CAPITOLO 9

Metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: teoria L^2

9.1 Il metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: una introduzione

Il metodo variazionale può essere sintetizzato nel modo seguente:

(i) si definisce una soluzione debole attraverso l'introduzione di forme quadratiche;

(ii) se ne dimostra esistenza e unicità tramite il teorema di Riesz-Fréchet 6.3.1, il lemma di Lax-Milgram 6.4.3 e il Teorema di Stampacchia 6.4.2;

(iii) si regolarizza la soluzione debole ottenuta (tramite risultati di regolarità superiore si perviene ad una soluzione classica del problema).

9.2 Problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson

Illustriamo ora il metodo variazionale prendendo in considerazione come "modello" il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson con dato omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{P}$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e Ω aperto connesso <u>limitato</u> di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 9.2.1. Si definisce <u>soluzione debole</u> del problema (P) una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Big(\text{oppure } \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\Big)\,.$$

<u>Esistenza (unicità e dipendenza continua) della soluzione debole.</u>

Applicando il teorema di Riesz-Fréchet 6.3.1, con

$$H = W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$\phi : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mapsto \phi(v) = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty$$

$\Big($ ϕ è ovviamente lineare, e continuo in quanto

$$|\phi(v)| \le \|f\|_2 \cdot \|v\|_2 \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\Big)$$

si ha che

$$\exists |\, u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \ : \quad \phi(v) = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = (u_f|v)_{1,2}$$
$$= \int_\Omega \nabla u_f(x)\cdot \nabla v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Inoltre si ha

$$\|u_f\|_{1,2} = \sup_{\substack{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{\|v\|_{1,2}} \le \|f\|_2\,,$$

cioè la soluzione debole u_f del problema (P) dipende con continuità dal dato f.

Per il lemma di Lax-Milgram 6.4.3, $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ è caratterizzata dalla proprietà

$$\frac{1}{2}\,(\nabla u_f|\nabla u_f)_2 - \phi(u_f) = \min_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)} \left\{\frac{1}{2}\,(\nabla v|\nabla v)_2 - \phi(v)\right\}\,,$$

cioè

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_f|^2\, d\mathcal{L}^N - \int_\Omega f\, u_f\, d\mathcal{L}^N = \min_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\mathcal{L}^N - \int_\Omega f\, v\, d\mathcal{L}^N\right\}\,.$$

Osservazione 9.2.2. La soluzione del problema dell'esistenza in spazi di Sobolev apre un'altra questione. Le funzioni di questi spazi infatti sono derivabili in senso debole, e in generale non sono nemmeno continue. Una volta ottenuta una soluzione debole, sorge allora il problema di dimostrare che si tratta di una funzione sufficientemente regolare; in breve, rimane da affrontare il problema della regolarità delle soluzioni deboli.

Regolarità della soluzione debole.

Se Ω è di classe C^2, $f \in L^2(\Omega)$ allora $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Più in generale, se Ω è di classe C^{2+k}, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ allora $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2+k,2}(\Omega)$ [29] (informalmente possiamo dire che u_f ha due derivate in più in $L^2(\Omega)$ rispetto al numero di derivate che la densità f ha in $L^2(\Omega)$).

In particolare (per il teorema di immersione di Morrey) se $k > \dfrac{N}{2}$, allora $u_f \in C^2(\overline{\Omega})$; in questa ipotesi si riconosce facilmente che u_f è soluzione classica (forte) di (P), tenendo anche presente che, essendo $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, risulta $u_f = 0$ su $\partial\Omega$.

9.3 Operatori in forma di divergenza

Sia, più in generale,

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_j \left(a_{ij}\, \partial_i u\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i\, \partial_i u + c\, u$$

con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C^0(\overline{\Omega})$, e consideriamo il problema di Dirichlet associato

$$\begin{cases} -Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{P_0}$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 9.3.1. A si dice uniformemente ellittico in Ω se e solo se

$$\exists\, \nu_0 > 0\ : \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \;\geq\; \nu_0\, |\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ \ \forall\, x \in \Omega\,.$$

Definizione 9.3.2. Si definisce soluzione debole del problema di Dirichlet (P_0) una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j v - \sum_{i=1}^{N} b_i\, \partial_i u\, v - c\, u\, v \right) d\mathcal{L}^N \;=\; \int_\Omega f\, v\, d\mathcal{L}^N \qquad \forall\, v \in C_0^1(\Omega)$$

$$\Big(\text{oppure, equivalentemente per densità, } \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\Big)\,.$$

[29] $W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) indica lo spazio delle funzioni di $L^p(\Omega)$ aventi derivate deboli, fino all'ordine m incluso, in $L^p(\Omega)$.
Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1; se $kp > N$ si ha $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

Introduciamo sullo spazio di Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$ il funzionale bilineare

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j v - \sum_{i=1}^N b_i\, \partial_i u\, v - \, c\, u\, v \right)\, d\mathcal{L}^N .$$

Allora u è soluzione debole del problema (P_0) se e solo se

$$\forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \quad a(u,v) \;=\; (f|v)_2$$

Lemma 9.3.3.

(i) Posto $\lambda_0 = \dfrac{k^2}{2\,\nu_0} + \sup\limits_{x\in\Omega} c(x) + \dfrac{\nu_0}{2}$*, dove* $k = \sup\limits_{x\in\Omega} \left(\sum\limits_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$*,*

risulta

$$a(u,u) \geq \frac{\nu_0}{2}\; \|u\|_{1,2}^2 - \lambda_0\, \|u\|_2^2 \qquad \forall\, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$\big(a(\cdot,\cdot)$ *è debolmente coercitiva in* $L^2(\Omega)\big)$*;*

(ii) esiste $\alpha > 0$ *tale che*

$$|a(u,v)| \leq \alpha\; \|u\|_{1,2}\; \|v\|_{1,2} \qquad \forall\, u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\, .$$

Dimostrazione. Proviamo (i). Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N b_i(x)\, \partial_i u(x) \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i u(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{1/2} \; |\nabla\, u(x)| \end{aligned}$$

e quindi, posto $k = \sup\limits_{x\in\Omega} \left(\sum\limits_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, risulta

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)\, \partial_i u(x)\, u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq \int_\Omega k\; |\nabla\, u(x)|\; |u(x)|\; d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_\Omega k\, \sqrt{\varepsilon}\; |\nabla\, u(x)|\; \frac{|u(x)|}{\sqrt{\varepsilon}}\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \frac{k^2\, \varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla\, u(x)|^2\; d\mathcal{L}^N(x) + \frac{1}{2\,\varepsilon} \int_\Omega |u(x)|^2\; d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

$\Big($avendo usato la disuguaglianza $a\, b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\Big)$.

Prendendo $\epsilon = \dfrac{\nu_0}{k^2}$, si ha

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)\,\partial_i u(x)\,u(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \right| \le \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x) + \frac{k^2}{2\,\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Pertanto, per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, vale

$$\begin{aligned} a(u,u) \ge \nu_0 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x) &- \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &- \frac{k^2}{2\,\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x) - \sup_{x\in\Omega} c(x) \cdot \int_\Omega |u(x)|^2 \, d\mathcal{L}^N(x)\,. \end{aligned}$$

Ponendo $\lambda_0 = \dfrac{k^2}{2\,\nu_0} + \sup\limits_{x\in\Omega} c(x) + \dfrac{\nu_0}{2}$, si ha

$$a(u,u) \ge \frac{\nu_0}{2} \, \|u\|_{1,2}^2 - \lambda_0 \, \|u\|_2^2 \,,$$

il che dimostra che $a(\cdot,\cdot)$ è debolmente coercitiva.

Proviamo (ii). Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^N a_{ij}(x)\,\xi_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac12} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2 \right)^{\frac12} = \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac12} |\xi|$$

e quindi

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \right| \le \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac12} |\xi|\,|\xi_j| \le \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac12} |\xi|^2\,.$$

Posto $L = \sup\limits_{x\in\Omega} \left(\sum\limits_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac12}$ si ha

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \right| \le L\,|\xi|^2 \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^N\,,\ \forall\,x \in \Omega\,.$$

Usando la precedente disuguaglianza e la disuguaglianza di Hölder 4.2.3 si prova che $a(\cdot,\cdot)$ è anche continua. Infatti, se $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$|a(u,v)| \le L\,\|\nabla u\|_2\,\|\nabla v\|_2 + k\,\|\nabla u\|_2\,\|v\|_2 + \|c\|_\infty\,\|u\|_2\,\|v\|_2 \le \alpha\,\|u\|_{1,2}\,\|v\|_{1,2}\,. \qquad \square$$

Teorema 9.3.4. *Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $f \in L^2(\Omega)$*

$$\exists |\, u = u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \;:\quad \lambda\ (u|v)_2 + a(u,v) = (f|v)_2 \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$\Big($*cioè u è soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \textit{in}\ \Omega \\ \quad u = 0 & \textit{su}\ \partial\Omega \end{cases}\Bigg).$$

Inoltre, se $\lambda > \lambda_0$ si ha

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\, \|f\|_2 \ , \qquad \|\nabla u\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\nu_0\,(\lambda - \lambda_0)}}\ \|f\|_2 \ .$$

Dimostrazione. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq \lambda_0$ e $f \in L^2(\Omega)$.
Consideriamo su $W_0^{1,2}(\Omega)$ il funzionale bilineare

$$\tilde{a}(u,v) = a(u,v) + \lambda\ (u|v)_2 \ .$$

Siccome $a(\cdot,\cdot)$ è continua, anche $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ lo è. Inoltre

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u,u) = a(u,u) + \lambda\ (u|u)_2 &= a(u,u) + \lambda\ \|u\|_2^2 \\ &\geq \frac{\nu_0}{2}\ \|u\|_{1,2}^2 + (\lambda - \lambda_0)\ \|u\|_2^2 \geq \frac{\nu_0}{2}\ \|u\|_{1,2}^2 \ , \end{aligned} \tag{9.1}$$

cioè $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ è coercitiva su $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Per il lemma di Lax-Milgram 6.4.3 esiste un'unica $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\lambda\ (u|v)_2 + a(u,v) = \int_\Omega f\, v\ d\mathcal{L}^N \qquad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Prendendo $v = u$ nell'uguaglianza precedente e usando (9.1) risulta

$$\|f\|_2\ \|u\|_2 \geq \int_\Omega f\, u\, d\mathcal{L}^N = \lambda\ \|u\|_2^2 + a(u,u) \geq \frac{\nu_0}{2}\ \|u\|_{1,2}^2 + (\lambda - \lambda_0)\ \|u\|_2^2$$

da cui segue

$$(\lambda - \lambda_0)\ \|u\|_2^2 \leq \|f\|_2\, \|u\|_2 \ , \qquad \frac{\nu_0}{2}\, \|u\|_{1,2}^2 \ \leq\ \|f\|_2\, \|u\|_2 \ .$$

Quindi, per $\lambda > \lambda_0$, si ha

$$\|u\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{\lambda - \lambda_0}$$

e dunque

$$\frac{\nu_0}{2}\, \|\nabla u\|_2^2 \ \leq\ \frac{\nu_0}{2}\, \|u\|_{1,2}^2 \ \leq\ \|f\|_2\, \|u\|_2 \ \leq\ \frac{\|f\|_2^2}{\lambda - \lambda_0}\,. \quad \square$$

Osservazione 9.3.5. Per il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{su } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{P_λ}$$

abbiamo provato (vedi teorema 9.3.4) che se $\lambda \geq \lambda_0$ ed $f \in L^2(\Omega)$, allora esiste un'unica soluzione di (P_λ) in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si può dimostrare, con un confronto con i risultati che si provano per lo stesso problema negli spazi di Hölder, che il problema (P_λ) è risolubile per ogni $\lambda \geq 0$.

9.4 Problema di Dirichlet non-omogeneo per l'equazione di Poisson

Teorema 9.4.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso e limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$; il problema con dato di Dirichlet non-omogeneo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ \qquad u = \varphi & \textit{su } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{P_φ}$$

ha un'unica soluzione (debole) u in $\mathcal{A}_\varphi = \Big\{ v \in W^{1,2}(\Omega) \,;\, v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \Big\}$; tale soluzione è caratterizzata da

$$\begin{cases} u \in \mathcal{A}_\varphi \\ u \textit{ minimizza in } \mathcal{A}_\varphi \textit{ il funzionale} \\ \qquad \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\mathcal{L}^N - \int_\Omega f\, v \, d\mathcal{L}^N \,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathcal{A}_\varphi$ è un convesso chiuso non vuoto di $W^{1,2}(\Omega)$.

Osserviamo anche che sono equivalenti:

(a) $u \in \mathcal{A}_\varphi$ è soluzione debole di (P_φ), cioè

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \zeta \, d\mathcal{L}^N = \int_\Omega f\, \zeta \, d\mathcal{L}^N \qquad \forall\, \zeta \in W_0^{1,2}(\Omega) \,,$$

(b) $u \in \mathcal{A}_\varphi$ e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) \; d\mathcal{L}^N \geq \int_\Omega f\,(v-u)\, d\mathcal{L}^N \qquad \forall\, v \in \mathcal{A}_\varphi \,.$$

Infatti:

(a)$\Rightarrow$(b): Poiché da $v \in \mathcal{A}_\varphi$ e $u \in \mathcal{A}_\varphi$ risulta $v - u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dall'ipotesi segue

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) \; d\mathcal{L}^N = \int_\Omega f\,(v-u)\, d\mathcal{L}^N \qquad \forall\, v \in \mathcal{A}_\varphi.$$

(b)⇒(a): Se $u \in \mathcal{A}_\varphi$ verifica la disuguaglianza, scegliamo $v = u \pm \zeta$ con (arbitrario) $\zeta \in W_0^{1,2}(\Omega)$: sicché risulta $v \in \mathcal{A}_\varphi$ e si ha la tesi.

A questo punto basta applicare il teorema di Stampacchia 6.4.2 con

$$\phi(v) = \int_\Omega f\, v\, d\mathcal{L}^N \qquad \text{e} \qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, d\mathcal{L}^N . \quad \square$$

Osservazione 9.4.2. Lo studio della regolarità e il ritorno ad una soluzione classica si effettua come indicato nell'Osservazione 9.2.2