Capitolo 5

Serie di Laurent

Mentre la serie di Taylor è lo strumento più idoneo per lo studio di una funzione olomorfa nell'intorno di un suo punto di regolarità, per il suo studio in un punto singolare isolato z_0 serve lo sviluppo di Laurent che permette di rappresentare la funzione mediante una serie di potenze positive e negative di $\zeta - z_0$, cioè aventi come esponenti numeri interi sia positivi che negativi. Sussiste il seguente teorema.

5.1 Sviluppo in una corona circolare

Teorema 5.1.1 (sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare)**.** *Sia $f \in H(\Omega)$ e sia $C(z_0, r_1, r_2)$ la corona circolare aperta:*

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ 0 < r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

tale che $\overline{C}(z_0, r_1, r_2) \subset \Omega$. Allora:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} (\zeta - z_0)^{-k} \\ &\Big(= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k \Big) \end{aligned} \tag{5.1}$$

per ogni $\zeta \in C(z_0, r_1, r_2)$, dove:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz \quad \forall \, k \in \mathbb{Z}, \ \forall \, r \in [r_1, r_2] \, . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente che gli a_k sono indipendenti dalla scelta di $r \in [r_1, r_2]$.

Sia $r \in]r_1, r_2[$. La funzione:

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

è olomorfa nelle corone circolari $C(z_0, r_1, r)$ e $C(z_0, r, r_2)$, le cui frontiere orientate positivamente sono:

$$\begin{aligned} +\partial C(z_0, r_1, r) &= (-\partial B_{r_1}(z_0)) \cup (+\partial B_r(z_0)) \\ +\partial C(z_0, r, r_2) &= (-\partial B_r(z_0)) \cup (+\partial B_{r_2}(z_0)) \end{aligned}$$

Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 si ha:

$$\int_{+\partial C(z_0,r_1,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

e, inoltre,

$$\int_{+\partial C(z_0,r,r_2)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \int_{+\partial B_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

Perciò per ogni $r \in [r_1, r_2]$ l'integrale curvilineo sulla circonferenza di raggio r assume lo stesso valore, il che prova l'indipendenza degli a_k da r.

Sia ora $\zeta \in C(z_0, r_1, r_2)$ (tale punto appartiene $B_{r_2}(z_0)$ ma non a $B_{r_1}(z_0)$, quindi $|\zeta - z_0| > r_1$ e $|\zeta - z_0| < r_2$). Allora, per 2.8.4:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C(z_0,r_1,r_2)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz}_{(II)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per il Teorema di Taylor 3.3.2

$$(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k, \tag{5.4}$$

con gli a_k espressi da (5.2) per $k \in \mathbb{N}_0$.

Per l'integrale (II), poiché $|\zeta - z_0| > r_1$, non si può applicare direttamete il Teorema di Taylor; risulta tuttavia:

$$\begin{aligned}
(II) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0)\left[1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]}\,dz
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione riconosciamo la somma della serie geometrica di ragione $\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}$, con modulo $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$ (in quanto $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$), perciò (per la convergenza uniforme della serie) si ha:

$$\begin{aligned}
(II) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0)} \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j dz \overset{\substack{k=j+1\\ \downarrow}}{=} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^{k-1}}{(\zeta-z_0)^k}\,dz = \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(\zeta - z_0)^k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z)(z-z_0)^{k-1}\,dz \quad .
\end{aligned}$$

Ponendo ora

$$a_{-k} := \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z)(z-z_0)^{k-1}\,dz$$

e sostituendo nell'espressione precedente otteniamo:

$$(II) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(\zeta - z_0)^{-k} \tag{5.5}$$

Inserendo (5.4) e (5.5) in (5.3) si ha la tesi. □

Osservazione 5.1.2. La rappresentazione (5.2) è unica. La convergenza di (5.1) è uniforme sui compatti contenuti in $C(z_0, r_1, r_2)$.

5.2 Sviluppo in serie di Laurent in un punto singolare isolato al finito. Teorema di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili

Il Teorema 5.1.1 si estende ad una funzione f olomorfa nel disco bucato $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, cioè la (5.1) è valida in ogni corona circolare $C(z_0, r, R)$, con $0 < r < R$ (basta applicare 5.1.1 con $r_2 = R$ e $r_1 \to 0$) e risulta:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(\zeta - z_0)^{-k} \quad \forall \zeta \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \tag{5.6}$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, r \in\,]0, R[\,.^{1} \tag{5.7}$$

Chiameremo rispettivamente *parte regolare* e *parte singolare* (o *caratteristica*) di f la prima e la seconda serie in (5.6).

Definizione 5.2.1 (singolarità isolate al finito: eliminabili, polari, essenziali)**.** Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$. Il punto z_0 si dice *singolarità isolata* per f.

- z_0 si dice singolarità *eliminabile* se:

  $$a_{-k} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

  cioè se f ha un prolungamento olomorfo a tutto $B_R(z_0)$;

- z_0 si dice singolarità *polare* (o polo) di ordine p se esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che:

  $$a_{-p} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{-k} = 0 \quad \forall\, k > p$$

  cioè la parte singolare è somma di un numero finito di addendi non nulli;

- z_0 si dice singolarità *essenziale* per f se la parte singolare di f è somma di infiniti addendi non nulli.

[1] Osserviamo che qui i coefficienti a_k, con $k \in \mathbb{N}_0$, non possono identificarsi con $\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, non essendo f olomorfa in z_0.

Teorema 5.2.2 (di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili)**.**
Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ *e limitata in* $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$*. Allora* z_0 *è una singolarità eliminabile per* f*.*

Dimostrazione. Per (5.7), i coefficienti a_k della serie di Laurent di f hanno espressione:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, r \in\,]0, R[$$

Sia $M > 0$ tale che $|f| \leq M$ in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Allora:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{k+1}}\, ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^{k+1}}\, ds = \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r^{k+1}} \cdot 2\pi r = \\ &= \frac{M}{r^k} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, r \in\,]0, R[\end{aligned}$$

Per $r \to 0^+$ e $k < 0$ risulta $a_k = 0$. Dunque f è rappresentata da una serie di potenze (che è olomorfa nel suo disco di convergenza, per 3.3.5), perciò f ha un prolungamento olomorfo in z_0. □

Vediamo gli sviluppi in serie di Laurent di alcune funzioni.

1. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Usiamo la decomposizione in frazioni parziali per scrivere la serie di Laurent di f negli aperti indicati. Risulta:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}.$$

– Per $0 < |z| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} z^k - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}}_{\text{parte singolare}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right) z^k}_{\text{parte regolare}}. \end{aligned}$$

– Per $0 < |z-1| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(1-z)} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z-1)} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(z-1)^k = \\ &= -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k-1}{2}\cdot(z-1)^k = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{z-1}}_{\text{parte singolare}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(z-1)^{2k+1}}_{\text{parte regolare}}. \end{aligned}$$

– Per $0 < |z-2| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-(2-z)} - \frac{1}{1+(z-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2} = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z-2}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}}_{\text{parte singolare}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2^{k+2}}-1\right)(z-2)^k}_{\text{parte regolare}}. \end{aligned}$$

I tre punti di singolarità sono poli semplici per f.

2. Consideriamo:

$$\frac{\sin z}{z}.$$

Ricordando lo sviluppo in serie di M^{c}Laurin di $\sin z$, si ha:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

La parte singolare dello sviluppo della funzione è nulla: pertanto 0 è singolarità eliminabile.

In alternativa, verificare anche con 5.2.2 che $\dfrac{\sin z}{z}$ ha una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$.

3. Consideriamo $e^{\frac{1}{z}}$.

Ricordando lo sviluppo in serie di M^{c}Laurin di e^z, si ha:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{z})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

La parte singolare ha infiniti addendi: $z_0 = 0$ è quindi una singolarità essenziale.

5.3 Caratterizzazione delle singolarità isolate

Proposizione 5.3.1 (caratterizzazione dei poli). *Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$.*

$$z_0 \text{ polo di ordine } p \text{ per } f \;\Leftrightarrow\; \exists \lim_{\zeta \to z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p = a_{-p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$. Per ipotesi $a_{-p} \neq 0$ e $a_{-k} = 0$ per ogni $k > p$, cioè:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{p} a_{-k}(\zeta - z_0)^{-k} \quad \forall\, \zeta \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \tag{5.8}$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{p} a_{-k}(\zeta - z_0)^{p-k} = \\ &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ &+ a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \ldots + a_{-p} \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \to z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p = \lim_{\zeta \to z_0} (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ + a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \ldots + a_{-p} = a_{-p} \neq 0, \end{aligned}$$

(tenuto conto della convergenza della serie di potenze).
$\Leftarrow$. Dall'ipotesi segue che $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$ è localmente limitata, quindi esistono $\delta \in \,]0, R[$ e $M > 0$ tali che, per $|\zeta - z_0| < \delta$, si ha $|f(\zeta)(\zeta - z_0)^p| \leq M$.

Proviamo che $a_{-k} = 0$ per ogni $k > p$. Sia $k = p + j$, con $j \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $r \in]0, \delta[$:

$$\begin{aligned} a_{-k} = a_{-p-j} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1-p-j}}\, d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{p+j-1}\, d\zeta \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} |a_{-k}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)(\zeta - z_0)^{p+j-1}|\, ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} M|\zeta - z_0|^{j-1}\, ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot M r^{j-1} 2\pi r = M r^j \quad \forall\, r \in]0, \delta[\end{aligned}$$

Per $r \to 0^+$ risulta $|a_{-k}| = 0$, quindi $a_{-k} = 0$ per ogni $k > p$, il che prova che z_0 è polo di ordine p. □

Utile per l'identificazione dei poli è il seguente risultato.

Proposizione 5.3.2 (identificazione dei poli)**.**
Sia $f \in H(B_R(z_0))$. Se z_0 è uno zero di ordine p per f, allora la funzione $\frac{1}{f}$, olomorfa in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, ha in z_0 un polo di ordine p.

Se z_0 è un polo di ordine p per $\frac{1}{f}$, allora z_0 è uno zero di ordine p per f.

Dimostrazione. Segue dal fatto che:

$$\begin{aligned} &z_0 \text{ zero di ordine } p \text{ per } f \overset{(4.2)}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{\zeta \to z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{f(\zeta)}(\zeta - z_0)^p \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \overset{5.3.1}{\Leftrightarrow} z_0 \text{ polo di ordine } p \text{ per } \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

□

1. Sia:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2 \mathrm{Log} z}.$$

Determiniamo la natura della singolarità di f in $z_0 = 1$.

Poiché

$$\mathrm{Log} z = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \ldots, \quad |z - 1| < 1,$$

il denominatore di $f(z)$ ha uno zero di ordine 3 in $z_0 = 1$. Pertanto $f(z)$ ha un polo di ordine 3 in $z_0 = 1$.

Teorema 5.3.3 (caratterizzazione dei poli indipendentemente dall'ordine)**.** *Sia* $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$.

$$z_0 \text{ polo per } f \iff \exists \lim_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| = +\infty.$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$. Sia p l'ordine del polo z_0. Allora, per 5.3.1:

$$\exists \lim_{\zeta \to z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p = a_{-p} \neq 0,$$

quindi

$$\exists \lim_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{|f(\zeta)(\zeta - z_0)^p|}{|\zeta - z_0|^p} = +\infty.$$

$\Leftarrow$. Consideriamo la funzione olomorfa in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$g(\zeta) := \frac{1}{f(\zeta)}.$$

Vale:

$$\lim_{\zeta \to z_0} |g(\zeta)| = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{|f(\zeta)|} = 0.$$

Pertanto la funzione g è limitata in un intorno di z_0, z_0 escluso. Allora, per il teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili 5.2.2, g è olomorfa in un intorno di z_0 (z_0 incluso) e $g(z_0) = 0$. Essendo z_0 uno zero per $g = \frac{1}{f}$, dalla 5.3.2 segue che z_0 è un polo per f. $\square$

Il risultato che caratterizza le singolarità essenziali isolate è il seguente.

Teorema 5.3.4 (caratterizzazione delle singolarità essenziali isolate)**.** *Sia* $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$.

$$z_0 \text{ \textit{singolarità essenziale per} } f$$
$$\Updownarrow$$
$$\nexists \lim_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| \quad \left(\liminf_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| = 0 \text{ \textit{e} } \limsup_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| = +\infty \right).$$

2. Provare, con 5.3.4, che la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in $z_0 = 0$.

5.4 Comportamento di una funzione olomorfa all'infinito (complesso)

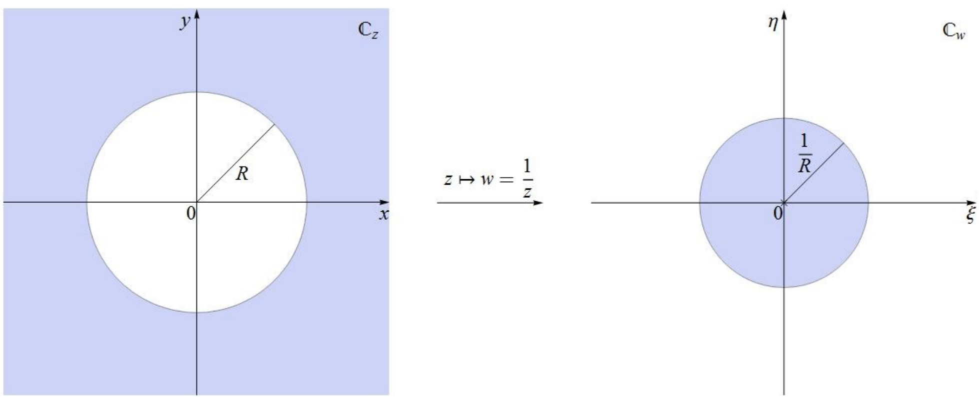
Sia Ω_∞ l'aperto (*un intorno dell'infinito complesso*):

$$\Omega_\infty := \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia Ω_w l'aperto:

$$\Omega_w := \left\{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < \frac{1}{R}\right\}$$

che può essere ottenuto da Ω_∞ mediante la trasformazione (conforme) $w = \dfrac{1}{z}$.



Definizione 5.4.1 (singolarità all'infinito)**.** Sia $f(z) \in H(\Omega_\infty)$ e definiamo:

$$\varphi(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) \in H\left(B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}\right)$$

Diremo che f ha una *singolarità all'infinito* eliminabile, polare o essenziale se φ ha una singolarità eliminabile, polare o essenziale (rispettivamente) in $w = 0$.

Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent di φ in $B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}$:

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} w^{-k} \quad \forall\, w \in B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}$$

Tramite la trasformazione $w = \dfrac{1}{z}$ otteniamo la serie di Laurent della funzione f:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^{k} \quad \forall\, z \in \Omega_\infty \tag{5.9}$$

La prima serie si dice *parte regolare di f all'infinito*, la seconda *parte singolare di f all'infinito*. È evidente che, considerata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^k$$

parte singolare di f all'infinito, allora

(i) $z_0 = \infty$ è singolarità eliminabile per f se e solo se:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^k = 0$$

(ii) $z_0 = \infty$ è polo per f se e solo se la sua parte singolare ha un numero finito di addendi non nulli.

(iii) $z_0 = \infty$ è singolarità essenziale per f se e solo se la parte singolare di f ha infiniti addendi non nulli.

5.5 Comportamento in un intorno di una singolarità essenziale isolata: Teorema di Casorati -Weierstrass e Teorema di Picard

Teorema 5.5.1 (di Casorati-Weierstrass). *Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$, con z_0 singolarità essenziale isolata per f (z_0 può essere al finito oppure coincidere con l'infinito complesso), e sia $w \in \mathbb{C}$ fissato ad arbitrio. Allora, comunque si assegni un numero reale $\varepsilon > 0$ e un intorno $I(z_0)$ di z_0 , esistono infiniti punti $z_\varepsilon \in I(z_0) \setminus \{z_0\}$ per i quali riesce:*

$$|f(z_\epsilon) - w| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Fissato $w \in \mathbb{C}$, la funzione $f(z) - w$ ha, come f, una singolarità essenziale in z_0; allora, da 5.3.4, si ha:

$$\liminf_{z \to z_0} |f(z) - w| = 0$$

e la tesi segue dalla definizione di minimo limite. □

Il teorema afferma che, in ogni intorno di una sua singolarità essenziale isolata z_0, la funzione f approssima, in infiniti punti, e con la precisione che si vuole, tutti i valori complessi.

Il successivo teorema fornisce un risultato più preciso del Teorema di Casorati-Weierstrass.

Teorema 5.5.2 (di Picard)**.** *Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$, con z_0 singolarità essenziale isolata per f. Allora, per ogni $w \in \mathbb{C}$, eccettuato al più un valore finito $w_0 \in \mathbb{C}$ (*valore eccezionale*), l'equazione:*

$$f(z) = w \tag{5.10}$$

è soddisfatta da infiniti valori di z in ogni intorno di z_0.

Illustriamo ora il Teorema di Picard con il seguente esempio.

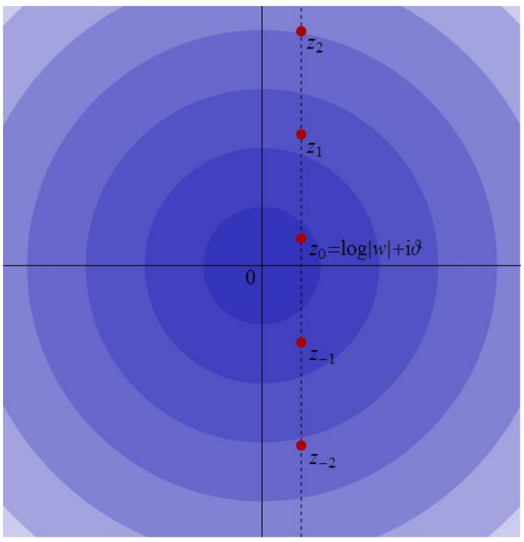
Consideriamo

$$f(z) = e^z.$$

L'unica singolarità di f è all'infinito complesso ed è (di tipo) essenziale. In questo caso l'equazione (5.10) $e^z = w$ ammette, in corrispondenza di $w \neq 0$, le infinite soluzioni

$$z_k = \log|w| + i(\mathrm{Arg}(w) + 2k\pi) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

che si trovano su una retta parallela all'asse immaginario ed a distanza 2π l'una dall'altra.



Evidentemente, comunque si fissi un intorno dell'infinito complesso, cadono sempre infinite soluzioni nell'intorno stesso. Osserviamo che il valore eccezionale è $w_0 = 0$.