

PREMESSA. - Burzio M. e Demaria D.C. provano in [3] che l'insieme delle classi di o-omotopia di funzioni o-regolari da uno spazio topologico normale e numerabilmente paracompatto S in un grafo orientato finito G , $Q(S,G)$, è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi di o-omotopia di funzioni o-regolari da S nel grafo G^* duale di G , $Q(S,G^*)$. Con le stesse ipotesi su S e con S' sottospazio chiuso di S e G' sottografo di G si prova inoltre che $Q(S,S';G,G')$ è bigettivo a $Q(S,S';G^*,G'^*)$.

Non sappiamo fino a che punto le ipotesi fatte su S siano necessarie, però in questa nota proviamo con alcuni esempi che i teoremi su enunciati non sono validi nel caso che lo spazio S sia quasi-compatto e T_0 ma non T_1 oppure quasi-compatto e T_1 ma non T_2 .

Per le definizioni cui facciamo riferimento si vedano i lavori citati in bibliografia. Usiamo il simbolo $v \rightarrow w$ sia nel caso che (v,w) sia un lato del grafo G sia nel caso $v = w$. Se $f : S \rightarrow G$ è una funzione indichiamo con V (o con V^f se è più opportuno) l'insieme $f^{-1}(\{v\})$. Consideriamo sempre funzioni e omotopie o-regolari, cioè tali che $V \cap \bar{W} \neq \emptyset \implies v \rightarrow w$, anche quando non lo precisiamo esplicitamente. Scriveremo $f \sim g$ se due funzioni f e g sono regolarmente omotope, $f \not\sim g$ se non lo sono. Indichiamo con $o(v)$ o semplicemente con o la funzione costante dello spazio S su un vertice v del grafo G .

1. Consideriamo lo spazio $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ con la topologia che ha come aperti fondamentali $\{x_1\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2, x_5\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_1, x_4, x_5\}$.

Si verifica facilmente che tale spazio è T_0 ma non T_1 e che $\overline{\{x_1\}} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\overline{\{x_5\}} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ mentre $\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}$ sono chiusi.

PROPOSIZIONE 1.7. - Se $g : S \rightarrow G^*$ è regolare e se $g(x_1) = g(x_5)$ oppure
 $g(x_2) = g(x_3) = g(x_4)$ si ha $g \sim 0$.

Dimostrazione. - Esaminiamo i casi che non rientrano nella proposizione 1.6.

Se $g(x_1) = g(x_5) = v_i \in \{v_2, v_3, v_4\}$ e $g(\{x_2, x_3, x_4\}) \subseteq \{v_1, v_5\}$ si ha
 $g(x_k) \rightarrow v_i$ per $k = 2, 3, 4$ e quindi la funzione $H : S \times I \rightarrow G^*$ definita da
 $H(x_r, 0) = g(x_r)$ ed $H(x_r, t) = v_i$ per $t \neq 0$ è un'omotopia tra g ed $o(v_i)$.

Se $g(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = v_j \in \{v_1, v_5\}$ e se $g(\{x_1, x_5\}) \subseteq \{v_2, v_3, v_4\}$ si
ha $v_j \rightarrow g(x_1)$ e $v_j \rightarrow g(x_5)$; quindi si può definire un'omotopia tra g ed
 $o(v_j)$ ponendo $H(x_r, t) = g(x_r)$ per $t \neq 1$ ed $H(x_r, 1) = v_j$.

Dalle proposizioni 1.6 e 1.7 si ricava facilmente che le funzioni regolari
di S in G^* non omotope a costante sono al più 36, quindi $Q(S, G^*)$ non è
in corrispondenza biunivoca con $Q(S, G)$. Peraltro si prova con procedimenti ana-
loghi che due qualunque funzioni distinte non omotope a zero sono non omotope tra
loro, per cui $Q(S, G^*)$ ha esattamente 37 elementi.

2. Fissato nel piano un riferimento cartesiano sia S l'unione dei segmenti
congiungenti $x_1(0,1)$ e $x_5(0,-1)$ con ciascuno dei punti $x_2(-1,0)$, $x_3(0,0)$ ed
 $x_4(1,0)$. Indichiamo con A l'insieme dei punti diversi da x_2, x_3, x_4 apparte-
nenti ai segmenti di estremi x_1 ed x_i , $i = 2, 3, 4$; con B indichiamo l'insie-
me $S - (A \cup \{x_2, x_3, x_4\})$. Consideriamo poi su S la topologia che ha come aperti
non vuoti tutte le parti a complementare finito (o vuoto) in S e tutti i sot-
toinsiemi di A o di B a complementare finito (o vuoto) rispettivamente in
 A o in B .

Chiaramente S è uno spazio T_1 (ma non T_2) e quasi compatto. Si ha inoltre
che le chiusure di A e B sono rispettivamente $\bar{A} = S - B$ e $\bar{B} = S - A$; la

chiusura di ogni parte non finita di A (di B) è \bar{A} (\bar{B}).

Consideriamo inoltre il grafo orientato G dell'esempio precedente, di vertici v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e di lati (v_i, v_j) $i = 2, 3, 4$ e $j = 1, 5$.

Premesso che ovviamente si ha $o(v_i) \sim o(v_j)$ per ogni i e j , si provano i seguenti risultati.

PROPOSIZIONE 2.1. - Se $f : S \rightarrow G$ è regolare e non omotopa a costante si ha

- i) V_1 e V_5 sono non finiti mentre V_2, V_3 e V_4 sono finiti (o vuoti).
- ii) $f(\{x_2, x_3, x_4\}) \cap \{v_1, v_5\} = \emptyset$.
- iii) $A \cap V_i \neq \emptyset \Rightarrow A \cap V_j = \emptyset$ per $i, j \in \{1, 5\}$, $i \neq j$.
- iv) $A \cap V_i \neq \emptyset \Rightarrow B \cap V_i = \emptyset$ per $i \in \{1, 5\}$.

Dimostrazione. - i) Se V_1 è finito e $V_i \cap A$ è non finito, cioè $\bar{V}_i \supseteq \bar{A}$, si ha $V_1 \cap A = \emptyset$. Analogamente per B quindi $V_1 = \emptyset$ e l'applicazione $H: S \times I \rightarrow G$ definita da $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, t) = v_5$ per $t \neq 0$ è un'omotopia tra f ed $o(v_5)$.

Se V_2 ha infiniti punti e $V_2 \cap A$ è infinito, allora $\bar{V}_2 \supseteq \bar{A}$ e quindi $f(A) = \{v_2\}$; ne segue che f è costante oppure è omotopa ad una delle funzioni $o(v_1)$ e $o(v_5)$.

ii) Se $f(x_2) = v_1$ si ha V_i finito per ogni $i \neq 1$; in particolare V_5 è finito e quindi $f \sim o$.

iii) Segue banalmente da i).

iv) Se $A \cap V_1 \neq \emptyset$ e $B \cap V_1 \neq \emptyset$ risulta $V_5 = \emptyset$ quindi $f \sim o$.

PROPOSIZIONE 2.2. - $i \in \{2,3,4\}$. $f : S \rightarrow G$ regolare, $f \not\sim o$ e

$V_i^f - \{x_2, x_3, x_4\} \neq \emptyset \implies \exists g : S \rightarrow G$ regolare tale che $V_i^g - \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset$

ed $f \sim g$.

Dimostrazione. Considerata l'applicazione $g : S \rightarrow G$ definita da $g(x_j) = f(x_j)$ per $j = 2,3,4$, $g(A) = \{v_r\}$ se $V_r^f \subset A$ e $g(B) = \{v_s\}$

se $V_s^f \subset B$ e posto $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,t) = g(x)$ per $x \in S$ e $t \neq 0$ si ha chiaramente che g è regolare, verifica le condizioni dell'enunciato ed è regolarmente omotopa ad f tramite H .

PROPOSIZIONE 2.3. - $f : S \rightarrow G$ regolare, $V_i^f - \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset$ per $i=2,3,4$

ed $f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) \implies f \sim o$.

Dimostrazione. Se $f(\{x_2, x_3, x_4\}) = \{v_2\}$ e si pone $H(x,1) = v_2$ ed

$H(x,t) = f(x)$ per $x \in S$ e $t \neq 1$ si ha un'omotopia tra f ed $o(v_2)$.

PROPOSIZIONE 2.4. - $f, g : S \rightarrow G$ regolari, non omotope a costante,

omotope tra loro e tali che $V_i^f - \{x_2, x_3, x_4\} = V_i^g - \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset$

per ogni $i = 2,3,4 \implies f = g$.

Dimostrazione. Sia $f(A) = \{v_1\}$, $g(A) = \{v_5\}$ e se $H: S \times I \rightarrow G$ è un'omo-

topia regolare tra f e g , poniamo

$$t' = \sup \{t \in I / V_1^H \cap (Ax\{c\}) \neq \emptyset\} \quad \text{è infinito} \quad \forall 0 \leq c \leq t;$$

$$t'' = \inf \{t \in I / V_5^H \cap (Ax\{c\}) \neq \emptyset\} \quad \text{è infinito} \quad \forall t \leq c \leq 1.$$

Se t' non è un massimo, $V_1^H \cap (Ax\{t'\})$ è finito e $V_5^H \cap (Ax\{t'\})$ è finito perché $\bar{V}_1^H \supseteq \bar{A} \times [0, t']$; quindi $(V_2^H \cup V_3^H \cup V_4^H) \cap (Ax\{t'\})$ è infinito e la funzione regolare definita da $h(x) = H(x, t')$ per $x \in S$ è omotopa ad f e ad o , contro l'ipotesi. Analogamente si ottiene una contraddizione se t'' non è un minimo.

Se t' è un massimo e t'' è un minimo, si ha banalmente $t' < t''$; posto inoltre

$$s = \sup \{t \in I / (Ax\{c\}) \cap V_1^H \text{ è finito } \forall c \leq t\}$$

$$s' = \sup \{t \in [t', s] / (Ax\{c\}) \cap V_5^H \text{ è finito } \forall c \leq t\}$$

si ha chiaramente $t' < s' \leq s$.

Scelto $t' < t < s'$ si ha allora $(V_2^H \cup V_3^H \cup V_4^H) \cap (Ax\{t\})$ infinito per cui l'applicazione regolare definita da $h(x) = H(x, t)$, per $x \in S$, è omotopa ad f e ad o .

Sia ora invece $g(x_j) \neq f(x_j)$ per qualche $j \in \{2, 3, 4\}$ e sia H un'omotopia regolare tra f e g ; esiste $t \in I$ tale che $H(x_j, t) \in (V_1, V_5)$ e quindi la funzione regolare definita da $h(x) = H(x, t)$ è omotopa ad f e ad o .

I risultati precedenti mostrano che $Q(S, G)$ ha 49 elementi.

Passando al grafo G^* duale di G si ha ancora che le funzioni costanti sono omotope tra di loro ed inoltre si prova quanto segue, con metodi del tutto analoghi a quelli già usati in precedenza.

PROPOSIZIONE 2.5. - Sia $f : S \rightarrow G$ una funzione regolare; si ha allora

- a) V_i è infinito o è vuoto per ogni $i = 2, 3, 4$.
- b) Se V_1 o V_5 è infinito, allora $f \sim o$.
- c) $f(\{x_2, x_3, x_4\}) \cap \{x_2, v_3, v_4\} \neq \emptyset \implies f = o$.
- d) $A \cap V_i \neq \emptyset \implies A \cap V_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in \{2, 3, 4\}$ $i \neq j$.
- e) $i \in \{2, 3, 4\}$, $A \cap V_i \neq \emptyset$ e $B \cap V_i \neq \emptyset \implies f \sim o$.

Dimostrazione. a) V_i finito non vuoto $\implies \exists j \neq i$ tale che

$\bar{V}_j \cap V_i \neq \emptyset \implies v_i \rightarrow v_j$ che è impossibile se $i = 2, 3, 4$.

b) $V_1 \cap A$ infinito $\implies \bar{V}_1 \supseteq \bar{A}$; ma $v_i \neq v_1$ per $i \neq 1$ quindi $\bar{V}_1 \supseteq B$ ed $f = o(v_i)$

c) Se $f(x_2) = v_2, V_j$ è finito (o vuoto) per $j \neq 3, 4$; si ha allora $V_3 = V_4 = \emptyset$ ed $f \sim o(v_2)$.

d) Segue banalmente da a).

e) Se $A \cap V_2 \neq \emptyset$ e $B \cap V_2 \neq \emptyset$ allora $V_3 = V_4 = \emptyset$ e, come in c), $f \sim o(v_2)$

PROPOSIZIONE 2.6.- $f : S \rightarrow G$ regolare, $f \not\sim o$ e $V_1^f - \{x_2, x_3, x_4\} \neq \emptyset \implies \implies \exists g : S \rightarrow G$ regolare tale che $V_1^g - \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset$ ed $f \sim g$.

Dimostrazione. Identica a quella della proposizione 2.2.

PROPOSIZIONE 2.7.- $f : S \rightarrow G$ regolare, $V_i - \{x_2, x_3, x_4\} = \emptyset$ per ogni $i = 2, 3, 4$ ed $f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) \implies f \sim o$.

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione 2.3.

Come nell'esempio precedente si conclude che $Q(S, G^*)$ ha al più 37 elementi e non può essere in corrispondenza biunivoca con $Q(S, G)$. Anche qui si può provare, come in precedenza che gli elementi di $Q(S, G^*)$ sono esattamente 37.

3. Sia ora $S = \{x, y, y', x'\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{x\}, \{x'\}, \{x, y, x'\}, \{x, y', x'\}, S\}$ una topologia su S che ovviamente è quasi compatta e T_0 ma non T_1 .

Sia poi G il grafo di vertici a, b, b', a' e lati $(b, a), (b, a'), (b', a), (b', a')$.

Analogamente a quanto provato nell'esempio 1 si verifica subito che $-o(v) \sim o(w)$ per ogni coppia di vertici v, w del grafo G

$-f: S \rightarrow G$ regolare ed $f \not\sim o \implies f(\{x, x'\}) \subseteq \{a, a'\}$, $f(\{y, y'\}) \subseteq \{b, b'\}$,
 $f(x) \neq f(x')$ ed $f(y) \neq f(y')$.

$-f: S \rightarrow G$ regolare, $f \sim o$ ed $f(x) \neq f(x') \implies f(y) = f(y')$.

Si ha quindi che le funzioni non omotope a costante sono tutte e sole quelle che su x ed x' assumono valori a ed a' (o a' ed a) mentre su y ed y' assumono valori b e b' (o b' e b). Con procedimento analogo a quello della proposizione 1.5. si verifica che queste quattro funzioni regolari sono non omotope tra loro.

Poiché il grafo G è isomorfo al suo duale G^* si ha chiaramente che $Q(S, G^*)$ ha, oltre alla classe nulla, le classi costituite dalle funzioni regolari che portano bigettivamente x, x' su b, b' e y, y' su a, a' .

Considerato allora il sottospazio $S' = \{y\}$ chiuso in S e il sotto-grafo G' di unico vertice a è evidente che $Q(S, S'; G, G') = 0$ mentre $Q(S, S'; G^*, G'^*) = \{[0], [g_1], [g_2]\}$ dove g_1 e g_2 sono le due funzioni regolari di S in G^* che portano y in a .

In modo analogo si costruiscono una coppia di spazi topologici T e T' (T sia il sottospazio dello spazio S , considerato nel n. 2, formato dai segmenti congiungenti x_1 e x_5 a x_2 e ad x_3 ; T' sia il sottospazio chiuso di T formato dal punto x_2) ed una coppia di grafi orientati G e G' (gli stessi usati nella prima parte di questo n. 3) in modo che $Q(T, T'; G, G') = 0$ mentre $Q(T, T'; G^*, G'^*)$ ha come elementi

la classe nulla e quelle individuate dalle funzioni regolari $f : T \rightarrow G$, $g : T \rightarrow G$ definite da $f(A) = \{b\}$, $f(B) = \{b'\}$, $f(x_2) = a$, $f(x_3) = a'$ e da $g(A) = \{b'\}$, $g(B) = \{b\}$, $g(x_2) = a$, $g(x_3) = a'$, dove con A indichiamo l'unione dei segmenti aventi un estremo in x_1 privati di x_2 e x_3 e con B indichiamo $S - \bar{A}$.

Concludiamo osservando che gli esempi dati qui non contraddicono i teoremi di dualità 9 e 19 dati in [3] per le classi di omotopia completamente regolare poiché tutte le applicazioni non omotope a zero ottenute negli esempi di questo lavoro sono regolari ma non completamente regolari

B I B L I O G R A F I A

- [1] BURZIO M. and DEMARIA D.C., *A normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs*, da pubblicare su Rend. Circ. Mat. Palermo (Preprint in Quaderni Ist. Matem. Univers. Lecce, n.17, 1979).
- [2] BURZIO M. and DEMARIA D.C., *The first normalization theorem for regular homotopy of finite directed graphs*, da pubblicare su Rend. Ist. Matem. Univers. Trieste (Preprint in Quaderni Ist. Matem. Univers. Lecce, n.7, 1980).
- [3] BURZIO M. and DEMARIA D.C. *Duality theorems for regular homotopy of finite directed graphs*, da pubblicare
- [4] GIANELLA G.M., *Su un'omotopia regolare dei grafi*, Rend. Sem. Univers. Polit. Torino, 35, 1976-77
- [5] KOWALSKY H. J., *Topological Spaces*, Academic Press, 1964.