n. 1 - Lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad una varietà differenziabile M.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione n, se p è un punto di M, con $T_p(M)$ si denoterà lo spazio tangente in p ad M; in $T_p(M) - \{0\}$ la relazione $\mathcal{R}$ così definita:

$$X_p, Y_p \in T_p(M) - \{0\} \qquad (X_p \mathcal{R}\, Y_p) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbf{R} - \{0\} \ni' \ Y_p = \lambda X_p)$$

è una relazione di equivalenza, l'insieme quoziente $D_p(M) = T_p(M) - \{0\}/\mathcal{R}$ è l'insieme delle direzioni nel punto p della varietà M; se $X_p \in T_p(M) - \{0\}$ la classe di equivalenza da esso individuata, che si denoterà nel seguito con $D_p(X_p)$, si chiamerà la direzione nel punto p individuata dal vettore tangente X_p.

L'insieme $\tau_p(M) = T_p(M) \bigsqcup D_p(M)$ si può munire di una struttura di spazio geometrico proiettivo ad n dimensioni; a tale scopo si consideri una carta locale (U,ϕ) di M tale che $p \in U$ e sia $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{1 \leq i \leq n}$ la base naturale di $T_p(M)$ rispetto a tale carta; indicato con $\mathbf{P}^n$ lo spazio numerico proiettivo ad n dimensione e con $\phi_n : R^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n$ la surgezione canonica, l'applicazione

$$\bar{K}_p : \tau_p(M) \to \mathbf{P}^n$$

così definita:

$$\bar{K}_p(X_p) = \phi_n(1, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

per ogni $X_p \in T_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$

$$\bar{K}_p(D_p(X_p)) = \phi_n(0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

per ogni $D_p(X_p) \in D_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$

è una bigezione e definisce quindi su $\tau_p(M)$ una struttura di spazio geometrico proiettivo ad n dimensioni, rispetto a tale struttura $\tau_p(M)$ si chiama lo spazio proiettivo tangente in p ad M e la bigezione $\bar{K}_p$ si chiama sistema coordinato in p relativo alla carta (U,ϕ) prefissata in M.

Si osservi che il riferimento proiettivo relativo a $\bar{K}_p$ è la $(n+2)$-pla $(\bar{0}_\circ,\bar{0}_1,\bar{0}_2,\dots,\bar{0}_n,\bar{U})$ essendo $\bar{0}_\circ = 0_{T_p(M)}$, $\bar{0}_1 = D_p((\frac{\partial}{\partial x^1})_p),\dots,$

$\bar{0}_n = D_p((\frac{\partial}{\partial x^n})_p)$, $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$, questo riferimento si chiamerà il riferimento proiettivo nel punto p della varietà M, relativo alla carta (U,ϕ) prefissata.

Sia ora $\mathcal{S}(p)$ l'insieme dei riferimenti proiettivi in $p\in M$ e sia $\mathcal{S}(M)$ l'insieme

$$\mathcal{S}(M) = \bigsqcup_{p\in M} \mathcal{S}(p)$$

questo insieme risulta lo spazio totale di uno spazio fibrato principale differenziabile avente come varietà di base la varietà M e come proiezione l'applicazione $\pi : \mathcal{S}(M) \to M$ che al riferimento proiettivo u_p, in $p\in M$ fa corrispondere il punto p stesso; per la costruzione di un tale fibrato si consideri nel gruppo lineare $GL(n+1,\mathbb{R})$ la relazione $\sim$ così definita:

$$A,B\in GL(n+1,\mathbb{R}) \qquad (A \sim B) \Longleftrightarrow (\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \ni' B = \rho A)$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza, l'insieme quoziente

$$\tilde{G} = GL(n+1,\mathbb{R})/\sim$$

è un gruppo rispetto alla legge di composizione interna:

$$\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$$
$$(\tilde{A}\ ,\ \tilde{B}) \to \widetilde{A \cdot B}$$

ove si sono indicati con $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ le classi di $\sim$-equivalenza rappresentate da

A e B rispettivamente e con $A \cdot B$ il prodotto righe per colonne di A per B.

Sul gruppo $\tilde{G}$ si consideri la struttura di varietà differenziabile definita dall'atlante

$$\mathcal{A} = \{(U_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta})\}_{0 \leq \alpha, \beta \leq n}$$

ove $U_{\alpha\beta}$ e $\phi_{\alpha\beta}$ sono:

$$U_{\alpha\beta} = \{\tilde{A} \in \tilde{G} / A = (a_{\gamma\delta})_{0 \leq \gamma, \delta \leq n} \quad a_{\gamma\delta} \neq 0 \quad \text{se} \quad (\gamma,\delta) = (\alpha,\beta)\}$$

$$\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \phi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \subseteq R^{n(n+2)}$$

$$\tilde{A} \to \left(\frac{a_{oo}}{a_{\alpha\beta}}, \frac{a_{o1}}{a_{\alpha\beta}}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{a_{nn}}{a_{\alpha\beta}} \right)$$

rispetto a tale struttura $\tilde{G}$ è un gruppo di Lie.

Sull'insieme $\mathcal{R}(M)$ dei riferimenti proiettivi associati ad M si costruisce "per incollamento" una struttura di varietà differenziabile; a tale scopo sia $p \in M$ ed (U,ϕ) una carta locale di M tali che $p \in U$, sia inoltre Φ_U l'applicazione

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \tilde{G}$$

che al riferimento proiettivo $u_p \in \pi^{-1}(U)$ fa corrispondere la coppia ordinata $(p,\tilde{A})$ essendo A una matrice di $GL(n+1,\mathbb{R})$ che rappresenta il cambiamento di riferimento proiettivo nel passaggio dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta (U,ϕ), al riferimento u_p; questa applicazione Φ_U è una bigezione; si considera allora su $\pi^{-1}(U)$ la struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale Φ_U è un diffeomorfismo; si può osservare che se $(\bar{U},\bar{\phi})$ è un'altra carta locale di M per la quale risulta $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, allora la struttura differenziabile indotta da $\Phi_{\bar{U}}$ su $\pi^{-1}(U \cap \bar{U})$ è la stessa di quella indotta da Φ_U; resta così definita globalmente su $\mathcal{S}(M)$ una struttura di varietà differenziabile che induce su ciascun aperto $\pi^{-1}(U)$ di $\mathcal{S}(M)$ la struttura differenziabile rispetto alla quale Φ_U è un diffeomorfismo; la dimensione di $\mathcal{S}(M)$ è $n(n+3)$.

Per ciò che seguirà, sarà utile osservare che per ogni $u_p \in \pi^{-1}(U)$ esistono tre carte locali: (W,Θ) in $\mathcal{S}(M)$, (V,Ψ) in M, $(U_{\alpha\beta},\phi_{\alpha\beta})$ in $\tilde{G}$, tali che $\Phi_U(W) = V \times U_{\alpha\beta}$, inoltre posto $\Phi_U(u_p) = (p,\tilde{A})$, $\Psi(p)=(x^1,x^2,\dots x^n)$, $\phi_{\alpha\beta}(\tilde{A}) = (t_{oo},t_{o1},\dots,t_{\alpha\beta},\dots,t_{n\,n})$, si ha:

$$\Theta(u_p) = (x^1,x^2,\dots x^n,t_{oo},t_{o1},\dots,\hat{t}_{\alpha\beta},\dots,t_{n\,n})$$

Il gruppo $\tilde{G}$ opera differenzialmente a destra su $\mathcal{S}(M)$ tramite l'applicazione

$$\Psi:\mathcal{S}(M) \times \tilde{G} \to \mathcal{S}(M)$$
$$\Psi(u_p,\tilde{A}) \to \Psi(u_p,\tilde{A})$$

così definita: sia $\bar{K}_p : \tau_p(M) \to \mathbb{P}^n$ il sistema coordinato relativo al riferimento proiettivo $u_p \in \mathcal{S}(M)$, indicata con $T : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ la trasformazione lineare omogenea invertibile rappresentata dalla matrice A, $\Psi(u_p,\tilde{A})$ è il riferimento proiettivo u'_p relativo al sistema coordinato $\bar{K}'_p = T\circ\bar{K}_p$.

Si può concludere dopo queste considerazioni che la quintupla $\xi=(\mathcal{S}(M),\tilde{G},\Psi,M,\pi)$ è uno spazio fibrato principale differenziabile che prende il nome di <u>spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad M.</u>

Prima di terminare questo numero, si troverà l'espressione delle funzioni di transizione relative ad un ricoprimento di aperti coordinati della varietà M; siano (U,ϕ) e $(\bar{U},\bar{\phi})$ due carte locali di M tali che $U\cap\bar{U} \neq \emptyset$ e sia

$\phi_{U\bar{U}}$ l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} \phi_{U\bar{U}} : U\cap\bar{U} & \to & \tilde{G} \\ p & \to & \phi_{U\bar{U}}(p) = \tilde{C}_{U\bar{U}} \end{array}$$

dove la matrice $C_{U\bar{U}}$ è quella che fa passare dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta (U,ϕ) a quello relativo alla carta $(\bar{U},\bar{\phi})$; si riconosce facilmente che la famiglia $\{\phi_{U\bar{U}}\}$ è la famiglia delle funzioni di transizione del fibrato ξ subordinata al ricoprimento $\{U\}$ di M; l'espressione della matrice $C_{U\bar{U}}$ si scrive facilmente in quanto se $(0_{T_p(M)}$, $D_p((\frac{\partial}{\partial x^1})_p), \ldots, D_p((\frac{\partial}{\partial x^n})_p), \sum_{r=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x^r})_p)$ è il riferimento proiettivo in p relativo alla carta (U,ϕ) e $(0_{T_p(M)}, D_p((\frac{\partial}{\partial y^1})_p), \ldots D_p((\frac{\partial}{\partial y^n})_p, \sum_{s=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial y^s})$ è quello relativo alla carta $(\bar{U},\bar{\phi})$, allora poiché risulta $(\frac{\partial}{\partial y^s})_p = (\frac{\partial x^r}{\partial y^s})(p)(\frac{\partial}{\partial x^r})_p$, si ottiene:

$$C_{U\bar{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & (\frac{\partial x^1}{\partial y^1})(p) & \ldots & (\frac{\partial x^1}{\partial y^n})(p) \\ \cdot & \cdot & & \\ \vdots & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & (\frac{\partial x^n}{\partial y^1})(p) & \ldots & (\frac{\partial x^n}{\partial y^n})(p) \end{pmatrix}$$