CAPITOLO 2

Aspetti speciali

1. Restrizioni sulle classi di coniugio

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi. Un gruppo G si dice un $\mathfrak{X}C$-*gruppo* (o anche un gruppo con $\mathfrak{X}$-*classi di coniugio*) se per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ appartiene alla classe $\mathfrak{X}$. Evidentemente, se $\mathfrak{I}$ è la classe costituita soltanto dai gruppi identici, gli $\mathfrak{I}C$-gruppi sono tutti e soli i gruppi abeliani, e più in generale, denotata per ogni numero intero non negativo c con $\mathfrak{N}_c$ la classe dei gruppi nilpotenti di classe al più c, si ha che un gruppo G verifica la proprietà $\mathfrak{N}_cC$ se e soltanto se è nilpotente di classe al più $c+1$. D'altra parte, se $\mathfrak{F}$ denota la classe dei gruppi finiti, gli $\mathfrak{F}C$-gruppi sono esattamente i gruppi a classi di coniugio finite, sicchè la proprietà $\mathfrak{X}C$ può essere considerata come una generalizzazione della proprietà FC per ogni classe $\mathfrak{X}$ di gruppi contenente la classe dei gruppi finiti, cioè per ogni classe finitaria di gruppi.

Si ricordi che un gruppo G si dice un *gruppo di Černikov* se verifica la condizione minimale sui sottogruppi e contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. Ovviamente ogni gruppo di Černikov è localmente finito; inoltre la classe dei gruppi di Černikov è chiusa rispetto a sottogruppi, quozienti ed estensioni. La struttura dei gruppi di Černikov è completamente descritta (cfr. [**94**] Part 1, Chapter 2): se G è un gruppo di Černikov, il suo residuale finito ha indice finito ed è prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer. E' anche noto che un gruppo risolubile è di Černikov se e soltanto se verifica la condizione minimale sui sottogruppi.

Un gruppo G si dice un CC-*gruppo* se è a classi di coniugio di Černikov, cioè se il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è di Černikov per ogni elemento x di G. I CC-gruppi sono stati introdotti da Y.D. Polovickiĭ nel 1964, come una prima naturale generalizzazione degli FC-gruppi. Al fine di fornire le prime informazioni sulla struttura dei CC-gruppi, è opportuno estendere il teorema di Schur alla classe dei gruppi di Černikov.

Teorema 2.1. (Y.D. Polovickiĭ [**91**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia un gruppo di Černikov. Allora anche il derivato G' di G è di Černikov.*

Dimostrazione – Sia $J/Z(G)$ il residuale finito di $G/Z(G)$. Poichè $J/Z(G)$ è abeliano, J è nilpotente di classe al più 2, sicchè l'applicazione

$$\theta : (xZ(G), yZ(G)) \in J/Z(G) \times J/Z(G) \longmapsto [x, y] \in J'$$

è bilineare e quindi induce un epimorfismo

$$\bar{\theta} : J/Z(G) \otimes J/Z(G) \longrightarrow J'.$$

D'altra parte il prodotto tensoriale $J/Z(G) \otimes J/Z(G)$ è nullo, in quanto $J/Z(G)$ è divisibile e periodico; pertanto $J' = \{1\}$ e J è abeliano. Poichè G/J è finito, esiste un sottogruppo finitamente generato E di G tale che $G = JE$. Il gruppo $E/E \cap Z(G)$ è finito e risulta $E \cap Z(G) \leq Z(E)$, sicchè dal teorema di Schur segue che il derivato E' di E è finito. Sia $\{x_1, \ldots, x_t\}$ un trasversale di $E \cap Z(G)$ in E; allora si ha

$$[J, E] = [J\langle x_1, \ldots, x_t\rangle] = \langle [J, x_i] \mid i = 1, \ldots, t\rangle.$$

Poichè per ogni $i = 1, \ldots, t$ l'applicazione

$$\varphi_i : a \in J \longmapsto [a, x_i] \in [J, x_i]$$

è un epimorfismo il cui nucleo contiene $Z(G)$, ciascuno dei sottogruppi

$$[J, x_1], \ldots, [J, x_t]$$

è di Černikov. Pertanto $[J, E]$ è un gruppo di Černikov, e quindi tale è anche $G' = [J, E]E'$. □

Corollario 2.2. *Sia G un CC-gruppo. Allora il derivato G' di G è localmente finito.*

Dimostrazione – Sia E un qualunque sottogruppo finitamente generato di G'. Allora esiste una parte finita X di G tale che E sia contenuto nel derivato di $\langle X\rangle$. Poichè $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è un gruppo di Černikov per ogni $x \in X$ e

$$C_G(\langle X\rangle^G) = \bigcap_{x \in X} C_G(\langle x\rangle^G),$$

anche il gruppo $C_G(\langle X\rangle^G)$ è di Černikov. In particolare $\langle X\rangle^G/Z(\langle X\rangle^G)$ è di Černikov, sicchè tale è anche $(\langle X\rangle^G)'$ per il Teorema 2.1. Pertanto E è finito e G' è localmente finito. □

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, dalla definizione segue che per analizzare la struttura degli $\mathfrak{X}C$-gruppi è fondamentale poter disporre di informazioni sul comportamento dei gruppi di automorfismi di $\mathfrak{X}$-gruppi. Nel caso dei

CC-gruppi è possibile utilizzare il seguente rilevante risultato sui gruppi di automorfismi dei gruppi di Černikov; esso in particolare assicura che i gruppi periodici di automorfismi di gruppi di Černikov sono di Černikov, e che ogni gruppo periodico di automorfismi di un gruppo abeliano a condizione minimale è finito.

Lemma 2.3. (R. Baer [**8**]) *Sia G un gruppo di Černikov e sia Γ un gruppo periodico di automorfismi di G. Allora il gruppo $\Gamma/\Gamma \cap InnG$ è finito.*

Il prossimo risultato estende il lemma di Dietzmann ai gruppi con la proprietà CC, e prova in particolare che i CC-gruppi periodici sono esattamente i gruppi dotati di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali di Černikov.

Teorema 2.4. (Y.D. Polovickiĭ [**92**]) *Un gruppo periodico G è un CC-gruppo se e soltanto se per ogni elemento x di G la chiusura normale $\langle x\rangle^G$ è un gruppo di Černikov.*

Dimostrazione − La sufficienza della condizione segue direttamente dal Lemma 2.3. Reciprocamente, sia G un CC-gruppo e siano x un qualunque elemento di G e $X = \langle x\rangle^G$. Posto $C = C_G(X)$, il gruppo quoziente G/C è di Černikov, per cui tale è $X/Z(X)$ e il Teorema 2.1 assicura allora che anche X' è di Černikov; sostituendo G con il gruppo G/X' si può allora supporre senza ledere la generalità che X è abeliano. Sia J/C il residuale finito di G/C, sicchè J ha indice finito in G. Si consideri un qualunque elemento a di J. Poichè $G/C_G(\langle a, x\rangle^G$ è un gruppo di Černikov, come prima dal Teorema 2.1 segue che $(\langle a, x\rangle^G)'$ è di Černikov; pertanto anche l'interderivato $[a, X]$ è un gruppo di Černikov. D'altra parte J' è contenuto in C, per cui

$$[a, X]^J \leq [a^J, X] = [a, X]$$

e $[a, X]$ è un sottogruppo normale di J. Poichè $[a, X]$ è contenuto in X, si ha $C \leq C_J([a, X])$ e quindi $J/C_J([a, X])$ è un gruppo abeliano divisibile; ma X è abeliano, per cui tale è $[a, X]$ e per il Lemma 2.3 si ha che $J/C_J([a, X])$ è finito. Pertanto $J = C_J([a, X])$ e $[a, X]$ è contenuto nel centro di J; l'arbitrarietà di a in J assicura allora che $[J, X, J] = \{1\}$. L'applicazione

$$aC \in J/C \longmapsto [a, x] \in [J, x]$$

è ben definita perchè $[C, x] = \{1\}$, ed è inoltre un epimorfismo in quanto $[J, x, J] = \{1\}$. Pertanto $[J, x]$ è un gruppo di Černikov. Sia $\{y_1, \ldots, y_t\}$ un trasversale di J in G. Qualunque sia l'indice $i = 1, \ldots, t$ si ha che $[J, x]^{y_i}$ è un sottogruppo normale di Černikov di J, sicchè

$$K = \langle [J, x]^{y_1}, \ldots, [J, x]^{y_t}\rangle$$

è un sottogruppo normale di Černikov di G. D'altra parte il Corollario 2.2 assicura che il sottogruppo $\langle [y_1, x], \dots, [y_t, x] \rangle$ è finito, per cui

$$[G, x] = \langle K, [y_1, x], \dots, [y_t, x] \rangle$$

è un gruppo di Černikov e quindi tale è anche $\langle x \rangle^G$. □

Per quanto riguarda i problemi di immersione, è stato dimostrato da S. Franciosi, F. de Giovanni e M.J. Tomkinson [**47**] che ogni CC-gruppo a centro identico si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi di Černikov (un risultato da confrontare con il Corollario 1.29), mentre M. Gonzalez e J. Otal [**53**] hanno ottenuto un'estensione parziale del Teorema 1.32 al caso dei CC-gruppi. Infine, generalizzando il Teorema 1.46, J. Alcazar e J. Otal [**2**] hanno provato che in un qualunque CC-gruppo i sottogruppi di Sylow relativi ad uno stesso numero primo sono localmente coniugati.

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi chiusa rispetto a sottogruppi e quozienti. Un gruppo G si dice un *$B\mathfrak{X}C$-gruppo* (o un gruppo a classi di coniugio *uniformemente* $\mathfrak{X}$) se esiste un gruppo Q nella classe $\mathfrak{X}$ tale che per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ sia isomorfo ad una sezione di Q. Ovviamente ogni gruppo a classi di coniugio uniformemente $\mathfrak{X}$ è un $\mathfrak{X}C$-gruppo. Inoltre, poichè per ogni numero intero positivo n esistono (a meno di isomorfismi) soltanto un numero finito di gruppi finiti di ordine al più n, si ha subito che un gruppo è a classi di coniugio uniformemente finite se e soltanto se ha la proprietà BFC. Pertanto il prossimo risultato è un'estensione del Teorema 1.20 al caso dei gruppi a classi di coniugio uniformemente di Černikov.

Teorema 2.5. (S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**42**]) *Sia G un gruppo risolubile a classi di coniugio uniformemente di Černikov. Allora il derivato G' di G è un gruppo di Černikov.*

Si ricordi che un gruppo G si dice *policiclico* se è dotato di una serie finita a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali. Evidentemente ogni gruppo policiclico è risolubile, ed è facile provare che un gruppo risolubile è policiclico se e soltanto se verifica la condizione massimale sui sottogruppi. Si ha anche subito che la classe dei gruppi policiclici è chiusa rispetto a sottogruppi, quozienti ed estensioni. Il gruppo G si dice invece *policiclico-per-finito* se contiene un sottogruppo policiclico di indice finito; la classe dei gruppi con tale proprietà, che in qualche senso dualizza quella dei gruppi di Černikov, sarà denotata nel seguito con il simbolo $\mathcal{P}$.

Un gruppo G si dice un *PC-gruppo* se per ogni elemento x di G il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ è policiclico-per-finito (cioè se G ha la proprietà $\mathcal{P}C$).

Evidentemente ogni PC-gruppo periodico è un FC-gruppo. Nel seguito si esporranno alcuni risultati che evidenziano come certe proprietà rilevanti degli FC-gruppi possano essere generalizzate al caso dei PC-gruppi. Per altre proprietà dei PC-gruppi si consultino gli articoli [**46**] e [**42**]. E' in primo luogo opportuno ricordare il seguente risultato di P. Hall.

Lemma 2.6. (P. Hall [**58**]) *Sia G un gruppo finitamente generato contenente un sottogruppo normale abeliano A tale che G/A sia policiclico-per-finito. Allora G verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali.*

Per quanto riguarda il gruppo degli automorfismi di un gruppo policiclico-per-finito, è opportuno menzionare che R. Baer [**7**] ha dimostrato che ogni gruppo iperabeliano di automorfismi di un gruppo policiclico-per-finito è policiclico. Questo risultato è stato esteso in [**46**] nel modo seguente.

Lemma 2.7. *Sia G un gruppo policiclico-per-finito, e sia Γ un gruppo di automorfismi di G. Se Γ contiene un sottogruppo iperabeliano normale Θ tale che Γ/Θ sia localmente finito, allora Γ è policiclico-per-finito.*

Il prossimo risultato può essere considerato come l'analogo del Lemma di Dietzmann per i gruppi a classi di coniugio nella classe $\mathcal{P}$.

Teorema 2.8. (S. Franciosi, F. de Giovanni e M.J. Tomkinson [**46**]) *Un gruppo G è un PC-gruppo se e soltanto se è dotato di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti.*

Dimostrazione – Si supponga in primo luogo G un PC-gruppo, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è policiclico-per-finito, esiste un sottogruppo finitamente ge-nerato E di G tale che $G = EC_G(\langle x\rangle^G)$; la chiusura normale $\langle x\rangle^G = \langle x\rangle^E$ è contenuta nel sottogruppo finitamente generato $H = \langle E, x\rangle$, e per ipotesi il gruppo $G/C_G(H^G)$ è policiclico-per-finito, sicchè tale è anche $H/C_H(H^G)$. In particolare $H/Z(H)$ è policiclico-per-finito, e quindi H verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali per il Lemma 2.6. Allora $Z(H)$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi, e quindi H è policiclico-per-finito. Pertanto $\langle x\rangle^G$ è policiclico-per-finito per ogni elemento x di G, e quindi G ha un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti.

Reciprocamente, sia il gruppo G dotato di un ricoprimento costituito da sottogruppi normali policiclici-per-finiti, e sia x un qualunque elemento di G. Allora il sottogruppo normale $\langle x\rangle^G$ è policiclico-per-finito, ed il gruppo quoziente $\bar{G} = G/C_G(\langle x\rangle^G)$, essendo ricoperto da sottogruppi normali policiclici-per-finiti, contiene un sottogruppo iperabeliano normale $\bar{N}$

tale che $\bar{G}/\bar{N}$ sia localmente finito. Pertanto il Lemma 2.7 assicura che $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è policiclico-per-finito, e quindi G è un PC-gruppo. □

Corollario 2.9. *Sia G un PC-gruppo, e sia N un sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente G/N sia policiclico-per-finito. Allora esiste un sottogruppo normale policiclico-per-finito H di G tale che $G = HN$.*

Dimostrazione − Poichè G/N è finitamente generato, esiste una parte finita X di G tale che $G = \langle X\rangle N$. Allora il Teorema 2.8 assicura che la chiusura normale $\langle X\rangle^G$ è un sottogruppo policiclico-per-finito, ed è sufficiente porre $H = \langle X\rangle^G$. □

Un ben noto teorema di Hirsch assicura che ogni gruppo policiclico è residualmente finito, sicchè in particolare qualunque sia il PC-gruppo G si ha che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è residualmente finito. Questa osservazione suggerisce di affrontare, in analogia a quanto fatto per gli FC-gruppi, problemi di immersione anche per i PC-gruppi. D'altra parte, è facile osservare che un risultato analogo al Teorema 1.27 non può essere dimostrato per i PC-gruppi; infatti, qualunque sia il numero primo p, il gruppo additivo $\mathbb{Q}_p$, costituito dai numeri razionali il cui denominatore è una potenza di p, è residualmente finito, ma non può essere immerso nel prodotto diretto di alcuna famiglia di gruppi policiclici-per-finiti. In analogia a quanto accade nel caso dei CC-gruppi, è però possibile dimostrare che ogni PC-gruppo con il centro identico è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi policiclici-per-finiti (cfr. [**46**]).

Infine, è il caso di osservare che, al contrario di quanto accade per i gruppi a classi di coniugio uniformemente Černikov, esiste un gruppo a classi di coniugio cicliche (e quindi in particolare nilpotente di classe 2 e a classi di coniugio policicliche) il cui derivato non è neppure minimax (si ricordi che un gruppo si dice *minimax* se ha una serie finita ciascuno dei cui fattori verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi). Alcune parziali estensioni del Teorema 1.20 ai gruppi con classi di coniugio policicliche sono state ottenute da L.A. Kurdachenko, N.V. Polyakov e I.Y. Subbotin [**72**].

2. Sottogruppi normali generalizzati

Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *almost normale* se ha soltanto un numero finito di coniugati in G, o equivalentemente se il normalizzante $N_G(H)$ di H ha indice finito in G. Quindi un sottogruppo H

di un gruppo G è almost normale in G se e soltanto se H è normale in un sottogruppo di indice finito di G. Evidentemente ogni sottogruppo normale di un arbitrario gruppo è anche almost normale, mentre in un gruppo finito tutti i sottogruppi sono almost normali; si osservi anche che se un gruppo G è privo di sottogruppi propri di indice finito, allora un suo sottogruppo è almost normale se e soltanto se è normale.

La nozione di almost normalità può facilmente essere usata per descrivere gli FC-gruppi. Si ha infatti:

LEMMA 2.10. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni suo sottogruppo ciclico è almost normale.*

DIMOSTRAZIONE – Sia in primo luogo G un FC-gruppo. Qualunque sia l'elemento x di G si ha ovviamente $C_G(x) \leq N_G(\langle x \rangle)$, per cui il normalizzante $N_G(\langle x \rangle)$ ha indice finito in G e il sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ è almost normale in G.

Reciprocamente, si supponga che ogni sottogruppo ciclico di G è almost normale, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè il sottogruppo $\langle x \rangle$ è normale in $N_G(\langle x \rangle)$, si ha che il gruppo $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$ è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di $\langle x \rangle$ e quindi è finito; dalla finitezza dell'indice $|G : N_G(\langle x \rangle)|$ segue allora quella di $|G : C_G(x)|$. Pertanto il gruppo G ha la proprietà FC. $\square$

E' immediato verificare che in un qualunque gruppo l'intersezione ed il sottogruppo generato da due (e quindi anche da un numero finito) di sottogruppi almost normali è almost normale; d'altra parte, diversamente da quanto avviene per i sottogruppi normali, non è vero che in generale l'intersezione ed il sottogruppo generato da una famiglia di sottogruppi almost normali sia ancora almost normale, neppure nel caso degli FC-gruppi. Ciò segue in particolare da un importante teorema di B.H. Neumann, che descrive la struttura dei gruppi in cui tutti i sottogruppi sono almost normali.

TEOREMA 2.11. (B.H. Neumann [**86**]) *In un gruppo G ogni sottogruppo è almost normale se e soltanto se il centro $Z(G)$ ha indice finito in G.*

Si osservi che dal Teorema 2.11 segue che se in un gruppo G tutti i sottogruppi sono almost normali, allora le classi di coniugio dei sottogruppi di G hanno ordine limitato. Il teorema precedente è stato migliorato nel 1959 da I.I. Eremin, il quale ha ottenuto il seguente risultato.

TEOREMA 2.12. (I.I. Eremin [**51**]) *Sia G un gruppo in cui tutti i sottogruppi abeliani sono almost normali. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

E' anche il caso di segnalare che S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**43**] hanno preso in esame il comportamento dei gruppi in cui ogni sottogruppo che non è finitamente generato è almost normale; in virtù del Lemma 2.10 tali gruppi possono essere considerati in qualche senso duali dei gruppi con la proprietà FC.

Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *nearly normale* se ha indice finito nella sua chiusura normale H^G. Evidentemente ogni sottogruppo normale di un arbitrario gruppo è anche nearly normale, mentre in un gruppo finito tutti i sottogruppi sono nearly normali. Anche i sottogruppi nearly normali possono essere utilizzati per caratterizzare gli FC-gruppi.

LEMMA 2.13. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni suo sottogruppo ciclico è nearly normale.*

DIMOSTRAZIONE – Si supponga in primo luogo che G è un FC-gruppo, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè il derivato G' di G è localmente finito, il sottogruppo normale $[x, G]$ di G è finito, in quanto generato da un sottoinsieme equipotente alla classe di coniugio di x; d'altra parte risulta

$$\langle x\rangle^G = \langle x\rangle[x, G],$$

per cui l'indice $|\langle x\rangle^G : \langle x\rangle|$ è finito e $\langle x\rangle$ è un sottogruppo nearly normale di G.

Reciprocamente, si assuma che ogni sottogruppo ciclico di G è nearly normale, e sia x un qualunque elemento di G. Poichè l'indice $|\langle x\rangle^G : \langle x\rangle|$ è finito, esiste un numero intero positivo n tale che il sottogruppo normale $(\langle x\rangle^G)^n$ di G sia contenuto in $\langle x\rangle$. Ovviamente $\langle x\rangle^G/(\langle x\rangle^G)^n$ è finito, per cui tale è anche il gruppo quoziente

$$G/C_G(\langle x\rangle^G/(\langle x\rangle^G)^n);$$

in particolare si ha che $N_G(\langle x\rangle)$ ha indice finito in G, e quindi $\langle x\rangle$ è un sottogruppo almost normale di G. Allora G è un FC-gruppo per il Lemma 2.10. □

Si osservi che il Lemma 2.10 ed il Lemma 2.13 insieme assicurano che in un gruppo tutti i sottogruppi ciclici sono almost normali se e soltanto se essi sono tutti nearly normali.

Non è difficile provare che in un qualunque gruppo l'intersezione ed il sottogruppo generato da due (e quindi anche da un numero finito) di sottogruppi nearly normali è nearly normale; d'altra parte, anche in questo caso non è vero che in generale l'intersezione ed il sottogruppo generato da una famiglia di sottogruppi nearly normali sia ancora nearly normale, neppure quando il gruppo ha la proprietà FC. E' infatti sufficiente far ricorso ad un altro notevole teorema di Neumann, che descrive la struttura dei gruppi in cui tutti i sottogruppi sono nearly normali.

Teorema 2.14. (B.H. Neumann [**86**]) *In un gruppo G ogni sottogruppo è nearly normale se e soltanto se il derivato G' di G è finito.*

E' opportuno osservare che, come nel caso della almost normalità, nell'enunciato del Teorema 2.14 è sufficiente supporre che ogni sottogruppo abeliano del gruppo G abbia indice finito nella sua chiusura normale normale per ottenere che G' è finito.

Teorema 2.15. (M.J. Tomkinson [**114**]) *Sia G un gruppo in cui tutti i sottogruppi abeliani sono nearly normali. Allora il derivato G' di G è finito.*

La dimostrazione del Lemma 2.13 sembrerebbe suggerire che la nozione di sottogruppo nearly normale è più forte di quella di sottogruppo almost normale, mentre i due concetti sono di fatto non confrontabili. D'altra parte è il caso di evidenziare la seguente interessante proprietà che, in virtù del teorema di Schur, segue dal Teorema 2.11 e dal Teorema 2.14.

Corollario 2.16. *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo è almost normale. Allora tutti i sottogruppi di G sono nearly normali.*

In un recente articolo, M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**29**] hanno investigato il comportamento dei gruppi in cui la condizione di almost normalità oppure quella di nearly normalità è imposta ai sottogruppi non abeliani del gruppo. Tra tali gruppi rientrano ovviamente quelli in cui tutti i sottogruppi non abeliani sono normali; la struttura di questi ultimi sarà descritta nel prossimo paragrafo.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *normale-per-finito* se il nocciolo H_G di H in G ha indice finito in H. E' chiaro che in un qualunque gruppo ogni sottogruppo normale è normale-per-finito e tale è anche ogni sottogruppo finito; inoltre, se un sottogruppo normale-per-finito H del gruppo G non ha sottogruppi propri di indice finito, è chiaro che H è normale in G. Si osservi infine che se G è un gruppo e H è un sottogruppo di G che sia almost normale e nearly normale, si ha che H^G/H_G è finito, e quindi H è anche normale-per-finito. E' facile capire che lo studio dei sottogruppi di questo tipo presenta notevoli difficoltà. Un gruppo G si dice un *BCF-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che $|H/H_G| \leq k$ per ogni sottogruppo H di G; il prossimo risultato fornisce un'interessante informazione sulla struttura dei BCF-gruppi periodici.

Teorema 2.17. (J.T. Buckley, J.C. Lennox, B.H. Neumann, H. Smith, J. Wiegold [**16**]) *Sia G un BCF-gruppo localmente finito. Allora G contiene un sottogruppo abeliano di indice finito.*

3. Gruppi metahamiltoniani

E' ben noto che un gruppo non abeliano ha tutti i sottogruppi normali se e soltanto se è prodotto diretto del gruppo dei quaternioni Q_8 di ordine 8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di periodo 4. Banalmente, se in un gruppo ogni sottogruppo abeliano è normale si ha subito che tutti i sottogruppi sono normali.

Un gruppo G si dice *metahamiltoniano* se ogni suo sottogruppo non abeliano è normale. La classe dei gruppi metahamiltoniani è stata introdotta e studiata da G.M. Romalis e N.F. Sesekin ([**101**],[**102**],[**103**]). Chiaramente ogni gruppo di Tarski (cioè ogni gruppo semplice infinito i cui sottogruppi non banali hanno ordine primo) è metahamiltoniano. D'altra parte, se si restringe l'attenzione ad una opportuna classe di gruppi risolubili generalizzati, si riesce a dimostrare che in questo ambito i gruppi metahamiltoniani hanno il derivato finito e quindi costituiscono una classe speciale di FC-gruppi.

Un gruppo G si dice *localmente graduato* se ogni suo sottogruppo finitamente generato non identico contiene un sottogruppo proprio di indice finito; in particolare, tutti i gruppi localmente risolubili e tutti i gruppi residualmente finiti sono localmente graduati. Poichè la classe dei gruppi localmente graduati è chiusa rispetto alle estensioni, si ha anche che ogni FC-gruppo è localmente graduato. Allora la nozione di gruppo localmente graduato è abbastanza debole, ma sufficiente ad escludere dalle nostre considerazioni i gruppi di Tarski ed altre simili patologie.

Lemma 2.18. *Sia G un gruppo metahamiltoniano residualmente finito. Allora G è nilpotente oppure contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. In particolare G verifica localmente la condizione massimale sui sottogruppi.*

Dimostrazione – Si supponga che G non contiene alcun sottogruppo abeliano di indice finito, e sia $\mathcal{H}$ l'insieme costituito da tutti i sottogruppi di indice finito di G. Allora ogni elemento H di $\mathcal{H}$ è normale in G e il gruppo quoziente G/H ha tutti i sottogruppi normali. Pertanto

$$\gamma_3(G) \leq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \{1\}$$

e quindi G è nilpotente. □

Lemma 2.19. *Sia G un gruppo metahamiltoniano e sia A un sottogruppo normale abeliano senza torsione di G. Se A è finitamente generato, allora A è contenuto in $Z(G)$.*

Dimostrazione – Si supponga per assurdo che esiste un elemento x di G tale che $[A, x] \neq \{1\}$, ed in primo luogo si assuma anche che $A \cap \langle x \rangle = \{1\}$. Ovviamente esiste un numero primo dispari p tale che $[A^{p^n}, x] \neq \{1\}$ per ogni numero intero positivo n. Allora per ogni n il sottogruppo $A^{p^n}\langle x \rangle$ è normale in G, e nel gruppo quoziente $G/A^{p^n}\langle x \rangle$ tutti i sottogruppi sono normali; poichè $p > 2$, si ha che l'interderivato $[A, x]$ è contenuto in $A^{p^n}\langle x \rangle$ e quindi

$$[A, x] \leq \bigcap_{n>0} A^{p^n}\langle x \rangle = \langle x \rangle = \{1\}.$$

Questa contraddizione prova che

$$A \cap \langle x \rangle = \langle x^m \rangle \neq \{1\}.$$

Sia

$$A/A \cap \langle x \rangle = E/A \cap \langle x \rangle \times B/A \cap \langle x \rangle,$$

dove $E/A \cap \langle x \rangle$ è finito e $B/A \cap \langle x \rangle$ è senza torsione. D'altra parte $A \cap \langle x \rangle$ è contenuto in $Z(\langle x, A \rangle)$, per cui $\langle x, E \rangle / Z(\langle x, E \rangle)$ è finito e il teorema di Schur assicura che anche $[E, x]$ è finito. Poichè A è senza torsione, si ha $[E, x] = \{1\}$. Chiaramente A/E è un sottogruppo normale abeliano senza torsione del gruppo metahamiltoniano $\langle x, A \rangle / E$ e $\langle xE \rangle \cap A/E = \{1\}$, per cui segue dalla prima parte della dimostrazione che A/E è contenuto nel centro di $\langle x, A \rangle / E$. Pertanto $[A, x] \leq E$ e quindi $[A, x, x] = \{1\}$. Allora

$$[A, x]^m = [A, x^m] = \{1\},$$

sicchè $[A, x] = \{1\}$ e quest'ultima contraddizione completa la dimostrazione del lemma. □

Lemma 2.20. *Sia G un gruppo metahamiltoniano con il derivato finito. Allora l'ordine di G' è potenza di un numero primo.*

Dimostrazione – Poichè G' è finito, esiste un sottogruppo finitamente generato E di G tale che $E' = G'$. Inoltre $E/Z(E)$ è finito e $Z(E)$ contiene un sottogruppo senza torsione A tale che l'indice $|E : A|$ sia finito; ovviamente

$$G' = E' \simeq E'A/A,$$

e quindi sostituendo G con E/A si può supporre senza ledere la generalità che G è finito. Se X è un qualunque p-sottogruppo di Sylow di G, dall'ipotesi segue che X è normale in G oppure $N_G(X) = C_G(X)$ e in quest'ultimo caso il gruppo G è p-nilpotente (si veda ad esempio [**96**], 10.1.8). Pertanto G in ogni caso contiene un sottogruppo di Sylow normale non identico P, e per il Lemma 1.10 esiste un sottogruppo Q di G tale che $G = Q \ltimes P$. Se Q è abeliano, il derivato G' è contenuto in P e quindi il suo ordine è potenza di un numero primo. Si supponga invece che Q non è abeliano; allora Q è normale in G e $G = P \times Q$. Se P è abeliano, si ha $G' = Q'$ e per induzine sull'ordine di G si ottiene che G' ha ordine potenza di un numero primo. Si supponga infine che P e Q sono entrambi non abeliani. Allora in ciascuno dei gruppi quoziente G/P e G/Q i sottogruppi sono tutti normali, e quindi il derivato di G ha ordine al più 4 (di fatto al più 2 perchè P e Q hanno ordini coprimi). $\square$

Al fine di provare il risultato principale sui gruppi metahamiltoniani è anche necessario ricordare che un gruppo localmente graduato i cui sottogruppi propri sono abeliani è abeliano oppure finito, ed enunciare il seguente importante risultato di P. Hall sui gruppi metabeliani, per una dimostrazione del quale si rinvia a [**94**] (Part 2, Theorem 9.51).

Lemma 2.21. *Sia G un gruppo metabeliano finitamente generato. Allora G è residualmente finito.*

Teorema 2.22. (G.M. Romalis e N.F. Sesekin [**103**]) *Sia G un gruppo metahamiltoniano localmente graduato. Allora G è risolubile con lunghezza derivata al più 3, e il derivato G' di G è finito e ha ordine potenza di un numero primo.*

Dimostrazione – Si supponga in primo luogo G risolubile. Allo scopo di provare che G' è finito, si può assumere per induzione sulla lunghezza derivata di G che il sottogruppo G'' è finito; sostituendo allora G con il gruppo quoziente G/G'' si può supporre senza ledere la generalità che G è metabeliano. Sia E un sottogruppo finitamente generato non abeliano di G. Allora E è normale in G e tutti i sottogruppi di G/E sono normali. Poichè E è residualmente finito per il Lemma 2.21, dal Lemma 2.18 segue che E è policiclico, per cui G' è finitamente generato. Allora G' è anche il derivato di un sottogruppo finitamente generato di G, sicchè si può assumere che G è finitamente generato, e quindi anche residualmente finito per il Lemma 2.21. Ancora il Lemma 2.18 assicura allora che G contiene un sottogruppo normale nilpotente senza torsione N tale che G/N è finito. Sia A un sottogruppo normale abeliano massimale di N, per cui $C_N(A) = A$; poichè A è contenuto in $Z(N)$ per il Lemma 2.19, si ha che $N = A$ è abeliano. Ancora dal Lemma 2.19 segue allora che N è contenuto in $Z(G)$, e quindi G' è finito per il teorema di Schur.

Nel caso generale, sia $\mathfrak{X}$ l'insieme costituito da tutti i sottogruppi non abeliani di G, e si ponga

$$M = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X.$$

Chiaramente ogni elemento X di $\mathfrak{X}$ è un sottogruppo normale di G e tutti i sottogruppi di G/X sono normali, per cui M è normale in G e G'' è contenuto in M. Inoltre ogni sottogruppo proprio di M è abeliano, per cui M è abeliano oppure finito. Pertanto G è in ogni caso estensione finita di un gruppo risolubile. Sia S il più grande sottogruppo normale risolubile di G. Se S è contenuto in $Z(G)$, il gruppo $G/Z(G)$ è finito, per cui tale è anche G' per il teorema di Schur, e in questo caso l'ordine di G' è potenza di un numero primo per il Lemma 2.20. Se invece esiste un elemento x di G tale che $[S, x] \neq \{1\}$, il sottogruppo risolubile $\langle x, S\rangle$ non è abeliano ed è quindi normale in G; allora $\langle x, S\rangle = S$ e tutti i sottogruppi di G/S sono normali, sicchè in tal caso G è risolubile e dalla prima parte della dimostrazione segue che G' è finito ed ha ordine potenza di un numero primo.

Si supponga infine per assurdo che $G^{(3)} \neq \{1\}$, e siano a e b elementi di G'' tali che $[a, b] \neq 1$. Allora $\langle a, b\rangle$ è normale in G e tutti i sottogruppi di $G/\langle a, b\rangle$ sono normali, per cui $G'' = \langle a, b\rangle$ e G'/G'' ha ordine 2. Poichè G' è nilpotente, si ottiene che $G'' = \{1\}$ e questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema. $\square$

In un articolo del 1983, N.F. Kuzennyi e N.N. Semko [**73**] hanno provato che in un qualunque gruppo metahamiltoniano localmente graduato ogni sottogruppo non abeliano contiene il derivato. Altre informazioni sulla struttura dei gruppi metahamiltoniani si trovano in [**25**].

A conclusione di questo paragrafo, sembra il caso di menzionare che B. Bruno e R.E. Phillips [**15**] hanno provato che un gruppo localmente risolubile in cui ogni sottogruppo è normale oppure localmente nilpotente deve essere localmente nilpotente oppure avere il derivato finito.

4. Restrizioni sui normalizzanti

Il Teorema 2.11 può essere enunciato affermando che in un gruppo G tutti i normalizzanti dei sottogruppi hanno indice finito se e soltanto se il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito, e questo risultato suggerisce che il comportamento dei normalizzanti ha una forte influenza sulla struttura del gruppo. Nel 1980 Y.D. Polovickiĭ ha caratterizzato i gruppi dotati di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani, provando che tali gruppi sono tutti e soli quelli con il centro di indice finito. E' opportuno osservare che il Teorema 1.22 ha un ruolo centrale nelle questioni riguardanti i gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi. Il teorema di Polovickiĭ si può ottenere come conseguenza del seguente risultato più generale.

Teorema 2.23. (F. De Mari e F. de Giovanni [**34**]) *Sia G un gruppo in cui al più un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani hanno indice infinito. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Siano $N_G(X_1), \dots, N_G(X_k)$ i normalizzanti di indice infinito di sottogruppi abeliani di G. Se F è l'FC-centro di G e x è un qualunque elemento di F, il normalizzante $N_G(\langle x \rangle)$ ha indice finito in G e quindi risulta

$$G = F \cup N_G(X_1) \cup \dots \cup N_G(X_k),$$

per cui il Teorema 1.22 assicura che $G = F$ è un FC-gruppo. Applicando nuovamente il Teorema 1.22 si ottiene che $N_G(X_1) \cup \dots \cup N_G(X_k)$ è un sottoinsieme proprio di G. Sia x un elemento di

$$G \setminus (N_G(X_1) \cup \dots \cup N_G(X_k)),$$

e si consideri un qualunque sottogruppo abeliano infinito A del centralizzante $C_G(x)$; poichè x normalizza A, il normalizzante $N_G(A)$ deve avere indice finito in G. Allora tutti i sottogruppi abeliani di $C_G(x)$ sono almost normali, e quindi $C_G(x)$ ha il centro di indice finito per il Teorema 2.12. D'altra parte l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito, sicchè G è un FC-gruppo contenente un sottogruppo abeliano di indice finito e quindi il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito. □

Corollario 2.24. (Y.D. Polovickiĭ [**93**]) *Un gruppo G è dotato di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani se e soltanto se il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Se G è un qualunque gruppo, la *norma* $N(G)$ di G è l'intersezione dei normalizzanti di tutti i sottogruppi di G. La norma di un gruppo è stata introdotta da R. Baer [**3**] ed in seguito studiata da vari autori; in particolare, E. Schenkman [**104**] ha provato che la norma di un qualunque gruppo G è contenuta nel secondo centro $Z_2(G)$ di G, e questo risultato si può anche ottenere come conseguenza diretta di proprietà elementari degli automorfismi potenza di un gruppo (si consulti [**20**], e si ricordi che un automorfismo α di un gruppo G si dice un *automorfismo potenza* se risulta $X^\alpha = X$ per ogni sottogruppo X di G). Dal Corollario 2.24 segue che se G è un gruppo tale che $G/N(G)$ è finito, allora anche $G/Z(G)$ deve essere finito (un'osservazione che si può ovviamente dedurre anche dal Teorema 2.11). D'altra parte la sezione $N(G)/Z(G)$ è spesso soggetta a forti restrizioni, come e-videnziato da un recente risultato di J.C. Beidleman, H. Heineken e M.L. Newell [**9**].

Negli ultimi anni sono stati considerati gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi con un'assegnata proprietà. Per un'ampia panoramica su tali ricerche si può consultare l'articolo [**32**]; nel seguito di questo paragrafo ci si limiterà ad enunciare alcuni dei risultati ottenuti.

Banalmente un gruppo è metahamiltoniano se e soltanto se è abeliano oppure ha un unico normalizzante di sottogruppi non abeliani, e tale osservazione suggerisce di studiare i gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non abeliani come una naturale generalizzazione dei gruppi metahamiltoniani. Ovviamente la lunghezza derivata dei gruppi risolubili con questa proprietà non può essere limitata, però sussiste il seguente risultato che estende il Teorema 2.22.

Teorema 2.25. (F. De Mari e F. de Giovanni [**33**]) *Sia G un gruppo localmente graduato con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non abeliani. Allora il derivato G' di G è finito.*

La considerazione del gruppo diedrale infinito prova che i gruppi risolubili in cui ogni sottogruppo non abeliano ha un numero finito di coniugati possono avere il derivato infinito. D'altra parte, se $N^*(G)$ denota l'intersezione dei normalizzanti di tutti i sottogruppi non abeliani del gruppo G, dal Teorema 2.25 discende il seguente risultato, che può essere considerato una generalizzazione del teorema di Schur.

Corollario 2.26. *Sia G un gruppo localmente graduato tale che il gruppo quoziente $G/N^*(G)$ sia finito. Allora anche il derivato G' di G è finito.*

L'ultimo risultato di questo paragrafo riguarda i normalizzanti dei sottogruppi che non sono localmente nilpotenti.

Teorema 2.27. (F. De Mari e F. de Giovanni [**35**]) *Sia G un gruppo localmente risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono localmente nilpotenti. Allora G è localmente nilpotente oppure il suo derivato G' è finito.*

5. Anelli gruppali e FC-gruppi

Lo studio degli anelli gruppali il cui gruppo degli elementi invertibili è un FC-gruppo è stato iniziato da S.K. Seghal e H.J. Zassenhaus [**110**]. Più precisamente questi autori hanno caratterizzato gli anelli gruppali KG per i quali il gruppo $\mathcal{U}(KG)$ degli elementi invertibili è un FC-gruppo, nel caso in cui K è un campo di caratteristica 0. Tale risultato è stato subito esteso da C. Polcino Milies ([**88**],[**89**]) agli anelli gruppali su campi infiniti di caratteristica positiva.

TEOREMA 2.28. (S.K. Seghal e H.J. Zassenhaus [**110**], C. Polcino Milies [**88**],[**89**]) *Sia K un campo infinito di caratteristica $p \geq 0$ e sia G un gruppo che non contiene elementi di periodo p se $p > 0$. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *G è abeliano;*
(2) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è finito e centrale;*
(3) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è centrale e $T = Q \times B$, dove B è finito, $Q \simeq Z(q^\infty)$ per qualche numero primo $q \neq p$ e G' è contenuto in Q. Inoltre, se K_∞ è il campo ottenuto aggiungendo tutte le radici q^n-esime (con $n \in \mathbb{N}$) dell'unità al sottocampo primo K_1 di K, allora il sottocampo $K_\infty \cap K$ ha grado finito su K_1.*

La dimostrazione del teorema precedente si può trovare in forma dettagliata, sebbene solo nel caso di caratteristica 0, nella monografia [**109**] (Theorem 5.4, p. 209). La verifica per il caso di caratteristica positiva non è molto diversa (si veda [**89**], Theorem 1 e [**18**], Theorem C). Nello stesso volume S.K. Seghal ha posto il problema di caratterizzare completamente gli anelli gruppali in cui gli elementi invertibili formano un FC-gruppo (Problem 37, p. 231). E' stato lo stesso Seghal a risolvere il problema, in un articolo in collaborazione con G.H. Cliff [**18**]; questo paragrafo è dedicata all'esposizione dei loro risultati.

LEMMA 2.29. *Siano K un campo e G un gruppo tali che KG sia infinito e $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo. Allora il sottogruppo di torsione T di G è abeliano e ogni suo sottogruppo è normale in G.*

DIMOSTRAZIONE $-$ Si supponga per assurdo che esistono degli elementi $t \in T$ e $g \in G$ tali che $g^{-1}tg \notin \langle t \rangle$. Sia n il periodo di t e per ogni $c \in K$ si ponga

$$a_c = 1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i.$$

Allora a_c è invertibile e

$$a_c^{-1} = 1 - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i,$$

in quanto $(t-1)\sum_{i=1}^{n} t^i = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}
a_c^{-1}ta_c &= \big(1 - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)t\big(1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\\
&= \big(t - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\big(1 + c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\\
&= t - c(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i + ct(t-1)g\sum_{i=1}^{n} t^i\\
&= t - 2ctg\sum_{i=1}^{n} t^i + cg\sum_{i=1}^{n} t^i + ct^2g\sum_{i=1}^{n} t^i.
\end{aligned}$$

Si assuma in primo che la caratteristica di K non sia 2. Poichè $t^g \notin \langle t\rangle$, si ha che $g \neq tgt^m$ per ogni numero intero positivo m, per cui cg compare nell'espressione di $a_c^{-1}ta_c$. D'altra parte KG è infinito e G è un FC-gruppo, sicchè esistono infiniti elementi dh di KG, con $k \in K$ e $h \in G$ tali che $t^g = t^h$. Tali elementi, seguendo ciò che si è fatto per cg, producono infiniti coniugati di t e questo conduce ad una contraddizione.

Supponiamo ora che K abbia caratteristica 2. Allora $(t^2)^g \in \langle t\rangle$, in quanto altrimenti per ogni $g \neq tgt^m$ per ogni numero intero positivo m, il che produce come prima una contraddizione. Si può assumere, senza ledere la generalità, che il periodo di t sia una potenza di 2. Sia y un qualunque elemento del centralizzante $C_G(\langle t, g\rangle)$, e si ponga

$$b = 1 - cy\sum_{i=1}^{n} t^i.$$

Allora $b = b^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
b^{-1}gb &= \big(1 + cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big)g\big(1 + cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\\
&= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big) + cy\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big)g + \big(cy\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\big(cyg\sum_{i=1}^{n} t^i\big)\\
&= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big) + cyg\big(\sum_{i=1}^{n} (t^i)^g\big) + c^2y^2\big(\sum_{i=1}^{n} (t^i)^g\big)\big(\sum_{i=1}^{n} t^i\big)
\end{aligned}$$

$$= g + cyg\big(\sum_{i=1}^{n}(t^i + (t^i)^g)\big) + c^2y^2\big(\sum_{i=1}^{n}(t^i)^g\big)\big(\sum_{i=1}^{n}t^i\big).$$

Poichè $t^g \notin \langle t\rangle$, si ha che ygt appartiene al supporto di $b^{-1}gb$, ottenendo così infiniti coniugati di g al variare degli infiniti valori cy. Questa contraddizione prova che ogni sottogruppo di T è normale in G.

Per assurdo T non sia abeliano, e quindi $T = Q_8 \times A$, dove Q_8 è una copia del gruppo dei quaternioni di ordine 8 ed A è abeliano. Come prima, si supponga anzitutto che K non abbia caratteristica 2. Proveremo in primo luogo che esiste un anello unitario infinito R tale che l'anello $M_2(R)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su R sia contenuto in KG. Se K ha caratteristica 0, allora $M_2(\mathbb{Q}) \leq KG$. Sia invece non nulla la caratteristica di K. Poichè il campo primo K_1 di K è un campo finito di ordine dispari, si ha

$$K_1Q_8 = K_1 \oplus K_1 \oplus K_1 \oplus K_1 \oplus M_2(K_1) = 4K_1 \oplus M_2(K_1),$$

e quindi

$$KQ_8 = 4K \oplus M_2(K).$$

Se K è infinito, è sufficiente porre $R = K$. Sia infine K finito, sicchè G è infinito e quindi anche A è infinito oppure G contiene un elemento aperiodico. In ogni caso, esiste un sottogruppo infinito H di G tale che $\langle H, Q_8\rangle = H \times Q_8$. Allora

$$K(H \times Q_8) = 4KH \oplus M_2(KH)$$

e in questo caso basta scegliere $R = KH$.

Per ogni elemento c di R si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -c^2-1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha infiniti coniugati e questa contraddizione prova in questo caso l'asserto.

Supponiamo ora che K abbia caratteristica 2, e sia

$$Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = 1,\ i^2 = j^2,\ i^j = i^{-1}\rangle.$$

Qualunque siano gli elementi $g \in C_G(Q_8)$ e $c \in K$, poniamo $a = 1+cg(1+i)$. Allora

$$a^{-1} = \big(1 + cg(1+i)\big)^3,$$

in quanto $(1+i)^4 = 0$, e risulta

$$aja^{-1} = \big(1 + cg(1+i)\big)j\big(1 + cg(1+i)\big)^3$$
$$= j\big(1 + cg(1+i^{-1})\big)\big(1 + cg(1+i) + c^2g^2(1+i)^2 + c^3g^3(1+i)^3\big)$$

$$= j\big(1 + cg(1 + i^{-1}) + c^2g^2(1 + i + i^2 + i^3)\big).$$

Quindi il prodotto jig appare in aja^{-1} con coefficiente c per gli infiniti valori di cg e perciò l'elemento j ha infiniti coniugati. Quest'ultima contraddizione completa la dimostrazione del lemma. □

TEOREMA 2.30. (S.K. Seghal e G.H. Cliff [**18**]) *Siano K un campo finito di caratteristica positiva p e G un gruppo privo elementi di periodo p. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *KG è finito oppure abeliano;*
(2) *G è un FC-gruppo infinito non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è abeliano finito ed inoltre ogni idempotente di KT è centrale in KG;*
(3) *G è un FC-gruppo non abeliano il cui sottogruppo di torsione T è centrale e inoltre $T = Q \times B$, con B finito, $Q \simeq Z(q^\infty)$ per qualche numero primo $q \neq p$ e $G' \leq Q$.*

DIMOSTRAZIONE − Si supponga che $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo, e che KG sia infinito e non abeliano, sicchè ovviamente G è un FC-gruppo infinito non abeliano. Si proverà in primo luogo che se il sottogruppo di torsione T di G è finito, allora vale la condizione (2). In primo luogo, T è abeliano per il Lemma 2.29. Sia e un idempotente di KT. Al fine di provare che e è centrale, per il Theorem II.16 di [**1**] è lecito assumere che e è un idempotente primitivo di KT.* Qualunque sia l'elemento g di G, si ha $e^g = e$ oppure $e^ge = 0$. Infatti, poichè e^ge è un idempotente di KT e $e^ge \in eKTe$, per l'esercizio 23(ii) a pag.66 di [**87**], $e^ge = 0$ oppure $e^ge = e$; essendo e^g un idempotente primitivo in virtù dell'esercizio 14 di pag.334 di [**75**], da $e^ge = e$ segue che $e^g = e$. Dimostriamo ora che e è centrale. Per assurdo si supponga che $e^x \neq e$ per qualche $x \in G$ e sia g un elemento di $C_G(\langle x, T_1\rangle)$; allora $a = 1 + xge$ è un elemento invertibile e $a^{-1} = 1 - xge$. Pertanto

$$a^{-1}xa = x - xg(ex - xe) - g^2x^3e^{x^2}e,$$

e l'ultimo termine coincide con zero oppure con g^2x^3e. Poichè $ex \neq xe$, esiste $h \in Supp(ex - xe)$, ed allora xgh pu apparire nel supporto di g^2x^3e soltanto per un numero finito di valori di g. Esistono perciò infiniti coniugati di x corrispondenti agli infiniti valori di g, e questa contraddizione prova che e è centrale in KG.

*Se R è un anello, due elementi idempotenti e ed f di R si dicono *ortogonali* se $ef = fe = 0$; un elemento idempotente $e \neq 0$ si dice *primitivo* se non è somma di due elementi idempotenti ortogonali non nulli. Nell'insieme degli elementi idempotenti di un anello R si può definire una relazione d'ordine ponendo $e \leq f$ se e soltanto se $ef = fe = e$; gli elementi idempotenti primitivi di R sono esattamente gli idempotenti non nulli minimali rispetto a tale relazione d'ordine.

Si supponga quindi che T è infinito; si proverà che in questa situazione sussiste la condizione (3). Siano x e y elementi di G tali che $xy \neq yx$ e si ponga $t = [x, y]$. Allora $t \in T$ e per ipotesi il periodo $o(t)$ di t è primo con p. Sia

$$\widehat{t} = (1/o(t)) \sum_{j=1}^{o(t)} t_j,$$

e quindi

$$KT = \widehat{t}KT \oplus (1-t)KT.$$

D'altra parte $(1-t)KT$ non può avere infiniti elementi idempotenti e_i, altrimenti x avrebbe infiniti coniugati x^{u_i}, dove $u_i = e_i y + (1 - e_i)$. Ne segue che $(1-t)KT$ ha idempontenti primitivi e quindi, per il Lemma 14.4.3 di [**87**], si ha $T = Q \times B$, con Q di tipo q^∞ per qualche numero primo $q \neq p$ e B finito. Per assurdo esistano elementi x e y di G tali che $t = [x, y]$ non appartenga a Q. Per ogni numero intero positivo n si denoti con Q_n il sottogruppo di ordine q^n di Q; la considerazione della catena di sottogruppi

$$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n < Q_{n+1} < \ldots$$

permette di ottenere infiniti idempotenti della forma

$$e_n = (1/q^n) \sum_{h \in Q_n} h.$$

Posto $u_n = e_n y + (1 - e_n)$, si ha

$$\begin{aligned} u_n^{-1} x u_n &= \big(e_n y^{-1} + (1-e_n)\big) x \big(e_n y + (1-e_n)\big) \\ &= x\big(e_n t + (1-e_n)\big); \end{aligned}$$

Inoltre, qualunque siano i numeri interi positivi m e n risulta

$$u_m^{-1} x u_m = u_n^{-1} x u_n \Longleftrightarrow e_m(1-t) = e_n(1-t) \Longleftrightarrow e_m = e_n.$$

Pertanto $\{x^{u_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme infinito di coniugati di x, il che contraddice l'ipotesi che $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo e prova che G' è contenuto in Q. Per il Lemma 2.29 si ha

$$[G, B] \leq Q \cap B = \{1\}$$

e quindi B è centrale; infine, Q è centrale poichè G è un FC-gruppo e quindi T è un sottogruppo centrale di G.

Reciprocamente, è banale che se è verificata la condizione (1) allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo. Si supponga quindi che per il gruppo G valga la condizione (2). Allora KT è una somma diretta di campi finiti $K_1, \ldots, K_r$. Per il Lemma 2.4 di [**110**] applicato alla nostra situazione si ha che ogni elemento $u \in \mathcal{U}(KG)$ può essere scritto nella forma

$$u = \sum_{i=1}^{r} k_i g_i,$$

con $k_i \in K_i$ e $g_i \in G$. Se

$$v = \sum_{i=1}^{r} l_i h_i$$

è un qualunque altro elemento di $\mathcal{U}(KG)$ (con $l_i \in Ki$ e $h_i \in G$), si ha

$$u^v = \sum_{i=1}^{r} (k_i g_i)^{l_i h_i} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{h_i} g_i^{l_i h_i} = \sum_{i=1}^{r} k_i^{h_i} (l_i^{-1}) g_i^{h_i} l_i^{h_i},$$

e quindi u ha un numero finito di coniugati in $\mathcal{U}(KG)$ in quanto ciascun K_i è finito.

Si supponga infine che vale la condizione (3), e sia u un qualunque elemento di $\mathcal{U}(KG)$. Allora il sottogruppo di torsione del sottogruppo generato dal supporto $Supp(u)$ di u è contenuto in $\langle t_1 \rangle \times B$ per un opportuno $t_1 \in Q$. Ma $K(\langle t_1 \rangle \times B)$ è somma diretta di campi $K_1, \dots, K_r$ con $r \geq 1$, e dal Lemma 2.4 di [**110**], applicato alla nostra situazione, segue che

$$u = \sum_{i=1}^{r} k_i g_i,$$

con $k_i \in K_i$ e $g_i \in G$. Sia G_1 il sottogruppo generato da $Supp(u)$ e dagli elementi $g_1, \dots, g_r$; allora il sottogruppo di torsione di G_1 è contenuto in $\langle t \rangle \times B$ per un opportuno elemento t di Q. Posto

$$\widehat{t} = (1/o(t)) \sum_{j=1}^{o(t)} t_j,$$

si ha

$$A = K(\langle t \rangle \times B) = \widehat{t}A \oplus (1-t)A, \qquad KT = \widehat{t}KT \oplus (1-t)KT.$$

E' noto che ogni idempotente di $(1-t)A$ è addendo di un idempotente di $(1-t)K\langle t \rangle$ e che ogni idempotente di $(1-t)K\langle t \rangle$ è somma di al più s idempotenti primitivi ortogonali di $(1-t)KQ$, con s dipendente solo da $\langle t \rangle$ (cfr. [**87**], p.690). Ne segue che ogni idempotente di $(1-t)A$ è una somma di al più $|B|s$ idempotenti primitivi ortogonali di KT. Per assurdo l'elemento u abbia $n+1$ coniugati $u^{v_1}, \dots, u^{v_{n+1}}$, dove $n = |B|\, o(t)^2 s$, e sia t' un elemento di Q tale che $\langle t' \rangle \times B$ contenga il sottogruppo di torsione del sottogruppo generato da G_1 e da $v_1, \dots, v_{n+1}$. Si ha allora una decomposizione in somma di campi

$$K(\langle t' \rangle \times B) = \sum F_i.$$

Si scriva

$$u = \sum \alpha_i l_i$$

e, per un qualunque $j = 1, \dots, n+1$,

$$v = v_j = \sum \beta_i h_i$$

con gli elementi α_i, β_i in F_i e gli elementi l_i, h_i in G, dove $l_i = g_i$. Allora risulta

$$u^v = \sum \alpha_i l_i^{h_i} = \sum \alpha_i l_i t_i,$$

dove $t_i = t^{b_i}$ per un certo intero b_i. Osserviamo che se $\alpha_i l_i t_i \neq \alpha_i l_i$, si ha anche $\alpha_i l_i(1 - t_i) \neq 0$ e così $\alpha_i l_i(1 - t) \neq 0$. Ma esistono al più $o(t)s|B|$ valori di i tali che $\alpha_i l_i(1 - t) \neq 0$, e quindi i coniugati u^v di u sono al più $s|B|o(t)^2$, e questa contraddizione completa la prova del teorema. □

Più snella appare la caratterizzazione nel caso degli anelli gruppali KG quando K ha caratteristica positiva p e il gruppo G contiene elementi di periodo p.

Lemma 2.31. *Siano K un campo di caratteristica positiva p e G un gruppo. Se $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo infinito, allora ogni p-elemento di G è centrale.*

Dimostrazione − Supponiamo per assurdo che esistano in G un elemento x di G di periodo p^n ed un elemento g tali che $x^g \neq x$. Poichè il sottogruppo di torsione T di G è abeliano per il Lemma 2.29, l'elemento g è aperiodico. Inoltre ancora dal Lemma 2.29 segue che $\langle x \rangle$ è normale in G, per cui si ha

$$\big(g^m(1 - x)\big)^{p^n} = 0$$

per ogni numero intero positivo m. Pertanto l'elemento $u_m = 1 + g^m(1 - x)$ è invertibile e il suo inverso è u_m^{p-1}, e risulta

$$\begin{aligned} u_m g u_m^{-1} &= \big(1 + g^m(1 - x)\big) g u_m^{-1} \\ &= g\big(1 + g^m(1 - x^g)\big)u_m^{-1} = g\big(u_m + g^m(x - x^g)\big)u_m^{-1} \\ &= g\big(1 + g^m(x - x^g)(1 + g^m(1 - x))^{p^n - 1}\big). \end{aligned}$$

Poiché g è aperiodico, il prodotto $g^{m+1}x$ appartiene a $Supp(u_m g u_m^{-1})$ e quindi g ha infiniti coniugati in $\mathcal{U}(KG)$. Questa contraddizione completa la dimostrazione. □

Teorema 2.32. (S.K. Seghal e G.H. Cliff [**18**], C. Polcino Milies [**88**]) *Siano K un campo di caratteristica positiva p e G un gruppo contenente elementi di periodo p. Allora $\mathcal{U}(KG)$ è un FC-gruppo se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni:*

(1) *KG è finito oppure abeliano;*
(2) *$p = 2$, il derivato G' di G ha ordine 2 e il sottogruppo di torsione T di G è della forma $T = G' \times A$, dove A è un sottogruppo centrale di G di ordine dispari.*

Dimostrazione − Supponiamo che G sia un gruppo non abeliano tale che KG sia infinito e $\mathcal{U}(KG)$ sia un FC-gruppo. Siano x e y elementi di G tali che $xy \neq yx$. Per il Lemma 2.29 il sottogruppo T è abeliano e quindi si può assumere che x sia aperiodico. Sia t un elemento di G di periodo p. Poichè t è centrale in G per il Lemma 2.31, si ha

$$\big(x(1-t)\big)^p = x^p(1-t)^p = 0.$$

Posto $a_x = 1 + x(1-t)$, si ha $a_x^p = 1$ e così a_x è invertibile e

$$a_x^{-1} = \big(1 + x(1-t)\big)^{p-1}.$$

Inoltre risulta

$$\begin{aligned} a_x y a_x^{-1} &= \big(1 + x(1-t)\big) y a_x^{-1} = y\big(1 + x^y(1-t)\big) a_x^{-1} \\ &= y\big(1 + x(1-t) + (x^y - x)(1-t)\big) a_x^{-1} \\ &= y\big(1 + (x^y - x)(1-t)(1 + x(1-t))^{p-1}\big) \\ &= y + y(-x - x^y t)\big(1 + x(1-t)\big)^{p-1} + y(x^y + xt)\big(1 + x(1-t)\big)^{p-1}. \end{aligned}$$

Poichè x è aperiodico e il gruppo quoziente G/T è abeliano senza torsione, si ha $yx \in Supp(a_x y a_x^{-1})$ a meno che $-x - x^y t = 0$ e $xy \in Supp(a_x y a_x^{-1})$ a meno che $x^y + xt = 0$. D'altra parte esistono infiniti elementi x' di $G \setminus T$ tali che $y^x = y^{x'}$, per cui si può concludere che $-x - x^y t = 0$ e $x^y + xt = 0$. Pertanto K ha caratteristica 2, risulta $t = y^{-1}x^{-1}yx$ per ogni coppia (x, y) di elementi non permutabili di G e si ha $t^2 = 1$; allora t è l'unico elemento di periodo 2 di T. Poichè T è abeliano, si ottiene $T = \langle t \rangle \times A$, dove A è un sottogruppo privo di elementi di periodo 2. Qualunque siano gli elementi a di A e g di G, il coniugato a^g appartiene a $\langle a \rangle$ e quindi $a^g = a$, in quanto $G' = \langle t \rangle$ e at non appartiene a $\langle a \rangle$. Pertanto A è contenuto in $Z(G)$. Se per assurdo A fosse infinito, KA conterrebbe una famiglia infinita elementi idempotenti $(e_i)_{i \in I}$; considerati allora due qualunque elementi non permutabili x e y di G, l'elemento y avrebbe gli infiniti coniugati

$$\big(x^{-1}e_i + (1 - e_i)\big) y \big(xe_i + (1 - e_i)\big).$$

Pertanto in questo caso vale la condizione (2).

Si assuma viceversa che vale la condizione (2), e si supponga in primo luogo che $G' = T$; si proverà che in questo caso ogni elemento invertibile u di KG ha al più due coniugati. Poichè G/T è abeliano senza torsione, ogni elemento invertibile dell'anello gruppale $K(G/T)$ è multiplo di un elemento di G/T (per il Teorema 12.1.11 di [**87**]), e quindi esistono elementi $c \in K$, $g \in G$, $a \in KG$ tali che $u = cg + a(1 + t)$, con t generatore di T. Si osservi che l'elemento $a(1 + t)$ è centrale in KG. Infatti, poichè G/T è abeliano, per ogni $x \in G$ esiste $b \in KG$ tale che $a^x = a + b(1 + t)$; ma $(1 + t)^2 = 0$ e quindi

$$\big(a(1 + t)\big)^x = a^x(1 + t^x) = \big(a + b(1 + t)\big)(1 + t) = a(1 + t).$$

Siano $v \in \mathcal{U}(KG)$ e $d \in K,\ h \in G,\ b \in KG$ elementi tali che $v = dh{+}b(1{+}t)$. Allora

$$u^v = \big(cg + \alpha(1+t)\big)^v = cg^v + a(1+t).$$

Inoltre

$$v^{-1} = d^{-1}h^{-1} + d^{-2}h^{-2}b(1+t)$$

e infine

$$\begin{aligned} cg^v &= c\big(d^{-1}h^{-1} + d^{-2}h^{-2}b(1+t)\big)g\big(dh + b(1+t)\big) \\ &= c\big(d^{-1}h^{-1}g + d^{-2}h^{-2}b(1+t)g\big)\big(dh + b(1+t)\big) \\ &= c\big(g^h + d^{-1}h^{-1}(g+g^h)b(1+t)\big). \end{aligned}$$

Se $g^h = g$, si haa $cg^v = cg$, mentre se $g^h \neq g$, allora $g^h = gt$ e così $cg^v = cgt$. Ne segue che u ha al più due coniugati.

Supposto quindi $T = G' \times A$, con A sottogruppo centrale finito di G di ordine dispari $n > 1$, per assurdo si assuma che esiste un elemento invertibile u di (KG) dotato di $2^n + 1$ coniugati distinti

$$u^{a_1}, u^{a_2}, \ldots, u^{a_{2^n+1}}.$$

Sia G_1 il sottogruppo di G generato da T e dal supporto degli elementi

$$u, a_1, a_2, \ldots, a_{2^n+1}.$$

Si ha allora evidentemente che u appartiene a $\mathcal{U}(KG_1)$ e gli elementi

$$u^{a_1}, u^{a_2}, \ldots, u^{a_{2^n+1}}$$

sono coniugati a u in $\mathcal{U}(KG_1)$. Poichè G_1/G' è un gruppo abeliano finitamente generato, esiste un sottogruppo senza torsione B/G' di G_1/G' tale che

$$G_1/G' = B/G' \times L/G'.$$

Ma A è un sottogruppo centrale di G, per cui $G_1 = A \times B$ e B' è il sottogruppo di torsione di B e quindi

$$KG_1 = K(A \times B) = (KA)B.$$

D'altra parte A un gruppo abeliano finito di ordine dispari, sicchè KA è isomorfo alla somma diretta di al più n campi $K_1, \ldots, K_n$. Pertanto

$$KG_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} K_i B$$

e

$$\mathcal{U}(KG_1) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{U}(K_i B).$$

Dalla prima parte segue che ogni elemento invertibile di K_iB ha al più due coniugati e quindi ogni elemento invertibile di KG_1 ha al più 2^n coniugati, in contraddizione con l'esistenza di $2^n{+}1$ coniugati di u. Questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema. $\square$

Esistono vari articoli che descrivono gli anelli gruppali RG in cui il gruppo degli elementi invertibili ha la proprietà FC, per particolari scelte dell'anello R. E' il caso di citare ancora il lavoro di Seghal e Zassenhaus del 1977 che esamina anche il caso $R = \mathbb{Z}$ e quello di H. Merklen e C. Polcino Milies ([**83**]) per l'anello degli interi p-adici $\mathbb{Z}_{(p)}$.

I risultati qui esposti sono stati punto di partenza per ulteriori approfondimenti, a riprova di un costante interesse per l'argomento; ci limitiamo qui a menzionare i contributi di C. Polcino Milies e S. K. Sehgal [**90**] e quello di S.P. Coelho e C. Polcino Milies [**19**].

6. Problemi reticolari e FC-gruppi

Sia G un gruppo. L'insieme $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G è munito in modo naturale di una struttura di reticolo, con le operazioni di intersezione e di sottogruppo generato da due sottogruppi. Un classico ramo della teoria dei gruppi, con sviluppi anche molto recenti, riguarda l'analisi della reciproca influenza tra il gruppo G ed il reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Se G e $\bar{G}$ sono gruppi, un isomorfismo tra i reticoli $\mathfrak{L}(G)$ e $\mathfrak{L}(\bar{G})$ si chiama anche una *proiettività* tra i gruppi G e $\bar{G}$; una classe di gruppi $\mathfrak{X}$ si dice *proiettivamente invariante* se ogni gruppo reticolarmente isomorfo ad un $\mathfrak{X}$-gruppo appartiene ancora alla classe $\mathfrak{X}$. Si verifica facilmente che tra le classi di gruppi proiettivamente invarianti vi sono quelle dei gruppi finiti, dei gruppi ciclici, dei gruppi periodici, dei gruppi localmente finiti. E' anche noto che la classe dei gruppi risolubili è proiettivamente invariante. D'altra parte esiste ovviamente una proiettività tra il gruppo simmetrico $Sym(3)$ ed il gruppo abeliano di ordine 9 ed esponente 3; pertanto la classe dei gruppi abeliani non è proiettivamente invariante, e la stessa osservazione vale per la classe dei gruppi nilpotenti.

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo. Un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice *modulare* se risulta

$$(a \vee x) \wedge y = a \vee (x \wedge y)$$

qualunque siano gli elementi x e y di $\mathfrak{L}$ tali che $a \leq y$ e

$$(a \vee x) \wedge y = x \vee (a \wedge y)$$

per ogni coppia (x, y) di elementi di $\mathfrak{L}$ tali che $x \leq y$. Il reticolo $\mathfrak{L}$ si dice *modulare* se ogni suo elemento è modulare, cioè se in $\mathfrak{L}$ vale l'identità

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

per ogni terna (x, y, z) di elementi tali che $x \leq z$.

La ben nota identità di Dedekind assicura che il reticolo dei sottogruppi di un qualunque gruppo abeliano è modulare, e la modularità può essere considerata come la traduzione naturale della commutatività di un gruppo, anche se ovviamente esistono molti gruppi non abeliani il cui reticolo dei sottogruppi è modulare. La struttura dei gruppi modulari è stata completamente descritta da K. Iwasawa [**62**], [**63**] e R. Schmidt [**105**]. Sia p un numero primo, e sia il gruppo $G = \langle x \rangle \ltimes P$ prodotto semidiretto di un p-gruppo abeliano elementare infinito P e di un sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ di ordine primo q tale che $a^x = a^k$ per ogni $a \in P$, dove $1 < k < p$. E' facile provare che il reticolo dei sottogruppi di G è isomorfo a quello di un gruppo abeliano (ed in particolare è modulare); d'altra parte G non è un FC-gruppo, in quanto la classe di coniugio di x in G è infinita. Pertanto neppure la classe degli FC-gruppi è proiettivamente invariante, e non è quindi possibile fornirne una caratterizzazione reticolare. D'altra parte, F. de Giovanni e C. Musella [**48**] hanno recentemente dimostrato che per i gruppi finitamente generati la proprietà FC può essere descritta reticolarmente, ed hanno inoltre provato che la classe dei gruppi FC-ipercentrali è proiettivamente invariante (un gruppo G si dice *FC-ipercentrale* se la *serie FC-centrale superiore* di G, definita a partire dall'FC-centro in analogia con la serie centrale superiore, termina con G). Questi risultati si basano sul notevole teorema di G. Zacher [**120**] e I.A. Rips che assicura l'invarianza reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo, e sulla caratterizzazione reticolare di tale proprietà fornita da R. Schmidt [**105**].

Negli ultimi anni molta attenzione è stata dedicata alla possibilità di interpretare dal punto di vista reticolare i risultati di Neumann descritti nel paragrafo 2 e riguardanti i gruppi nei quali tutti i sottogruppi verificano una condizione di normalità generalizzata. Si noti che ogni sottogruppo normale di un gruppo G è un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$, e quindi che l'immagine di un sottogruppo normale di G mediante una qualunque proiettività

$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$

è un sottogruppo modulare di $\bar{G}$ (cioè un elemento modulare di $\mathfrak{L}(\bar{G})$); per un sottogruppo la modularità può essere allora considerata come la naturale traduzione reticolare della normalità.

Sia G un gruppo. Un sottogruppo X di G si dice *almost modulare* se esiste un sottogruppo di indice finito Y di G contenente X e tale che X sia un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(Y)$; il sottogruppo X si dice invece *nearly modulare* in G se esiste un sottogruppo modulare M di G contenente X e tale che l'indice $|M : X|$ sia finito. L'invarianza reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo assicura che i concetti appena introdotti sono di natura pienamente reticolare, e possono essere riprodotti in un arbitrario reticolo completo. In particolare, le immagini dei sottogruppi almost normali di un gruppo G mediante una proiettività

$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$

sono sottogruppi almost modulari di $\bar{G}$, e similmente l'immagine H^φ di un qualunque sottogruppo nearly normale H di G è un sottogruppo nearly modulare di $\bar{G}$. Il prossimo risultato è il corrispondente reticolare del Teorema 2.11. Si ricordi che, se G è un gruppo periodico, $\pi(G)$ denota l'insieme dei numeri primi che sono periodi di elementi di G.

Teorema 2.33. (F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**49**]) *In un gruppo periodico G ogni sottogruppo è almost modulare se e soltanto se risulta $G = M \times K$, dove M è un gruppo con il reticolo dei sottogruppi modulare, K contiene un sottogruppo abeliano di indice finito, $\pi(M) \cap \pi(K) = \emptyset$ ed esiste un sottogruppo normale finito N di K tale che il reticolo dei sottogruppi di K/N sia modulare. In particolare, G contiene un sottogruppo di indice finito il cui reticolo dei sottogruppi è modulare.*

Un corrispondente risultato reticolare è stato ottenuto anche per il Teorema 2.14. Si ha infatti:

Teorema 2.34. (M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e Y.P. Sysak [**28**]) *In un gruppo periodico G ogni sottogruppo è nearly modulare se e soltanto se G contiene un sottogruppo normale finito N tale che il reticolo dei sottogruppi di G/N sia modulare.*

Per quanto riguarda l'interpretazione reticolare del Teorema 2.17, occorre tenere presente che, nonostante la finitezza dell'indice di un sottogruppo sia un invariante reticolare, non è invariante per proiettività l'indice di un sottogruppo; per rendersi conto di ciò è sufficiente notare che due qualunque gruppi di ordine primo sono ovviamente reticolarmente isomorfi. La conseguente difficoltà nella definizione reticolare dei BCF-gruppi può essere superata in virtù di un risultato ottenuto da M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella e R. Schmidt [**26**]; infatti questi autori hanno provato che se G è un gruppo e H è un sottogruppo di indice finito di G, allora il numero dei fattori primi dell'indice $|G : H|$ (con molteplicità) può essere determinato nel reticolo dei sottogruppi di G.

Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *modulare-per-finito* se un contiene un sottogruppo Y di indice finito che sia un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Evidentemente ogni sottogruppo normale-per-finito è anche

modulare-per-finito, e l'immagine di un sottogruppo normale-per-finito di un gruppo G mediante una qualunque proiettività
$$\varphi : \mathfrak{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{L}(\bar{G})$$
è un sottogruppo modulare-per-finito di $\bar{G}$.

Un gruppo G si dice un *BMF-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che ogni sottogruppo X di G contenga un sottogruppo Y di indice finito che sia modulare in G e per il quale il numero dei fattori primi (con molteplicità) di $|X : Y|$ sia al più k. Le considerazioni precedenti assicurano che la proprietà BMF è di natura puramente reticolare; pertanto il prossimo risultato va confrontato con il Teorema 2.17.

TEOREMA 2.35. (M. De Falco, F. de Giovanni e C. Musella [**23**]) *Sia G un BMF-gruppo localmente finito. Allora G contiene un sottogruppo M di indice finito il cui reticolo dei sottogruppi $\mathfrak{L}(M)$ è modulare.*

Le dimostrazioni dei teoremi 2.33, 2.34 e 2.35 comportano una delicata analisi del comportamento dei sottogruppi quasinormali e dei sottogruppi quasinormali generalizzati (si ricordi che un sottogruppo X di un gruppo G si dice *quasinormale* se risulta $XY = YX$ per ogni sottogruppo Y di G). Per i relativi risultati, si fa riferimento agli articoli [**49**], [**27**], [**22**].

Anche del teorema di Schur è stata ottenuta una interpretazione reticolare. Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *modularmente immerso* in G se per ogni elemento g di G il reticolo $\mathfrak{L}(\langle g, X\rangle)$ è modulare. Poichè ovviamente un sottogruppo X di un gruppo G è contenuto nel centro di G se e soltanto se il sottogruppo $\langle g, X\rangle$ è abeliano per ogni $g \in G$, la nozione di sottogruppo modularmente immerso, che è stata introdotta da P.G. Kontorovic e B.I. Plotkin [**68**] nel 1954, è una naturale traduzione reticolare della centralità di un sottogruppo. Pertanto il prossimo risultato consente una lettura reticolare del teorema di Schur.

TEOREMA 2.36. (M. De Falco, F. de Giovanni e C. Musella [**24**]) *Sia G un gruppo contenente un sottogruppo modularmente immerso di indice finito. Allora esiste un sottogruppo normale finito N di G tale che il reticolo $\mathfrak{L}(G/N)$ sia modulare.*

Si segnala infine che anche i BFC-gruppi sono stati oggetto di ricerche da un punto di vista reticolare; in particolare M. De Falco e C. Musella [**31**] hanno studiato i gruppi primari in cui ogni sottogruppo ciclico è quasinormale in un sottogruppo di indice finito e limitato e quelli in cui ogni sottogruppo ciclico ha indice finito e limitato in un sottogruppo quasinormale.