teorema 1.49, risulta

$$(F_*X)(t) = \sum_{j=1}^n \big(X(t) \cdot (\nabla F_j)_{\gamma(t)}\big) E_{j_{\widetilde\gamma(t)}} = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\gamma(t)) X^i(t)\Big) E_{j_{\widetilde\gamma(t)}},$$

dove $X^1(t), ..., X^n(t)$ sono le funzioni componenti di $X(t)$. Tale formula implica che $(F_*X)(t)$ è un campo vettoriale differenziabile. Quindi,

$$F_* : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\tilde\gamma)$$

è un endomorfismo tra spazi vettoriali.

Se F è un'isometria di $\mathbb{R}^n$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$, allora

(1) $F_*X \cdot F_*Y = X \cdot Y$, cioè $F_{*_{\gamma(t)}} X(t) \cdot F_{*_{\gamma(t)}} Y(t) = X(t) \cdot Y(t)$ per ogni t.

Se F è un'isometria di $\mathbb{R}^3$, γ una curva differenziabile di $\mathbb{R}^3$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$, allora

(2) $F_*X \wedge F_*Y \cdot F_*Z = sign(F)\, X \wedge Y \cdot Z$,

(3) $F_*(X \wedge Y) = sign(F)\,(F_*X \wedge F_*Y)$.

Tali proprietà seguono dalla Proposizione 1.68.

Teorema 1.79. *Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Se $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione affine, allora*

(1) il differenziale F_* e l'operatore d/dt commutano:

$$(F_*\ X)'(t) = F_*X'(t), \qquad \textit{ossia} \qquad d/dt \circ F_* = F_* \circ d/dt;$$

(2) posto $\widetilde{\gamma}(t) = F\big(\gamma(t)\big)$, si ha

$$\ddot{\widetilde{\gamma}}(t) = F_*\ddot{\gamma}(t) \quad e \quad \dddot{\widetilde{\gamma}}(t) = F_*\dddot{\gamma}(t).$$

Inoltre, se F è una trasformazione affine, allora

$$\ddot{\widetilde{\gamma}}(t) = 0 \iff \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

In particolare, queste proprietà valgono per F isometria di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia F un'applicazione affine di $\mathbb{R}^n$, $F = A + a$, $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(1) Se $X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t)E_i(t)$, allora $X'(t) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t} E_i(t)$. Applicando la Proposizione 1.58, risulta

$$F_*X'(t) = \big(AX'(t)\big)_{\widetilde{\gamma}(t)} = \textstyle\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dfrac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t} \tilde{E}_i(t)$$

dove $\tilde{E}_i(t) = E_{i_{\widetilde{\gamma}(t)}}$. Ne segue che F_*X' è un campo vettoriale differenziabile lungo $\widetilde{\gamma}(t)$. Anche F_*X è un campo vettoriale differenziabile lungo $\widetilde{\gamma}(t)$ e

$$(F_*X)(t) = F_*X(t) = \big(AX(t)\big)_{\widetilde{\gamma}(t)} = \textstyle\sum_{i,j=1}^n A_{ij} X^j(t)\, \tilde{E}_i(t).$$

Ciò implica

$$\begin{aligned}(F_*X)'(t) &= \sum_{ij} X^j \frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t} \tilde{E}_i(t) + \sum_{ij} A_{ij} \frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t} \tilde{E}_i(t) \\ &= \sum_{ij} A_{ij} \frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t} \tilde{E}_i(t) = F_*X'(t).\end{aligned}$$

(2) Se $\widetilde{\gamma}(t) = F\big(\gamma(t)\big)$, allora $\dot{\widetilde{\gamma}}(t) = F_*\dot{\gamma}(t)$. Pertanto, usando anche la proprietà (1), si ha

$$\ddot{\widetilde{\gamma}}(t) = \big(\dot{\widetilde{\gamma}}\big)'(t) = \big(F_*\dot{\gamma}(t)\big)' = F_*\big(\dot{\gamma}(t)\big)' = F_*\ddot{\gamma}(t). \tag{1.8}$$

Inoltre, usando la (1.8) e la precedente proprietà (1), si ha

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(t) \;=\; \big(\ddot{\tilde{\gamma}}(t)\big)' = \big(F_*\ddot{\gamma}(t)\big)' = F_*(\ddot{\gamma}(t))' \;=\; F_*\dddot{\gamma}(t).$$

In particulare, se F è una trasformazione affine, quindi $A \in GL(n, \mathbb{R})$, allora

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = 0 \iff F_*\ddot{\gamma}(t) = 0 \iff \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

□

Osservazione 1.80. Se F è una trasformazione affine, allora F trasforma rette in rette. Infatti, se γ è una (parte di) retta, γ si può parametrizzare con $\gamma(t) = p_0 + tv$, $t \in I$, $v \neq 0$, allora $\ddot{\gamma}(t) = 0$ e quindi $\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = F_*\ddot{\gamma}(t) = 0$ per ogni t. Pertanto $\widetilde{\gamma}(t)$ è una (parte di) di retta. Più precisamente, se $F = A + a$ con $A \in GL(n, \mathbb{R})$, allora $\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{p}_0 + t\widetilde{v}$, dove $\widetilde{p}_0 = Ap_0 + a$ e $\widetilde{v} = Av \neq 0$.

Siano F una trasformazione affine di $\mathbb{R}^n$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Se $\gamma(t)$ è una curva differenziabile di $\mathbb{R}^n$, posto $Y(t) = Y(\gamma(t))$, dalla (1.7) si ha

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} Y = Y'(t). \tag{1.9}$$

Determiniamo il campo vettoriale $F_*\bar{\nabla}_X Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Fissato $q \in \mathbb{R}^n$ e quindi $p = F^{-1}(q)$, sia γ una curva differenziabile con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. La curva $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ soddisfa $\tilde{\gamma}(0) = F(p)$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = F_{*p}X_p$. Applicando la (1) del Teorema 1.79 e la (1.9), otteniamo

$$\begin{aligned} \big(F_*\bar{\nabla}_X Y\big)_q &= F_{*p}\left(\bar{\nabla}_X Y\right)_p = F_{*p}\bar{\nabla}_{X_p} Y = F_{*p}\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(0)} Y \\ &= F_{*p}Y'(0) = (F_*Y)'(0) = \bar{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(0)} F_*Y \\ &= \bar{\nabla}_{F_{*p}\dot{\gamma}(0)} F_*Y = \bar{\nabla}_{F_{*p}X_p} F_*Y \\ &= \big(\bar{\nabla}_{F_*X} F_*Y\big)_q . \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo provato il seguente teorema

Teorema 1.81. *Se F è una trasformazione affine, allora*

$$F_*\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{F_*X} F_*Y$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 1.82. Si verifichi (con un esempio) che se F non è un'applicazione affine, la proprietà (1) del Teorema 1.79 non vale.

Suggerimento: si consideri la curva $\gamma(t) = (t, t, 0)$, il campo vettoriale $X(t) = \dot{\gamma}(t)$ e l'applicazione $F(x, y, z) = (e^x, y, z)$.

Esercizio 1.83. Si verifichi (con un esempio) che se F è applicazione affine, ma non trasformazione affine, in generale F non trasforma rette in rette.

Suggerimento: si consideri la retta $\gamma(t) = (t, t, -2t)$ e l'applicazione affine $F = A + a$, dove A è una matrice di ordine 3 avente solo la prima riga non nulla e definita da $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$.

Esercizio 1.84. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile (risp. un diffeomorfismo) che soddisfi la proprietà (1) del Teorema 1.79 :

$$(F_* \, X)'(t) = F_* X'(t),$$

per ogni curva differenziabile $\gamma(t)$ e per ogni $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Si verifichi che F è una applicazione affine (risp. una trasformazione affine).

Suggerimento: Trovare le espressioni di $(F_* \, X)'(t)$ e $F_* X'(t)$, quindi imporre che coincidano prendendo in particolare $X(t) = E_1(t)$, $X(t) = E_2(t)$, ..., e $X(t) = E_n(t)$. In questo modo si riesce a provare che le funzioni della matrice jacobiana di F sono funzioni costanti.

Esercizio 1.85. Si consideri il campo di vettori $X(t) = (t, 1 - t^2, 1 + t^2)_{\gamma(t)}$ definito lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$, e sia F l'isometria lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Determinare il campo di vettori $\bar{X}(t) = (F_* X)(t)$ lungo la curva $\bar{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ e il suo derivato $\bar{X}'(t)$.

Soluzione: La curva $\bar{\gamma}(t) = \big(-\cos t, (\operatorname{sen} t - 2t)/\sqrt{2}, (\operatorname{sen} t + 2t)/\sqrt{2}\big)$. Il campo vettoriale $\bar{X}(t) = (AX)_{\bar{\gamma}(t)} = (-t, \sqrt{2}\, t^2, 2)_{\bar{\gamma}(t)}$ e il suo derivato $\bar{X}'(t) = (-1, 2\sqrt{2}\, t, 0)_{\bar{\gamma}(t)} = (AX')_{\bar{\gamma}(t)} = (F_* X')(t)$.