CAPITOLO 3

Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni

Nel caso di una sola variabile ($n = 1$, $N = 1$) si può risolvere un problema di minimo tramite l'equazione differenziale (2.23), mentre nel caso di più variabili ($n \geq 2$, $N = 1$) la soluzione esplicita della corrispondente equazione (2.23) è molto più difficile da determinare, e anzi tale soluzione si può trovare solo in casi estremamente rari.

Da qui l'idea di Riemann di rovesciare il punto di vista e di dimostrare l'esistenza di una soluzione di (2.23) minimizzando il corrispondente funzionale (0.1).
Volendo risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, Riemann dice:

"L'insieme delle funzioni u forma un dominio connesso che contiene la sua frontiera [...]. Per ogni funzione u (l'integrale di Dirichlet) $D[u]$ prende un valore finito che varia in maniera continua con u. Di conseguenza, per una funzione u l'integrale $D[u]$ prende il suo valore minimo."
Questa funzione che minimizza $D[u]$ sarà la soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$.

La versione di Riemann del Principio di Dirichlet può essere così formulata:

Esiste un'unica funzione che minimizza l'integrale di Dirichlet $D[u] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$, *tra tutte le funzioni di classe* $C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *che assumono assegnato valore* φ *continuo sulla frontiera* $\partial\Omega$*; inoltre, tale funzione è armonica in* Ω.

Ma tale Principio necessitava di una legittimazione: infatti questa versione del Principio di Dirichlet fu criticata in quanto, pur essendo l'integrale di Dirichlet inferiormente limitato sulle funzioni ammissibili, non ne consegue

che l'estremo inferiore sia *assunto* nella classe delle fuzioni ammissibili.
Un primo esempio di integrale unidimensionale del tipo (0.1) per il quale non esiste alcuna funzione minimizzante fu dato da Weierstrass nel 1869; un altro esempio di valori continui assegnati sulla circonferenza unitaria tali che $D[v] = +\infty$ per ogni v ammissibile avente quei valori sulla frontiera, fu dato da Hadamard.

Prima obiezione (generale) al Principio di Dirichlet.
Il problema proposto consiste nel cercare il minimo del funzionale

$$\mathcal{F}[v] := \int_{-1}^{1} x^2 \left|v'(x)\right|^2 \, dx$$

nella classe delle funzioni $v \in C^1([-1,1])$ che soddisfano le condizioni agli estremi $v(-1) = -1$ e $v(1) = 1$.
Osserviamo che su ognuna di queste funzioni ammissibili v si ha $\mathcal{F}[v] > 0$, in quanto, in caso contrario, si avrebbe $v'(x) = 0$ in $[-1,1]$ e, di conseguenza, v sarebbe costante in $[-1,1]$, in contrasto con le condizioni agli estremi. Dunque, se esistesse una soluzione v_0 del problema, si avrebbe $\mathcal{F}[v_0] > 0$. Ma, se consideriamo le funzioni ammissibili

$$v_h(x) = \frac{\arctan(hx)}{\arctan(h)}, \quad h \in \mathbb{N},$$

per le quali

$$\mathcal{F}[v_h] = \int_{-1}^{1} x^2 \left|v_h'(x)\right|^2 \, dx = \frac{1}{h \arctan^2(h)} \left(\arctan(h) - \frac{h}{1+h^2} \right)$$

si ottiene $\mathcal{F}[v_h] \to 0$. Ne segue che per h sufficientemente grande vale la disuguaglianza $\mathcal{F}[v_h] < \mathcal{F}[v_0]$, e ciò contraddice il fatto che v_0 è minimo per $\mathcal{F}$.

Seconda obiezione (specifica) al Principio di Dirichlet.
E' noto che ogni funzione armonica nel cerchio unitario è data in coordinate polari (r, ϑ) dalla serie convergente $(r < 1)$

$$v(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu} \left(a_\nu \cos(\nu\vartheta) + b_\nu \sin(\nu\vartheta)\right) \qquad (a_\nu, b_\nu \text{ costanti}),$$

e che l'integrale di Dirichlet è

$$D[v] = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right).$$

L'obiezione specifica di Hadamard consiste nel fatto che:
esistono funzioni continue $\varphi(\vartheta)$ per le quali la serie $\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right)$ diverge, anche se è noto che il relativo problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace è risolubile (cfr. teorema 1.7.14) per ogni dato continuo assegnato

sulla circonferenza unitaria.
Ad esempio, se consideriamo la funzione continua di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (definita dallo sviluppo di Fourier totalmente convergente)

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2},$$

allora la funzione di r e ϑ

$$v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu^4} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2} \quad \text{(serie uniformemente convergente)}$$

è armonica regolare sul cerchio unitario e ha traccia $\varphi(\vartheta)$ sulla circonferenza unitaria.
Tuttavia $D[v] = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu^4 \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2$ diverge[1], essendo, in questo caso, $b_\nu \equiv 0$ e

$$a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu^4 \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu^4 \end{cases}.$$

Osservazione 3.0.7. La soluzione del Principio di Dirichlet non può essere quindi determinata per tutti i dati φ continui sulla frontiera. Per una corretta formulazione del Principio di Dirichlet assumeremo che esista almeno una funzione ammissibile che abbia integrale di Dirichlet finito (questo potendosi interpretare come una richiesta di "energia finita").

Nascono così i *metodi diretti* nel Calcolo delle Variazioni, consistenti nel *dimostrare l'esistenza del minimo del funzionale* (0.1) *senza passare attraverso la sua equazione di Eulero, ma deducendola direttamente dalle proprietà del funzionale* (0.1).

---

[1]Altro esempio: sia $\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\sin(\mu! \vartheta)}{\mu^2}$; risulta $v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu!} \frac{\sin(\mu! \vartheta)}{\mu^2}$ e

$$D[v] = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu! \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu! \frac{1}{\mu^4} = +\infty,$$

essendo, in questo caso, $a_\nu \equiv 0$ e

$$b_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu! \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu! \end{cases}.$$

Evidentemente, problemi di esistenza per equazioni differenziali possono altresì essere affrontati con metodi variazionali, qualora l'equazione in questione coincide con l'equazione di Eulero di un dato funzionale; in quest'ordine di idee, un problema è quello di determinare appunto il funzionale.

Nella seconda metà dell'Ottocento si tenta di rendere rigoroso il ragionamento di Riemann (Principio di Dirichlet) con C. Arzelà (1897) [**3**] prima, successivamente con D. Hilbert (1900) [**42**] [**43**], J. Hadamard(1906) [**39**] e H. Lebesgue (1907) [**49**]; una ricerca questa che avrà successo solo attorno al 1940.

Ai primi del Novecento anche Leonida Tonelli studia problemi di questo tipo. Egli riesce a dimostrare che la semicontinuità inferiore è una condizione sufficiente per l'esistenza del minimo del funzionale (0.1) nel caso unidimensionale, ma non riesce in generale a 'estendere' questi risultati al caso $n \geq 2$.
La principale difficoltà proveniva essenzialmente dalla mancanza di opportuni spazi funzionali in cui ambientare i problemi di minimo, difficoltà che era ancora più forte nel caso di integrali in due o più dimensioni.

3.1. Teorema di Weierstrass-Fréchet.

Prima di passare ad esporre alcuni risultati di Tonelli, diamo un teorema che è una generalizzazione di quello classico di Weierstrass e su cui si basa il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni.

Teorema 3.1.1 (Weierstrass-Fréchet).
Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ un funzionale. Supponiamo che

(i) *$\mathcal{G}$ sia limitato inferiormente;*
(ii) *$\mathcal{G}$ sia seq. s.c.i. (cioè, per ogni successione $\{u_h\}$ convergente a u in X risulta $\mathcal{G}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h]$);*
(iii) *X sia sequenzialmente compatto (cioè da ogni successione $\{u_h\} \subset X$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in X).*

Allora $\exists \min_{u\in X} \mathcal{G}[u]$.

Dim. Per (i) possiamo considerare una successione $\{u_h\}$ minimizzante, ossia tale che:
$$\{u_h\} \subset X \quad \text{e} \quad \lim_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h] = \inf_{u\in X} \mathcal{G}[u].$$

Per (iii) esiste un'estratta $\{u_{h_j}\}$ convergente in X ad un elemento u_0. Per (ii) abbiamo

$$\mathcal{G}[u_0] \leq \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{G}[u_{h_j}] = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{G}[u_h] = \inf_{u\in X} \mathcal{G}[u].$$

Ne segue la tesi. □

Generalmente X non è dotato a priori di una topologia. Pertanto il problema di minimo $\min_{u\in X} \mathcal{G}[u]$ può essere visto come il problema di introdurre una topologia su X per cui X è sequenzialmente compatto e $\mathcal{G}$ è seq. s.c.i..
Osserviamo, però, che per garantire che $\mathcal{G}$ sia seq. s.c.i. occorre in generale una topologia "ricca", mentre per la sequenziale compattezza di X occorre che la topologia non sia troppo "ricca".
La scelta della topologia deve essere tale da soddisfare questi due requisiti contrastanti.
Sarà allora opportuno avere dei risultati di semicontinuità inferiore nella topologia più debole possibile.
In linea di principio, tuttavia, la bontà della scelta della topologia su X può essere valutata solo a posteriori.

3.2. Semicontinuità inferiore e teorema di esistenza per problemi variazionali unidimensionali ($n = 1$): risultati di Tonelli.

TEOREMA 3.2.1 (SEMICONTINUITÀ INFERIORE, TONELLI).
Sia $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto limitato e sia $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni

(i) *$F(x,u,p)$ e $F_p(x,u,p)$ sono continue in (x,u,p);*
(ii) *$F(x,u,p) \geq 0$ per ogni (x,u,p);*
(iii) *$p \mapsto F(x,u,p)$ è convessa per ogni (x,u).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_I F(x,u(x),u'(x))\,dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}(I)$ per ogni $m \geq 1$, cioè: se $\{u_h\}$ converge debolmente in $W^{1,m}(I)$ a u, allora

$$\mathcal{F}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h]. \tag{3.35}$$

DIM. Osserviamo innanzitutto che per l'ipotesi (ii) il funzionale integrale $\mathcal{F}$ è ben definito (con il possibile valore $+\infty$) per ogni $u \in W^{1,m}(I)$, $m \geq 1$ (cfr. lemma 4.1.2). Osserviamo inoltre che è sufficiente considerare il caso

$m = 1$, poiché, se $m > 1$ e $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(I)$, allora $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(I)$. Sia allora $\{u_h\}$ una successione convergente debolmente a u in $W^{1,1}(I)$ (quindi anche limitata in $W^{1,1}(I)$). Per il corollario 1.3.20 al teorema di Rellich-Kondrachov possiamo assumere, a meno di successioni estratte, che $u_h \to u$ in $L^1(I)$ e anche $u_h \to u$ q.o. in I. Supponiamo che $\mathcal{F}[u] < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset I$ tale che $|I \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε e, per il teorema di Lusin 1.1.15, u e u' sono continue in K_ε; [2] per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue per funzioni sommabili:

$$\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx \geq \int_I F(x,u,u')\,dx + O(\varepsilon)$$

(se $\mathcal{F}[u] = +\infty$, possiamo assumere che $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx > \frac{1}{\varepsilon}$).
Poiché per l'ipotesi (iii) F è convessa in p, abbiamo (cfr. osservazione 1.5.3)

$$\begin{aligned}
\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u_h')\,dx \;\; &\geq \;\; \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u')\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_p(x,u_h,u')\,(u_h'-u')\,dx \\
&= \;\; \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u')\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_p(x,u,u')}_{\text{limitata}}\,\underbrace{(u_h'-u')}_{\to 0}\,dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{[F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')]}_{\to 0}\,\underbrace{(u_h'-u')}_{\text{equilimtata}}\,dx.
\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro per $h \to +\infty$ tende a $\displaystyle\int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx$ in virtù della continuità di F e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε. Dall'ipotesi (i), poiché u e u' sono continue su K_ε, risulta che $F_p(x,u,u')$ è limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_p(x,u,u')\,(u_h'-u')\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché $\{u_h' - u'\}$ è equilimitata in norma $L^1(I)$ (in quanto $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(I)$ e quindi anche in $W^{1,1}(K_\varepsilon)$) e $F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$ abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} [F_p(x,u_h,u') - F_p(x,u,u')]\,(u_h'-u')\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,u_h')\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,u')\,dx \geq \int_I F(x,u,u')\,dx + O(\varepsilon).$$

---

[2] Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Severini-Egorov $u_h \rightrightarrows u$ in E_ε compatto con $|I \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$. Possiamo assumere $E_\varepsilon \subset E_{\varepsilon'}$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Per il teorema di Lusin u e u' sono continue in L_ε compatto con $|I \setminus L_\varepsilon| < \varepsilon$. Allora basterà prendere $K_\varepsilon := E_\varepsilon \cap L_\varepsilon$.

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e tenendo presente l'ipotesi (ii) segue la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE 3.2.2. L'ipotesi (i) del teorema 3.2.1 può essere indebolita richiedendo che

(i') $F(x, u, p)$ sia una funzione di Carathéodory, cioè F misurabile in x per ogni (u, p), F continua in (u, p) per q.o. x (De Giorgi 1968 [**23**])),

o anche, più in generale, che

(i") $F(x, u, p)$ sia misurabile in x per ogni (u, p), e F sia s.c.i. in (u, p) per q.o. x (Ioffe 1977 [**45**]).

Ulteriori generalizzazioni che indeboliscono l'ipotesi di semicontinuità inferiore rispetto ad u sono dovute a De Giorgi-Buttazzo-Dal Maso (1983) (per funzionali autonomi) e Ambrosio (1987) (per funzionali non autonomi).

Conseguenza immediata del teorema 3.2.1 e della compattezza debole in spazi riflessivi è il seguente risultato

TEOREMA 3.2.3 (ESISTENZA PER IL PROBLEMA AI LIMITI, TONELLI). *Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto limitato e sia $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una Lagrangiana soddisfacente le seguenti condizioni*

(i) *$F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ sono continue in (x, u, p);*
(ii) *$F(x, u, p) \geq c\,|p|^m \quad (c > 0,\ m > 1)$ per ogni (x, u, p) (cioè $F(x, u, p)$ ha crescita superlineare);*
(iii) *$p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa per ogni (x, u).*

Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}\,[u] = \int_I F(x, u(x), u'(x))\,dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)} = \left\{u \in W^{1,m}(I),\ \ u(a) = \alpha,\ \ u(b) = \beta\right\}$$

dove α e β sono numeri reali assegnati.

DIM. Per l'potesi (ii) il funzionale $\mathcal{F}$ è limitato inferiormente. Sia $\{u_h\}$ una successione minimizzante per $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$, cioè

$$\lim_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u] < +\infty.$$

Allora per l'ipotesi (ii)

$$c\int_I |u_h'(x)|^m\,dx \le \mathcal{F}[u_h] \le \qquad \text{costante (indipendente da } h)$$

$$(\mathcal{F}\,[u_h] \le \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}\,[u] + \frac{1}{h}).$$

Quindi la successione $\{u_h'\}$ è equilimitata in $L^m(I)$. D'altra parte, essendo le u_h assolutamente continue, vale (cfr. teorema 1.4.2)

$$u_h(x) = u_h(a) + \int_a^x u_h'(t)\,dt = u_h(b) - \int_x^b u_h'(t)\,dt$$

da cui

$$u_h(x) = \frac{1}{2}\,[u_h(a) + u_h(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b u_h'(t)\,segno(x-t)\,dt$$

e quindi

$$|u_h(x)| \le \frac{1}{2}|\alpha+\beta| + \frac{1}{2}\int_a^b |u_h'(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |u_h'(t)|^m\ dt\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (b-a)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Pertanto la successione $\{u_h\}$ è equilimitata in $C^0(I)$. La successione $\{u_h\}$ è anche equicontinua, anzi equihölderiana con esponente $1-\dfrac{1}{m}$, come risulta da

$$|u_h(x) - u_h(y)| \le \left|\int_y^x |u_h'(t)|\,dt\right| \le ||u_h'||_{L^m(I)}|x-y|^{1-\frac{1}{m}}\ \forall x,y\in I.$$

Per il teorema di Ascoli-Arzelà 1.3.13 esiste un'estratta $\left\{u_{h_j}\right\}$ tale che $u_{h_j} \rightrightarrows u_0$. In conclusione

$$\left\|u_{h_j}\right\|_{W^{1,m}(I)} \le \text{costante indipendente da } j.$$

Poiché per $m>1$ $W^{1,m}(I)$ è riflessivo, esiste un'estratta (che indichiamo ancora con $\left\{u_{h_j}\right\}$) convergente debolmente a u_0 in $W^{1,m}(I)$. Inoltre $u_0 \in \mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$ (perché la successione $\left\{u_{h_j}\right\}$ converge uniformemente a u_0). Per il teorema 3.2.1 di semicontinuità di Tonelli abbiamo

$$\mathcal{F}[u_0] \le \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}] = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u],$$

per cui

$$\mathcal{F}[u_0] = \min_{u\in\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}} \mathcal{F}[u].$$

□

Osservazione 3.2.4. I teoremi 3.2.1 e 3.2.3 si estendono senza difficoltà al caso di Lagrangiane $F : I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N\ge 1)$.

Osservazione 3.2.5. Illustriamo con alcuni esempi il fatto che le condizioni di coercività (ii), di riflessività $(m>1)$ e di convessità (iii) nel teorema 3.2.3 sono ottimali.

Esempio 3.2.6 (Weierstrass, $I = (0,1)$ (cfr. anche obiezione al Principio di Dirichlet all'inizio di questo capitolo)).
Sia $F(x,p) = xp^2$. Indichiamo con

$$0 \leq \mu := \inf \left\{ \mathcal{F}[u] := \int_0^1 x \left[u'(x)\right]^2 \, dx; \; u \in W^{1,2}((0,1)), \, u(0) = 1, \, u(1) = 0 \right\}.$$

Il problema

$$\min_{u \in \mathcal{A}_{(1,0)}} \int_0^1 x \left(u'(x)\right)^2 \, dx$$

con

$$\mathcal{A}_{(1,0)} = \left\{ u \in W^{1,2}((0,1)); \quad u(0) = 1, \; u(1) = 0 \right\}$$

non ha soluzione.

Dim. Proviamo che $\mu = 0$. Consideriamo, per ogni $h \in \mathbb{N}$ $h \geq 2$ la successione

$$u_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \dfrac{1}{h}\right) \\ -\dfrac{\log x}{\log h} & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{h}, 1\right] \end{cases}$$

Risulta $u_h \in W^{1,\infty}((0,1))$, $u_h(0) = 1$, $u_h(1) = 0$ e

$$\mathcal{F}[u_h] = \int_{\frac{1}{h}}^1 x \left[u_h'(x)\right]^2 \, dx = \frac{1}{\log h} \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty,$$

sicché $\mu = 0$. Se esistesse un minimo $\overline{u} \in \mathcal{A}_{(1,0)}$, allora dovrebbe risultare $\mathcal{F}(\overline{u}) = 0$, cioè $\overline{u}' = 0$ q.o. in $(0,1)$, e, poiché gli elementi di $\mathcal{A}_{(1,0)}$ sono continui, avremmo $\overline{u} =$ cost in $[0,1]$, incompatibile con le condizioni ai limiti. $\square$

Osserviamo che le ipotesi (i) e (iii) del teorema di esistenza 3.2.3 sono verificate, mentre non è verificata la (ii), perché la Lagrangiana $F(x,p) = xp^2$ si annulla per $x = 0$.
L'esempio che segue mostra l'importanza della riflessività dello spazio.

Esempio 3.2.7 (curve minimali, $m = 1$).
Dal punto di vista geometrico, il problema che presentiamo consiste nel cercare la curva di lunghezza minima tra quelle che congiungono il centro di una circonferenza unitaria con un punto della circonferenza stessa. Le soluzioni sono ovviamente i raggi, ma questi non rientrano nella classe delle funzioni ammissibili che è ristretta alle curve esprimibili (in coordinate polari) nella forma $\rho = u(\theta)$. La lunghezza di una curva siffatta è espressa dall'integrale

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left[u(\theta)\right]^2 + \left[u'(\theta)\right]^2} \, d\theta.$$

Nell'esempio conserviamo la notazione $\mathcal{F}[u] := \displaystyle\int_0^1 F(x, u(x), u'(x)) \, dx.$

Sia $F(x,u,p) := \sqrt{u^2+p^2}$. *Allora il funzionale associato*

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^1 \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2}\, dx$$

è convesso e coercivo ($\mathcal{F}[u] \geq \int_0^1 |u'|\, dx$ *e* $\mathcal{F}[u] \geq \int_0^1 |u|\, dx$ *quindi* $\mathcal{F}[u] \geq \frac{1}{2}\|u\|_{W^{1,1}((0,1))}$*) sullo spazio di Banach non riflessivo* $W^{1,1}((0,1))$.
Il problema di minimo

$$\min_{u\in\mathcal{A}_{(0,1)}} \mathcal{F}[u]$$

dove

$$\mathcal{A}_{(0,1)} = \left\{u \in W^{1,1}\left((0,1)\right);\ \ u(0)=0,\ \ u(1)=1\right\}$$

non ha soluzione.

Dim. Indicato con

$$\mu := \inf_{u\in\mathcal{A}_{(0,1)}} \mathcal{F}[u],$$

proviamo che $\mu = 1$.
Osserviamo dapprima che $\mu \geq 1$, infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u] = \int_0^1 \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2}\, dx \quad &\geq \quad \int_0^1 |u'(x)|\, dx \\ &\geq \quad \int_0^1 u'(x)\, dx = u(1) - u(0) = 1.\end{aligned}$$

Se consideriamo la successione ($h \in \mathbb{N}$)

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, 1-\frac{1}{h}\right] \\ 1 + h(x-1) & \text{se } x \in \left(1-\frac{1}{h}, 1\right] \end{cases}$$

abbiamo $u_h \in W^{1,1}((0,1))$, $u_h(0)=0$, $u_h(1)=1$ e

$$1 \leq \mathcal{F}[u_h] = \int_{1-\frac{1}{h}}^1 \sqrt{[1+h(x-1)]^2 + h^2}\, dx \leq \frac{1}{h}\sqrt{1+h^2} \to 1.$$

per $h \to +\infty$, sicché $\mu = 1$.

Se esistesse una soluzione $\overline{u}$ del problema di minimo dovrebbe aversi

$$1 = \mathcal{F}[\overline{u}] = \int_0^1 \sqrt{[\overline{u}(x)]^2 + [\overline{u}'(x)]^2}\, dx > \int_0^1 |\overline{u}'(x)|\, dx \geq \int_0^1 \overline{u}'(x)\, dx = 1.$$

quindi $\overline{u} = 0$ q.o. in $(0,1)$. Poiché gli elementi di $\mathcal{A}_{(0,1)}$ sono continui si ha $\overline{u} \equiv 0$ in $[0,1]$ e ciò è incompatibile con le condizioni ai limiti. □

L'ipotesi (iii) del teorema 3.2.3 non può essere eliminata.

Esempio 3.2.8 (Bolza).
Sia $F(x,u,p) := (1-p^2)^2 + u^2$. *Indichiamo con*

$$0 \le \mu := \inf \left\{ \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx;\ u \in W^{1,4}((0,1)),\ u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

La Lagrangiana F *è chiaramente* <u>*non convessa*</u> *rispetto a* p. *Il problema*

$$\min_{u \in \mathcal{A}_{(0,0)}} \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx$$

con

$$\mathcal{A}_{(0,0)} = \left\{u \in W^{1,4}((0,1));\ u(0) = u(1) = 0\right\} = W_0^{1,4}((0,1))$$

non ha soluzione.

Dim. Proviamo innanzitutto che $\mu = 0$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $0 \le k \le h-1$, definiamo

$$u_h(x) = \begin{cases} x - \dfrac{k}{h} & \text{se } x \in \left[\dfrac{2k}{2h}, \dfrac{2k+1}{2h}\right] \\[2ex] -x + \dfrac{k+1}{h} & \text{se } x \in \left(\dfrac{2k+1}{2h}, \dfrac{2k+2}{2h}\right]. \end{cases}$$

Risulta $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$ e

$$\begin{aligned} &0 \le u_h(x) \le \frac{1}{2h} \quad \text{per ogni } x \in (0,1), \\ &|u_h'(x)| = 1 \quad \text{q.o. in } (0,1), \\ &u_h(0) = u_h(1) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$0 \le \mu \le \int_0^1 \left\{ \left[1 - [u_h'(x)]^2\right]^2 + [u_h(x)]^2 \right\} dx \le \frac{1}{4h^2}$$

e quindi, per $h \to +\infty$, risulta $\mu = 0$.

Tuttavia, non esiste alcuna funzione $\overline{u} \in W^{1,4}((0,1))$ per cui $\overline{u}(0) = \overline{u}(1) = 0$ e tale che

$$\int_0^1 \left\{ \left[1 - [u'(x)]^2\right]^2 + [u(x)]^2 \right\} dx = 0.$$

Se una tale $\overline{u}$ esistesse, avremmo $\overline{u}'(x) = \pm 1$ e $\overline{u} = 0$ per q.o. $x \in (0,1)$; poiché gli elementi di $W_0^{1,4}((0,1))$ sono continui avremmo $\overline{u} = 0$ e quindi $\overline{u}' = 0$ in $[0,1]$,che è incompatibile con $\overline{u}'(x) = \pm 1$.
Pertanto il problema di Bolza non ha soluzione in $W_0^{1,4}((0,1))$. $\square$

3.3. Estensione dei teoremi di Tonelli a integrali multipli ($n \geq 2$) del Calcolo delle Variazioni in spazi di Sobolev.

La ragione profonda per la limitazione del metodo di Tonelli fu evidenziata nel 1938, con i lavori di Sobolev e Morrey, lavori relativi agli spazi di Sobolev e alle loro proprietà di immersione. In alcuni casi, e.g. quelli in cui il metodo di Tonelli funziona, la regolarità delle soluzioni deboli è automatica (cfr. teorema 1.3.5(iii)); in generale rimane però il difficile problema della *regolarizzazione* (cfr. cap. 7).

Passiamo ora a trattare il caso multidimensionale.

Teorema 3.3.1 (semicontinuità inferiore, Morrey [**58**]).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) aperto limitato e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ ($N \geq 1$) una Lagrangiana tale che

(i) *$F(x, u, p)$ e $F_p(x, u, p)$ sono continue in (x, u, p);*
(ii) *$F(x, u, p) \geq 0$ per ogni (x, u, p);*
(iii) *$p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa per ogni (x, u).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ per ogni $m \geq 1$ (cioè, se $\{u_h\}$ converge debolmente in $W^{1,m}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a u, allora

$$\mathcal{F}[u] \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}[u_h]).$$

Dim. E' sufficiente considerare il caso $m = 1$.
Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana.
Sia $\{u_h\}$ una successione convergente debolmente in $W^{1,1}(\Omega', \mathbb{R}^N)$ e quindi anche limitata in $W^{1,1}(\Omega', \mathbb{R}^N)$. Per il corollario 1.3.20 al teorema di Rellich-Kondrachov, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', \mathbb{R}^N)$ e, per il teorema 1.2.7(v), a meno di estratte, $u_h \to u$ q.o. in Ω'.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ tale che $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε (per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14); u e ∇u sono continue in K_ε (per il teorema di Lusin 1.1.15) (cfr. nota 2 in 3.2); inoltre, per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue (supposto $\int_{\Omega'} F(x, u, \nabla u)\, dx < \infty$), abbiamo

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, \nabla u)\, dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, \nabla u)\, dx + O(\varepsilon).$$

Per l'ipotesi (iii) di convessità di F in p, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \\
&\quad\geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u)\,dx + \int_{K_\varepsilon} F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u)\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \\
&\quad= \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u)\,dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)}_{\text{limitata}}\,\underbrace{(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)}_{\to 0}\,dx \\
&\quad+ \int_{K_\varepsilon} \underbrace{\left[F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\right]}_{\to 0}\,\underbrace{(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)}_{\text{equilimitata}}\,dx.
\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro per $h \to +\infty$ tende a $\int_{K_\varepsilon} F(x,u,\nabla u)\,dx$ in virtù della continuità di F e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε.
Dall'ipotesi (i), poiché u e ∇u sono continue su K_ε, risulta $F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)$ limitata su K_ε, pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

Poiché $\left\{D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i\right\}$ è equilimitata in norma $L^1(\Omega')$ e, per la continuità di F_p,
$F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \to +\infty$, abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} \left[F_{p^i_\alpha}(x,u_h,\nabla u) - F_{p^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\right]\,(D_\alpha u^i_h - D_\alpha u^i)\,dx \to 0 \qquad \text{per } h \to +\infty.$$

In definitiva:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x,u,\nabla u)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)\,dx + O(\varepsilon).$$

Poiché $F \geq 0$, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, risulta:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega} F(x,u_h,\nabla u_h)\,dx \geq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)\,dx.$$

Passando all'estremo superiore al variare di $\Omega' \subset\subset \Omega$ segue la tesi. $\square$

Teorema 3.3.2 (esistenza per il problema di Dirichlet, Morrey).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ aperto limitato e sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 1)$ una Lagrangiana tale che

(i) *$F(x,u,p)$ e $F_p(x,u,p)$ (cioè $F_{p^i_\alpha}(x,u,p)$, $i = 1,\dots,N$, $\alpha = 1,\dots,n$) sono continue in (x,u,p);*
(ii) *$F(x,u,p) \geq c|p|^m$ $(c > 0,\ m > 1)$ per ogni (x,u,p) (cioè, $F(x,u,p)$ ha crescita in p superlineare) ;*
(iii) *$p \mapsto F(x,u,p)$ è convessa per ogni (x,u).*

Sia $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *con* $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$*. Allora esiste il minimo di*

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_\varphi = \Big\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \ u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N) \Big\}.$$

Osservazione 3.3.3. Osserviamo che, per quanto riguarda il teorema 3.3.2 di esistenza nel caso di integrali multipli ($n > 1$), vi sono alcune precisazioni da fare riguardo la topologia in $W^{1,m}(\Omega)$ rispetto alla quale si studia la sequenziale compattezza della successione minimizzante.
Nel caso $m > n$ si può dimostrare l'esistenza del minimo del funzionale $\mathcal{F}$ come nel caso della dimensione $n = 1$, in virtù dell'immersione di Morrey (teorema 1.3.5(iii)) e utilizzando quindi il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà.
Nel caso $1 < m \leq n$ il teorema di Ascoli-Arzelà non è più sufficiente; il teorema basilare in questo ambito è il teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov 1.3.16.

Dim. [teorema 3.3.2]
Per l'ipotesi (ii) il funzionale $\mathcal{F}$ è limitato inferiormente. Sia $\{u_h\}$ una successione di $\mathcal{A}_\varphi$ minimizzante, cioè

$$\lim_{h \to +\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[u] < +\infty.$$

Allora, per l'ipotesi (ii):

$$c\, \|\nabla u_h\|^m_{L^m(\Omega, \mathbb{R}^{n\times N})} \leq \mathcal{F}[u_h] \leq \text{costante (indipendente da } h).$$

D'altra parte, poiché $u_h - \varphi \in W_0^{1,m}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$, per la disuguaglianza di Poincaré 1.3.7, abbiamo

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} &\leq \|u_h - \varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} \\ &\leq c\Big(\|\nabla(u_h - \varphi)\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^{n\times N})} + \|\varphi\|_{L^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} \Big) \\ &\leq \text{costante indipendente da } h. \end{aligned}$$

In conclusione

$$||u_h||_{W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq \text{costante indipendente da } h.$$

Poiché per $m > 1$ $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è riflessivo, esiste una successione estratta $\{u_{h_j}\}$ convergente debolmente a u_0 in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Inoltre, poiché $\mathcal{A}_\varphi$ è convesso e $W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, per il teorema di Mazur 1.6.6 $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$. Per il teorema 3.3.1 di semicontinuità inferiore abbiamo

$$\mathcal{F}[u_0] \leq \liminf_{j \to +\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}] = \lim_{h \to +\infty} \mathcal{F}[u_h] = \inf_{u \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[u],$$

sicché u_0 è minimo per $\mathcal{F}$. □

Osservazione 3.3.4. Caso modello: Come immediata applicazione del teorema precedente abbiamo la dimostrazione del **Principio di Dirichlet** $(N = 1)$ **in $\boldsymbol{W^{1,2}(\Omega)}$**: *il problema*

$$\min_{u \in \mathcal{A}_\varphi} D[u] \left(= \min_{u \in \mathcal{A}_\varphi} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *è aperto limitato,* $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ *è una funzione assegnata (evidentemente* $D[\varphi] < +\infty$*), ha un'unica (teorema 4.5.4 successivo) soluzione di classe* $W^{1,2}(\Omega)$ *in* $\mathcal{A}_\varphi$.

Proveremo la regolarità interna della soluzione (debole) del Principio di Dirichlet in 7.4 (teoremi 7.4.1 e 7.4.5).