Capitolo 4

Funzioni intere e teoremi di Liouville. Zeri di una funzione olomorfa. Prolungamento olomorfo

4.1 Primo e secondo teorema di Liouville

Teorema 4.1.1 (I di Liouville)**.** *Sia $f \in H(\mathbb{C})$ e supponiamo che $|f| \leq M$ in $\mathbb{C}$; allora f è costante in $\mathbb{C}$ (le sole funzioni intere che sono limitate in tutto il piano complesso sono le costanti).*

Dimostrazione. Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, per 3.3.6, applicata per $k = 1$, si ha:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \cdot M \quad \forall R > 0.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ deduciamo:

$$|f'(z_0)| = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $z_0 \in \mathbb{C}$, segue $f' \equiv 0$ in $\mathbb{C}$, da cui la tesi. $\square$

Osserviamo che, da questo teorema si deduce che le funzioni intere seno e coseno in campo complesso non sono limitate.

Definizione 4.1.2. Una funzione intera $f(z)$ si dice che ha crescita polinomiale se esistono una costante A e un numero naturale n tali che $|f(z)| \leq A|z|^n$ per $|z| = R \geq R_0$, con R_0 sufficientemente grande.

Teorema 4.1.3 (II di Liouville, per funzioni intere a crescita polinomiale). *Una funzione intera f a crescita polinomiale è necessariamente un polinomio.*

Dimostrazione. La funzione f è intera, quindi analitica in $\mathbb{C}$; per il Teorema di Taylor 3.3.2:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Per l'ipotesi e da 3.3.6, con $M_R = AR^n$, si ha la seguente stima per i coefficienti a_k:

$$|a_k| \leq \frac{A}{R^{k-n}} \quad \forall\, R \geq R_0.$$

Per $R \to +\infty$ si ha $|a_k| = 0$ per $k - n \geq 1$ (i coefficienti della serie di M^{c}Laurin associata a f sono nulli per $k \geq n+1$) e lo sviluppo di M^{c}Laurin di f si riduce a:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Pertanto f è un polinomio il cui grado non è più grande di n. □

4.2 Teorema fondamentale dell'Algebra

Diamo qui una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra utilizzando il I Teorema di Liouville 4.1.1.

Teorema 4.2.1 (fondamentale dell'Algebra). *Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio di grado $n \geq 1$:*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

con $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$. Allora $P(z)$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$, cioè esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $P(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$, cioè è intera. Proviamo che f è limitata in $\mathbb{C}$. Vale:

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to+\infty} \left| \frac{1}{P(z)} \right| = 0$$

in quanto $P(z)$ è un infinito di ordine n per $z \to \infty$. Allora, fissato $\varepsilon = 1$, esiste $R > 0$ tale che, per $|z| > R$, risulta $|f(z)| \leq 1$. Dunque f è limitata in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$. Ora, $f \in H(\mathbb{C})$, quindi $|f| \in C^0(\mathbb{C})$; in particolare $|f|$ è continua sul compatto $\overline{B}_R(0)$ e, per il teorema di Weierstrass, è limitata su questo disco chiuso. Sia $M := \max_{z \in \overline{B}_R(0)} |f(z)|$ e definiamo $L := \max\{1, M\}$. Si ha allora:

$$|f(z)| \leq L \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Per 4.1.1, f risulta costante in $\mathbb{C}$ (costante diversa da 0 in quanto $f(0) = 1/P(0) \neq 0$). Ne segue che anche P è costante, il che è assurdo, poiché il polinomio $P(z)$ è di grado $n \geq 1$. □

4.3 Zeri di una funzione olomorfa

Proposizione 4.3.1. *Uno zero z_0 di una funzione olomorfa f è isolato, a meno che f non sia identicamente nulla (in un intorno di z_0).*

Dimostrazione. Sia z_0 tale che $f(z_0) = 0$ e supponiamo che f non sia identicamente nulla (in un intorno di z_0). Sia:

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (\zeta - z_0)^j$$

lo sviluppo locale (in un intorno di z_0) in serie di Taylor di f, dove

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_0; \tag{4.1}$$

allora almeno un coefficiente dev'essere non nullo: sia $p \geq 1$ il più piccolo numero naturale tale che $a_p \neq 0$. Quindi:

$$f(\zeta) = (\zeta - z_0)^p \sum_{j=0}^{+\infty} a_{p+j} (\zeta - z_0)^j$$

in un intorno di z_0. Poniamo:

$$g(\zeta) := \sum_{j=0}^{+\infty} a_{p+j} (\zeta - z_0)^j$$

in un intorno di z_0. Ora, $g(\zeta)$ è olomorfa in un intorno di z_0 e quindi, a fortiori, $g(\zeta)$ è ivi continua; inoltre $g(z_0) = a_p \neq 0$, perciò esiste un intorno sufficientemente piccolo di z_0 in cui g è diversa da 0. Di conseguenza, in un intorno di z_0, $(\zeta - z_0)^p g(\zeta) = f(\zeta)$ si annulla solo in z_0, perché $(\zeta - z_0)^p$ si annulla solo in z_0. □

Definizione 4.3.2 (ordine di uno zero)**.** Il più piccolo numero naturale $p \geq 1$ in (4.1) tale che $a_p \neq 0$ si dice *ordine* dello zero z_0.

È evidente che:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ zero di ordine } p \geq 1 \text{ per } f \;\; &\Leftrightarrow \;\; f(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \;\; f^{(p)}(z_0) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; \exists \lim_{\zeta \to z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.4 Prolungamento olomorfo: unicità

Definizione 4.4.1 (prolungamento olomorfo)**.** Siano Ω_1 e Ω_2 aperti di $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, e sia $f_1 \in H(\Omega_1)$. Diremo che f_1 ha un *prolungamento olomorfo* in Ω_2 se esiste $f_2 \in H(\Omega_2)$ tale che $f_{2|_{\Omega_1}} = f_1$.

Enunciamo ora un teorema che ha importanti applicazioni.

Teorema 4.4.2 (di unicità del prolungamento olomorfo)**.** *Sia $f \in H(\Omega)$ (Ω aperto connesso). Se in un sottoinsieme aperto di Ω f è identicamente nulla, allora f è identicamente nulla in tutto Ω.*

Corollario 4.4.3. *Sia $f \in H(\Omega)$ (Ω aperto connesso). Se f è costante in un sottoinsieme aperto di Ω, allora f è costante in Ω.*

Dimostrazione. Sia $f(z) = c$ per ogni z nell'aperto $\Omega_1 \subset \Omega$; allora la funzione olomorfa $g(z) := f(z) - c$ è nulla nell'aperto Ω_1. Applicando a g il teorema 4.4.2, si ha $g(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$, ovvero $f(z) = c$. □

Proposizione 4.4.4 (estensione delle uguaglianze)**.** *Sia $f \in H(\Omega)$ (Ω aperto connesso). Se f ha uno zero non isolato, allora f è identicamente nulla in Ω.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ uno zero di f non isolato. Allora, per 4.3.1, f è identicamente nulla in un intorno aperto di z_0 contenuto in Ω. Per il teorema di unicità del prolungamento olomorfo 4.4.2, f è nulla in tutto Ω. □

Osservazione 4.4.5. La proposizione precedente non ha un corrispondente nel campo reale. Infatti la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ed è nulla in $\mathbb{R}_-$, ma f non è identicamente nulla.

Osservazione 4.4.6. La proposizione 4.4.4 può essere utilizzata per dimostrare che alcune uguaglianze valide in $\mathbb{R}$ possono essere estese a $\mathbb{C}$. Per esempio, la funzione:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z - 1,$$

olomorfa in $\mathbb{C}$, ha zeri non isolati in $\mathbb{R}$ (in quanto $\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (chiuso in $\mathbb{C}$)); pertanto $f(z)$ è identicamente nulla in $\mathbb{C}$, cioè $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

4.5 Esistenza di almeno un punto di non prolungabilità olomorfa sulla frontiera del disco aperto di convergenza di un serie di potenze

Teorema 4.5.1. *Sia*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

con raggio di convergenza $0 < \rho < +\infty$. Allora esiste almeno un punto su $\partial B_\rho(z_0)$ che non è di prolungabilità olomorfa per f.

Dimostrazione. Supponiamo che tutti i punti di $\partial B_\rho(z_0)$ siano di prolungabilità olomorfa per f. Allora, per ogni $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$ esiste $r(\zeta) \in \mathbb{R}_+$ tale che f ha uno sviluppo in serie di potenze di $(z - \zeta)$ in $B_{r(\zeta)}(\zeta)$. Ora, dal ricoprimento aperto

$$\bigcup_{\zeta \in \partial B_\rho(z_0)} B_{r(\zeta)}(\zeta)$$

del compatto $\partial B_\rho(z_0)$, se ne può estrarre uno (ricoprimento aperto) finito

$$A := \bigcup_{j=1}^{\nu} B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j).$$

Definiamo ora

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in B_\rho(z_0) \\ f_j(z), & z \in B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j) \end{cases}$$

dove, per ogni $j = 1, \dots, \nu$, $f_j(z)$ è il prolungamento olomorfo di f a $B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j)$. Risulta

$$g \in H\left(B_\rho(z_0) \cup A\right)$$

e quindi esiste $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ tale che:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k \quad \forall\, |z - z_0| < \rho + \varepsilon$$

poiché $B_\rho(z_0) \cup A$ contiene il disco chiuso $\overline{B}_\rho(z_0)$, e quindi deve anche contenere il disco aperto $B_{\rho+\varepsilon}(z_0)$ per un opportuno $\varepsilon > 0$. Ora, osserviamo che $b_k = a_k$; infatti, tenendo conto che $f = g$ su $B_\rho(z_0)$, risulta

$$b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k.$$

Pertanto

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z) \quad \forall\, |z - z_0| < \rho + \varepsilon.$$

Ma, allora, f avrebbe raggio di convergenza $\rho + \varepsilon > \rho$, il che è assurdo. $\square$

Determinare la localizzazione di un punto di non prolungabilità olomorfa (di cui al Teorema precedente) è in generale difficile. Imponendo delle restrizioni sui coefficienti, si è in grado di localizzare un particolare punto di non prolungabilità olomorfa.

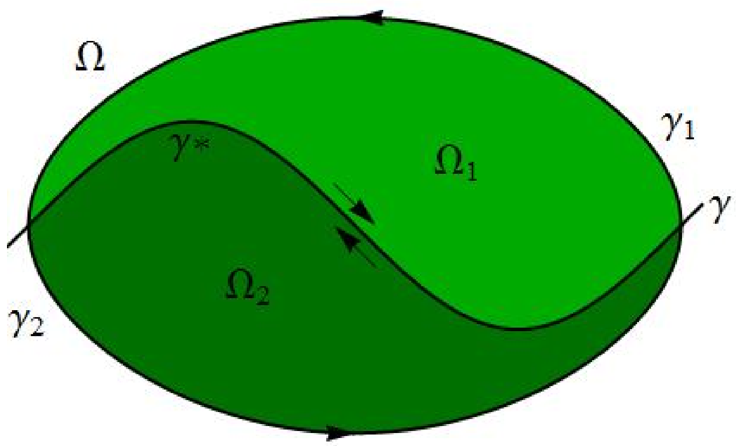
Teorema 4.5.2 (di Pringsheim)**.** *Se il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

è $\rho = 1$, e se tutti i coefficienti a_k sono reali e non negativi, allora $z = 1$ è un punto sulla frontiera di non prolungabilità olomorfa per f.

4.6 Prolungamento olomorfo attraverso una curva. Principio di riflessione di Schwarz

Sia Ω aperto, connesso, limitato di $\mathbb{C}$, con frontiera regolare. Supponiamo che una curva γ regolare decomponga Ω in due aperti connessi Ω_1 e Ω_2 giacenti da parte opposta rispetto a γ. Sia γ_1 (rispettivamente γ_2) la parte di $\partial\Omega$ giacente dalla parte di Ω_1 (rispettivamente Ω_2). Denotata con γ^* la intersezione di γ con $\overline{\Omega}$, risulta $\partial\Omega_1 = \gamma_1 \cup \gamma^*$ e $\partial\Omega_2 = \gamma_2 \cup \gamma^*$. Vale il seguente lemma.



Lemma 4.6.1. *Sia $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $f \in H(\Omega_1)$ e $f \in H(\Omega_2)$. Allora $f \in H(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\zeta \in \Omega_1$ arbitrario. Per la formula integrale di Cauchy 2.8.4:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+(\gamma_1 \cup \gamma^*)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz. \tag{4.3}$$

Ora, poiché $\zeta \in \Omega_1$, la funzione integranda in (4.3) è olomorfa su Ω_2; ne segue, per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+(\gamma_2 \cup \gamma^*)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = 0. \tag{4.4}$$

Se la curva $\gamma_2 \cup \gamma^*$ è orientata in senso antiorario, allora $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è la frontiera $\partial\Omega$ orientata in senso antiorario. Sommando (4.3) e (4.4) otteniamo:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_1 \cup (+\gamma_2)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz \tag{4.5}$$

per ogni $\zeta \in \Omega_1$, poiché gli integrali lungo γ^* si cancellano.

Con le stesse argomentazioni per $\zeta \in \Omega_2$ arbitrario, otteniamo la stessa formula di rappresentazione (4.5), e primo e secondo membro in (4.5) dipendono con continuità da $\zeta \in \Omega$. Pertanto la (4.5) resta valida ovunque in Ω (cioè, in particolare, anche nei punti interni di γ^*). Per 3.3.3 e poiché $f \in C^0(\overline{\Omega})$, essendo la funzione integranda di (4.5) olomorfa in Ω rispetto alla variabile ζ, risulta $f \in H(\Omega)$. $\square$

Il successivo Teorema è relativo ad un caso speciale di prolungamento olomorfo che può essere costruito esplicitamente.

Teorema 4.6.2 (Principio di riflessione di Schwarz per funzioni olomorfe)**.** *Sia Ω aperto, connesso, limitato del semipiano:*

$$\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\},$$

la cui frontiera, generalmente regolare, includa l'intervallo $I = (a, b)$ della retta reale e sia

$$\Omega^* := \{\overline{z} \in \mathbb{C} : z \in \Omega\}$$

(riflessione di Ω attraverso la retta reale). Sia $f \in H(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup I)$. Assumiamo che f sia a valori reali su I. Allora la funzione

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{in } \Omega \cup I \\ \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{in } \Omega^* \end{cases}$$

è l'unico prolungamento olomorfo di f a $\Omega \cup I \cup \Omega^*$.

Dimostrazione. Poniamo:

$$f(x, y) := u(x, y) + iv(x, y) \quad \forall\, (x, y) = z \in \Omega$$

e

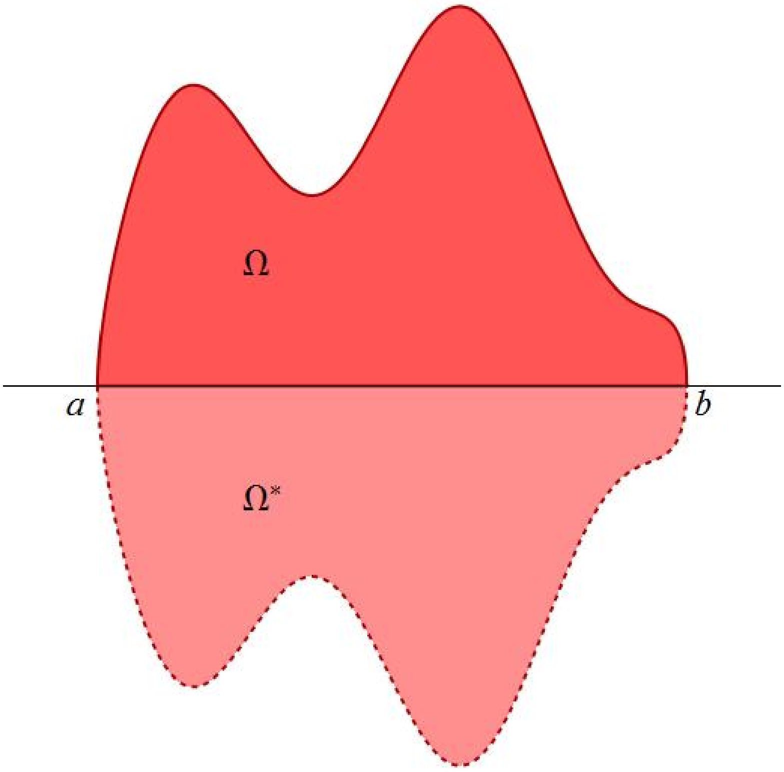
$$F(x, y) := U(x, y) + iV(x, y) \quad \forall\, (x, y) \in \Omega \cup I \cup \Omega^*.$$

Ora, per ogni $(x, y) \in \Omega^*$ si ha:

$$F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) - iv(x, -y),$$

cioè

$$U(x, y) = u(x, -y), \quad V(x, y) = -v(x, -y).$$



Allora, derivando, per ogni $(x, y) \in \Omega^*$ si ha:

$$\begin{aligned} U_x(x,y) &= u_x(x,-y), \\ U_y(x,y) &= -u_y(x,-y), \\ V_x(x,y) &= -v_x(x,-y), \\ V_y(x,y) &= v_y(x,-y). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Osserviamo che, se $(x, y) \in \Omega^*$, allora $(x, -y) \in \Omega$; dall'olomorfia di f su Ω segue:

$$\begin{cases} u_x(x,-y) &= v_y(x,-y) \\ u_y(x,-y) &= -v_x(x,-y) \end{cases}$$

e dalle (4.6) otteniamo:

$$\begin{cases} U_x(x,y) &= V_y(x,y) \\ U_y(x,y) &= -V_x(x,y) \end{cases} \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega^*.$$

Dunque U e V soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) in Ω^* e, poiché già differenziabili in Ω^*, si ha $F \in H(\Omega^*)$. Ma $F = f \in H(\Omega)$, dunque $F \in H(\Omega \cup \Omega^*)$.

Mostriamo, ora, che $F \in C^0(\Omega \cup I \cup \Omega^*)$; per questo proviamo che:

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \forall\, z \in I.$$

Infatti, se $z \in I \subset \mathbb{R}$, allora $z = \overline{z}$; inoltre, per ipotesi, $f_{|_I}$ ha valori in $\mathbb{R}$, pertanto $\overline{f}_{|_I} = f_{|_I}$ e quindi:

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z) \quad \forall\, z \in I.$$

Tenuto conto che $f \in C^0(\Omega \cup I)$, segue che $F \in C^0(\Omega \cup I \cup \Omega^*)$ e si può applicare 4.6.1 (identificando $\Omega \equiv \Omega_1$, $\Omega^* \equiv \Omega_2$ e $I \equiv \gamma$), pertanto $F \in H(\Omega \cup \Omega^* \cup I)$. $\square$

4.7 Trasformazione conforme del disco aperto unitario su sé stesso

Lemma 4.7.1. *Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$; la trasformazione lineare fratta*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

è olomorfa in $B_1(0)$, porta biunivocamente (e conformemente) $B_1(0)$ su $B_1(0)$ e $\varphi_{-\alpha}(z)$ è la sua inversa (anch'essa olomorfa).

Dimostrazione. Osserviamo che φ_α non ha zeri al denominatore in $B_1(0)$; infatti:

$$1 - \overline{\alpha} z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{\overline{\alpha}} \notin B_1(0);$$

pertanto $\varphi_\alpha \in H(B_1(0))$. Inoltre, per $|z| \leq 1$, vale:

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - \overline{\alpha} z + \overline{\alpha}(z - \alpha)}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} \neq 0.$$

Ora, $|\varphi_\alpha(z)| = 1$ per $|z| = 1$ (infatti, sia $z = e^{i\vartheta}$; allora:

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{e^{i\vartheta} - \alpha}{1 - \overline{\alpha} e^{i\vartheta}} \right| = \left| e^{i\vartheta} \right| \cdot \left| \frac{1 - \alpha e^{-i\vartheta}}{1 - \overline{\alpha} e^{i\vartheta}} \right| = 1)$$

e $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, pertanto, non potendo φ_α essere costante, per il Principio del massimo modulo 2.9.3 risulta

$$|\varphi_\alpha(z)| < 1 \quad \forall\, |z| < 1.$$

Ne deduciamo che φ_α porta $B_1(0)$ in $B_1(0)$. Mostriamo che φ_α porta $B_1(0)$ su $B_1(0)$ e che $\varphi_{-\alpha}$ è l'inversa di φ_α. Infatti:

$$\varphi_\alpha\left(\varphi_{-\alpha}(z)\right) = \varphi_\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) = \frac{\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z} - \alpha}{1-\overline{\alpha}\cdot\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} =$$
$$= \frac{z+\alpha-\alpha-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = z = \varphi_{-\alpha}\left(\varphi_\alpha(z)\right).$$

Osserviamo infine che φ_α è una trasformazione conforme del disco unitario su sé stesso (per il Teorema 2.7.1). □

Risulta naturale chiedersi quale sia la più generale trasformazione conforme del disco unitario su sé stesso.

Lemma 4.7.2 (di Schwarz). *Sia $f \in H(B_1(0))$ tale che:*

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall\, |z| < 1 \quad e \quad f(0) = 0.$$

Allora

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, |z| < 1 \quad e \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Inoltre, se esiste $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$, allora esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(z) = e^{i\beta} z.$$

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$ per ipotesi, lo sviluppo di M^{c}Laurin di f è:

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots \quad \forall\, |z| < 1.$$

Pertanto:

$$\frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}z + \frac{f'''(0)}{6}z^2 + \dots$$

è olomorfa in $B_1(0)$ con valore $f'(0)$ in $z = 0$. Sia ora $r \in \,]0,1[$ e consideriamo $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|$ su $|z| = r$. Risulta, per l'ipotesi,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \quad \forall\, |z| = r.$$

Per il Principio del massimo modulo 2.9.3

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r} \quad \forall\, |z| \leq r$$

e, per $r \to 1^-$:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1 \quad \forall\, |z| < 1 \tag{4.7}$$

da cui:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, |z| < 1$$

Inoltre, da (4.7), deduciamo che

$$|f'(0)| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1.$$

Infine, poiché per ipotesi:

$$\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$$

per $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$, da (4.7) e dal Principio del massimo modulo 2.9.3, deduciamo che $\dfrac{f(z)}{z}$ ha valore costante e modulo unitario. Perciò esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\frac{f(z)}{z} = e^{i\beta},$$

da cui la seconda asserzione della tesi. □

Il teorema che segue stabilisce che, a meno di una rotazione, non ci sono altre trasformazioni conformi del disco aperto unitario su sé stesso differenti da φ_α.

Teorema 4.7.3. *Sia f una trasformazione conforme del disco aperto unitario $B_1(0)$ su sé stesso e supponiamo che $f(\alpha) = 0$, dove $|\alpha| < 1$. Allora esiste $\vartheta \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(z) = e^{i\vartheta}\varphi_\alpha(z) = e^{i\vartheta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad \forall\, z \in B_1(0).$$

Dimostrazione. Osserviamo che, tenuto conto del lemma 4.7.1, la funzione $e^{i\vartheta}\varphi_\alpha(z)$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$) porta anch'essa $B_1(0)$ su $B_1(0)$, essendo $|e^{i\vartheta}| = 1$.

La funzione:

$$g = f \circ \varphi_{-\alpha}$$

è una trasformazione conforme da $B_1(0)$ su $B_1(0)$ (perchè composizione di trasformazioni conformi da $B_1(0)$ su $B_1(0)$), con:

$$g(0) = f\left(\varphi_{-\alpha}(0)\right) = f(\alpha) = 0$$

per ipotesi. Osserviamo che $|g(z)| \leq 1$ per $|z| < 1$. Per la prima parte del lemma di Schwarz 4.7.2:

$$|g(z)| \leq |z| \quad \forall\, |z| < 1. \tag{4.8}$$

Ora, poichè $g^{-1} = \varphi_\alpha \circ f^{-1}$ si ha:

$$g^{-1}(0) = \varphi_\alpha\left(f^{-1}(0)\right) = \varphi_\alpha(\alpha) = 0$$

Poiché anche la funzione inversa g^{-1} ha uno zero nell'origine, per la prima parte del lemma di Schwarz 4.7.2 applicato a g^{-1}, si ha:

$$|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \quad \forall\, |z| < 1. \tag{4.9}$$

Da (4.8) e (4.9) segue $|g(z)| = |z|$ per ogni $|z| < 1$. Pertanto, per la seconda parte del lemma di Schwarz 4.7.2, esiste $\vartheta \in \mathbb{R}$ tale che:

$$g(z) = e^{i\vartheta} z$$

da cui, poiché $f(z) = g(\varphi_\alpha(z))$, si ottiene:

$$f(z) = e^{i\vartheta}\varphi_\alpha(z) \quad \forall\, z \in B_1(0).$$

□

Alla domanda se esistono altri aperti del piano complesso che possono essere messi in modo conforme in corrispondenza biunivoca col disco unitario $B_1(0)$, il seguente teorema, dovuto a Riemann, fornisce una risposta positiva, in termini di condizione topologica sufficiente sull'aperto.

Teorema 4.7.4 (Riemann)**.** *Sia Ω un aperto, non vuoto, semplicemente connesso e diverso dall'intero piano complesso $\mathbb{C}$. Allora esiste una funzione olomorfa univalente (cioè $f(z_1) \neq f(z_2)$ se $z_1 \neq z_2$, con $z_1, z_2 \in \Omega$) che manda Ω conformemente sul disco unitario $B_1(0)$.*

Osservazione 4.7.5. L'intero piano complesso $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, ma per esso il teorema di Riemann non vale.

Infatti, se esistesse una funzione olomorfa univalente f che manda $\mathbb{C}$ conformemente sul disco unitario $B_1(0)$, tale f risulterebbe intera, con $|f(z)| < 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora, per il I Teorema di Liouville 4.1.1, f dovrebbe essere costante, e questo non è possibile.