n. 2 - Applicazione aggiunta del gruppo $\tilde{G}$.

Rispetto alla struttura di gruppo di Lie su $\tilde{G}$, definita nel numero precedente la surgezione canonica $p : GL(n+1,\mathbb{R}) \to \tilde{G}$, $A \to \tilde{A}$ è un omomorfismo di gruppi di Lie; denotato con e l'elemento neutro di G e posto : $p(e) = \tilde{e}$, si identifica l'algebra di Lie $\underline{\tilde{g}}$ di $\tilde{G}$ con lo spazio tangente $T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$, e quindi l'applicazione aggiunta di $\tilde{G}$ rispetto ad un elemento prefissato $\tilde{C}$ $(C = (C^{\alpha}_{\cdot\beta})_{0\leq\alpha,\beta\leq n})$ di $\tilde{G}$ non è altro che il differenziale dell'applicazione $f : \tilde{G} \to \tilde{G}$, $\tilde{X} \to \widetilde{CXC^{-1}}$ nell'elemento neutro $\tilde{e}$ di $\tilde{G}$, essa si indica abitualmente con

$$ad(\tilde{C}) : \underline{\tilde{g}} \to \underline{\tilde{g}}$$

Sia allora $X_{\tilde{e}} \in T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$ con $X_{\tilde{e}} = X^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}}$ [1], rispetto ad una carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ prefissata in $\tilde{G}$; posto

$ad(\tilde{C})(X_{\tilde{e}}) = Y_{\tilde{e}} = Y^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}}$, tenendo conto delle definizioni di vettore tangente e di differenziale di una applicazione si ottiene[1]:

$$Y^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = X^{\alpha}_{\beta}\{C^{\bar{\alpha}}_{\cdot\alpha}C^{\cdot\beta}_{\bar{\beta}} - C^{\gamma}_{\cdot\alpha}\, C^{\cdot\beta}_{\gamma}\, \delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\}$$

(1) Per semplicità si omette il simbolo di sommatoria $\sum\limits_{\substack{0\leq\alpha\leq n \\ 0\leq\beta\leq n \\ (\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma)}}$ e si ricorda che l'indice γ è fissato.