SUMMARY. -

*In this note the notion of projective pseudoconnexion is introduced and so me geometrical properties are studied.*

INTRODUZIONE. - Le pseudoconnessioni dal punto di vista dei fibrati, introdotte da C. Di Comite in [2] sono state studiate sempre dallo stesso autore in particolare sullo spazio fibrato dei riferimenti lineari (pseudoconnessioni lineari) e sullo spazio fibrato dei riferimenti affini (pseudoconnessioni affini) (c.f.r.) [3]) di una varietà differenziabile M.

Seguendo quest'ordine di idee in questa nota si introduce la nozioni di pseudoconnessione proiettiva come pseudoconnessione nello spazio fibrato $\mathcal{S}(M)$ dei riferimenti proiettivi di M e se ne studiano alcune proprietà; in particolare si dimostra che ogni pseudoconnessione proiettiva su M induce una pseudoconnessione lineare e viceversa.

*Accettato per la pubblicazione su proposta del Prof. C. Di Comite*

n. 1 - Lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad una varietà differenziabile $M$.

Sia $M$ una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{\infty}$ e dimensione $n$, se $p$ è un punto di $M$, con $T_p(M)$ si denoterà lo spazio tangente in $p$ ad $M$; in $T_p(M) - \{0\}$ la relazione $\mathcal{R}$ così definita:

$$X_p, Y_p \in T_p(M) - \{0\} \qquad (X_p \mathcal{R}\, Y_p) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbf{R} - \{0\} \ni' \ Y_p = \lambda X_p)$$

è una relazione di equivalenza, l'insieme quoziente $D_p(M) = T_p(M) - \{0\}/\mathcal{R}$ è l'insieme delle direzioni nel punto $p$ della varietà $M$; se $X_p \in T_p(M) - \{0\}$ la classe di equivalenza da esso individuata, che si denoterà nel seguito con $D_p(X_p)$, si chiamerà la direzione nel punto $p$ individuata dal vettore tangente $X_p$.

L'insieme $\tau_p(M) = T_p(M) \bigsqcup D_p(M)$ si può munire di una struttura di spazio geometrico proiettivo ad $n$ dimensioni; a tale scopo si consideri una carta locale $(U,\phi)$ di $M$ tale che $p \in U$ e sia $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{1 \leq i \leq n}$ la base naturale di $T_p(M)$ rispetto a tale carta; indicato con $\mathbf{P}^n$ lo spazio numerico proiettivo ad $n$ dimensione e con $\phi_n : R^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n$ la surgezione canonica, l'applicazione

$$\bar{K}_p : \tau_p(M) \to \mathbf{P}^n$$

così definita:

$$\bar{K}_p(X_p) = \phi_n(1, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

per ogni $X_p \in T_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$

$$\bar{K}_p(D_p(X_p)) = \phi_n(0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$$

per ogni $D_p(X_p) \in D_p(M)$ ed $X_p = \lambda^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$

è una bigezione e definisce quindi su $\tau_p(M)$ una struttura di spazio geometrico proiettivo ad $n$ dimensioni, rispetto a tale struttura $\tau_p(M)$ si chiama lo spazio proiettivo tangente in $p$ ad $M$ e la bigezione $\bar{K}_p$ si chiama sistema coordinato in $p$ relativo alla carta $(U,\phi)$ prefissata in $M$.

Si osservi che il riferimento proiettivo relativo a $\bar{K}_p$ è la $(n+2)$-pla $(\bar{0}_\circ,\bar{0}_1,\bar{0}_2,\dots,\bar{0}_n,\bar{U})$ essendo $\bar{0}_\circ = 0_{T_p(M)}$, $\bar{0}_1 = D_p((\frac{\partial}{\partial x^1})_p),\dots,$

$\bar{0}_n = D_p((\frac{\partial}{\partial x^n})_p)$, $\bar{U} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$, questo riferimento si chiamerà il riferimento proiettivo nel punto $p$ della varietà $M$, relativo alla carta $(U,\phi)$ prefissata.

Sia ora $\mathcal{S}(p)$ l'insieme dei riferimenti proiettivi in $p\in M$ e sia $\mathcal{S}(M)$ l'insieme

$$\mathcal{S}(M) = \bigsqcup_{p\in M} \mathcal{S}(p)$$

questo insieme risulta lo spazio totale di uno spazio fibrato principale differenziabile avente come varietà di base la varietà $M$ e come proiezione l'applicazione $\pi : \mathcal{S}(M) \to M$ che al riferimento proiettivo $u_p$, in $p\in M$ fa corrispondere il punto $p$ stesso; per la costruzione di un tale fibrato si consideri nel gruppo lineare $GL(n+1,\mathbb{R})$ la relazione $\sim$ così definita:

$$A,B\in GL(n+1,\mathbb{R}) \qquad (A \sim B) \Longleftrightarrow (\exists \rho \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \ni' \; B = \rho A)$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza, l'insieme quoziente

$$\tilde{G} = GL(n+1,\mathbb{R})/\sim$$

è un gruppo rispetto alla legge di composizione interna:

$$\begin{aligned} \tilde{G} \times \tilde{G} &\to \tilde{G} \\ (\tilde{A}\,,\,\tilde{B}) &\to \widetilde{A\cdot B} \end{aligned}$$

ove si sono indicati con $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ le classi di $\sim$-equivalenza rappresentate da

A e B rispettivamente e con $A \cdot B$ il prodotto righe per colonne di A per B.

Sul gruppo $\tilde{G}$ si consideri la struttura di varietà differenziabile definita dall'atlante

$$\mathcal{A} = \{(U_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta})\}_{0 \leq \alpha, \beta \leq n}$$

ove $U_{\alpha\beta}$ e $\phi_{\alpha\beta}$ sono:

$$U_{\alpha\beta} = \{\tilde{A} \in \tilde{G} / A = (a_{\gamma\delta})_{0 \leq \gamma, \delta \leq n} \quad a_{\gamma\delta} \neq 0 \quad \text{se} \quad (\gamma,\delta) = (\alpha,\beta)\}$$

$$\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \phi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \subseteq R^{n(n+2)}$$

$$\tilde{A} \rightarrow \left( \frac{a_{oo}}{a_{\alpha\beta}}, \frac{a_{o1}}{a_{\alpha\beta}}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{a_{nn}}{a_{\alpha\beta}} \right)$$

rispetto a tale struttura $\tilde{G}$ è un gruppo di Lie.

Sull'insieme $\mathcal{R}(M)$ dei riferimenti proiettivi associati ad M si costruisce "per incollamento" una struttura di varietà differenziabile; a tale scopo sia $p \in M$ ed $(U,\phi)$ una carta locale di M tali che $p \in U$, sia inoltre $\Phi_U$ l'applicazione

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \tilde{G}$$

che al riferimento proiettivo $u_p \in \pi^{-1}(U)$ fa corrispondere la coppia ordinata $(p,\tilde{A})$ essendo A una matrice di $GL(n+1,\mathbb{R})$ che rappresenta il cambiamento di riferimento proiettivo nel passaggio dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta $(U,\phi)$, al riferimento $u_p$; questa applicazione $\Phi_U$ è una bigezione: si considera allora su $\pi^{-1}(U)$ la struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale $\Phi_U$ è un diffeomorfismo; si può osservare che se $(\bar{U},\bar{\phi})$ è un'altra carta locale di M per la quale risulta $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, allora la struttura differenziabile indotta da $\Phi_{\bar{U}}$ su $\pi^{-1}(U \cap \bar{U})$ è la stessa di quella indotta da $\Phi_U$; resta così definita globalmente su $\mathcal{S}(M)$ una struttura di varietà differenziabile che induce su ciascun aperto $\pi^{-1}(U)$ di $\mathcal{S}(M)$ la struttura differenziabile rispetto alla quale $\Phi_U$ è un diffeomorfismo; la dimensione di $\mathcal{S}(M)$ è $n(n+3)$.

Per ciò che seguirà, sarà utile osservare che per ogni $u_p \in \pi^{-1}(U)$ esistono tre carte locali: $(W,\Theta)$ in $\mathcal{S}(M)$, $(V,\Psi)$ in $M$, $(U_{\alpha\beta},\phi_{\alpha\beta})$ in $\tilde{G}$, tali che $\Phi_U(W) = V \times U_{\alpha\beta}$, inoltre posto $\Phi_U(u_p) = (p,\tilde{A})$, $\Psi(p)=(x^1,x^2,\ldots x^n)$, $\phi_{\alpha\beta}(\tilde{A}) = (t_{oo},t_{o1},\ldots,t_{\alpha\beta},\ldots,t_{n\,n})$, si ha:

$$\Theta(u_p) = (x^1,x^2,\ldots x^n,t_{oo},t_{o1},\ldots,\hat{t}_{\alpha\beta},\ldots,t_{n\,n})$$

Il gruppo $\tilde{G}$ opera differenzialmente a destra su $\mathcal{S}(M)$ tramite l'applicazione

$$\begin{array}{lcl} \Psi:\mathcal{S}(M) \times \tilde{G} & \rightarrow & \mathcal{S}(M) \\ \Psi(u_p,\tilde{A}) & \rightarrow & \Psi(u_p,\tilde{A}) \end{array}$$

così definita: sia $\bar{K}_p : \tau_p(M) \rightarrow \mathbb{P}^n$ il sistema coordinato relativo al riferimento proiettivo $u_p \in \mathcal{S}(M)$, indicata con $T : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ la trasformazione lineare omogenea invertibile rappresentata dalla matrice $A$, $\Psi(u_p,\tilde{A})$ è il riferimento proiettivo $u'_p$ relativo al sistema coordinato $\bar{K}'_p = T\circ\bar{K}_p$.

Si può concludere dopo queste considerazioni che la quintupla $\xi=(\mathcal{S}(M),\tilde{G},\Psi,M,\pi)$ è uno spazio fibrato principale differenziabile che prende il nome di <u>spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato ad M.</u>

Prima di terminare questo numero, si troverà l'espressione delle funzioni di transizione relative ad un ricoprimento di aperti coordinati della varietà M; siano $(U,\phi)$ e $(\bar{U},\bar{\phi})$ due carte locali di $M$ tali che $U\cap\bar{U} \neq \emptyset$ e sia

$\phi_{U\bar{U}}$ l'applicazione:

$$\phi_{U\bar{U}} : U \cap \bar{U} \rightarrow \tilde{G}$$
$$p \rightarrow \phi_{U\bar{U}}(p) = \tilde{C}_{U\bar{U}}$$

dove la matrice $C_{U\bar{U}}$ è quella che fa passare dal riferimento proiettivo in p relativo alla carta $(U,\phi)$ a quello relativo alla carta $(\bar{U},\bar{\phi})$; si riconosce facilmente che la famiglia $\{\phi_{U\bar{U}}\}$ è la famiglia delle funzioni di transizione del fibrato $\xi$ subordinata al ricoprimento $\{U\}$ di $M$; l'espressione della matrice $C_{U\bar{U}}$ si scrive facilmente in quanto se $(0_{T_p(M)},$

$D_p((\frac{\partial}{\partial x^1})_p), \ldots, D_p((\frac{\partial}{\partial x^n})_p), \sum_{r=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x^r})_p)$ è il riferimento proiettivo in

p relativo alla carta $(U,\phi)$ e $(0_{T_p(M)}, D_p((\frac{\partial}{\partial y^1})_p), \ldots D_p((\frac{\partial}{\partial y^n})_p, \sum_{s=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial y^s})$

è quello relativo alla carta $(\bar{U},\bar{\phi})$ , allora poiché risulta

$(\frac{\partial}{\partial y^s})_p = (\frac{\partial x^r}{\partial y^s})(p)(\frac{\partial}{\partial x^r})_p$, si ottiene:

$$C_{U\bar{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & (\frac{\partial x^1}{\partial y^1})(p) & \ldots & (\frac{\partial x^1}{\partial y^n})(p) \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & (\frac{\partial x^n}{\partial y^1})(p) & \ldots & (\frac{\partial x^n}{\partial y^n})(p) \end{pmatrix}$$

n. 2 - Applicazione aggiunta del gruppo $\tilde{G}$.

Rispetto alla struttura di gruppo di Lie su $\tilde{G}$, definita nel numero precedente la surgezione canonica $p : GL(n+1,\mathbb{R}) \to \tilde{G}$, $A \to \tilde{A}$ è un omomorfismo di gruppi di Lie; denotato con $e$ l'elemento neutro di $G$ e posto : $p(e) = \tilde{e}$, si identifica l'algebra di Lie $\underline{\tilde{g}}$ di $\tilde{G}$ con lo spazio tangente $T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$, e quindi l'applicazione aggiunta di $\tilde{G}$ rispetto ad un elemento prefissato $\tilde{C}$ $(C = (C^{\alpha}_{\cdot\beta})_{0\leq\alpha,\beta\leq n})$ di $\tilde{G}$ non è altro che il differenziale dell'applicazione $f : \tilde{G} \to \tilde{G}$, $\tilde{X} \to \widetilde{C \times C^{-1}}$ nell'elemento neutro $\tilde{e}$ di $\tilde{G}$, essa si indica abitualmente con

$$ad(\tilde{C}) : \underline{\tilde{g}} \to \underline{\tilde{g}}$$

Sia allora $X_{\tilde{e}} \in T_{\tilde{e}}(\tilde{G})$ con $X_{\tilde{e}} = X^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}}$ [1], rispetto ad una carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ prefissata in $\tilde{G}$; posto

$ad(\tilde{C})(X_{\tilde{e}}) = Y_{\tilde{e}} = Y^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial t^{\alpha}_{\beta}}\right)_{\tilde{e}}$, tenendo conto delle definizioni di vettore tangente e di differenziale di una applicazione si ottiene[1]:

$$Y^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = X^{\alpha}_{\beta}\{C^{\bar{\alpha}}_{\cdot\alpha} C^{\cdot\beta}_{\bar{\beta}} - C^{\gamma}_{\cdot\alpha} C^{\cdot\beta}_{\gamma} \delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\}$$

---

(1) Per semplicità si omette il simbolo di sommatoria $\sum\limits_{\substack{0\leq\alpha\leq n \\ 0\leq\beta\leq n \\ (\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma)}}$ e si ricorda che l'indice $\gamma$ è fissato.

n. 3 - <u>Pseudoconnessioni proiettive.</u>

Per semplicità di notazione si denoterà nel seguito con $\mathcal{P}(M)$ lo spazio fibrato dei riferimenti proiettivi associato alla varietà differenziabile $M$.

Def. 3.1.- <u>Si chiama pseudoconnessione proiettiva su</u> $M$ <u>ogni pseudoconnessione sullo spazio fibrato</u> $\mathcal{P}(M)$.

Sia $\Gamma$ una pseudoconnessione proiettiva su $M$ e sia $A$ il campo tensoriale su $M$ associato a $\Gamma$ (c.f.r.[2]), si vogliono definire in modo analogo a quanto si fa per le connessioni proiettive, le componenti di $\Gamma$ rispetto ad una carta locale di $M$ ed una carta locale di $\tilde{G}$ prefissata. Si consideri a tale scopo, una carta locale $(U,\phi)$ e sia $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ il relativo sistema coordinato; si indichi con $\sigma_U$ la sezione locale di $\mathcal{P}(M)$ definita su $U$ la quale associa ad ogni punto $p\in U$ il riferimento proiettivo $u_p$ relativo alla carta $(U,\phi)$ e sia $\omega_U$ la 1-forma su $U$ a valori nell'algebra di Lie $\underline{\tilde{\mathfrak{g}}}$ di $\tilde{G}$, definita per ogni $p\in U$ e per ogni $X_p\in T_p(M)$ da (c.f.r.[2])

$$(\omega_U)_p(X_p) = v_{\sigma_U(p)}((\sigma_U)_{*p}(A_p(X_p)) - \Gamma_{\sigma_U(p)}((\sigma_U)_{*p}(X_p))$$

dove $v_{\sigma_U(p)}$ è l'isomorfismo (c.f.r. [4]):

$$v_{\sigma_U(p)} : V_{\sigma_U(p)} \to \tilde{g}$$
$$A^*_{\sigma_U(p)} \to A$$

Fissata una carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ in $\tilde{G}$ sia $(E^\beta_\alpha)_{\substack{0\leq\alpha,\beta\leq n \\ (\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma)}}$ la base corrispondente dell'algebra di Lie $\tilde{g}$; posto

$$\omega_U = (\Gamma^\alpha_{j\beta} dx^j) E^\beta_\alpha$$

$$A_{|U} = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d\, x^j$$

le $n^2 + n^2(n+2) = n^3+3n^2$ funzioni $A^i_j$, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ <u>si chiamano le componenti di $\Gamma$ rispetto alla carta</u> $(U,\phi)$ <u>ed alla carta</u> $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ <u>prefissata in</u> $\tilde{G}$(1).

Siano ora $(U,\phi)$ e $(\bar{U},\bar{\phi})$ due carte locali di $M$ tali che $U\cap\bar{U} \neq \emptyset$ e siano $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ ed $\{\bar{x}^{i'}\}_{1\leq i'\leq n}$ i relativi sistemi coordinati, posto $\theta^i_{.i'} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{i'}}$, $\bar{\theta}^{.i'}_{i} = \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^i}$ e $\theta^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^{j'} \partial \bar{x}^{k'}}$, si prova la seguente proposizione:

Prop. 3.1. - <u>Sia $\Gamma$ una pseudoconnessione proiettiva su $M$ e siano $A^i_j$, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ e $\bar{A}^{i'}_{j'}$, $\bar{\Gamma}^{\alpha'}_{j'\beta'}$ le componenti di $\Gamma$ relative rispettivamente alle carte $(U,\phi)$ e $(\bar{U},\bar{\phi})$ di $M$ ed alla carta locale $(U_{\circ\circ},\phi_{\circ\circ})$ di $\tilde{G}$, allora in $U\cap\bar{U}$ si ha:</u>

---

(1) Si precisa che in questo numero gli indici latini variano nell'insieme $\{1,2,\dots,n\}$ mentre gli indici greci nell'insieme $\{0,1,2,\dots,\hat{\gamma},\dots,n\}$ essendo $\gamma$ l'indice corrispondente alla carta locale $(U_{\gamma\gamma}, \phi_{\gamma\gamma})$ prefissata in $\tilde{G}$.

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \Theta^{k}_{.k'}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'0} = \Gamma^{i}_{j0}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i} \qquad (1)$$

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^{i}_{jk}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \Theta^{k}_{.k'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i} + A^{h}_{j}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.h'}_{h}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i}\, \Theta^{i}_{h'k'}$$

Dimostrazione.

Per la prop. 1 del n. 3 di [2], per ogni $p \in U \cap \bar{U}$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ risulta

$$(\omega_{\bar{U}})_p(X_p) = (\mathrm{ad}(\Psi_{U\bar{U}}(p))^{-1})(\omega_U)_p(X_p) + \delta_{U\bar{U}}(A_p(X_p)) \qquad (2)$$

dove $\Psi_{U\bar{U}}(p)$ è quell'elemento $\tilde{C}_{U\bar{U}}$ di $\tilde{G}$ rappresentato dalla matrice

$$C_{U\bar{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{con } B = (\Theta^{i}_{i'})_{1 \le i,i' \le n} \in GL(n,\mathbb{R}),$$

$\delta_{U\bar{U}}$ è la 1-forma su $U \cap \bar{U}$ a valori in $\underset{\sim}{\tilde{g}}$ definita per ogni $p \in M$ e per ogni $X_p \in T_p(M)$ da:

$$(\delta_{U\bar{U}})_p(X_p) = \delta_{\Psi_{U\bar{U}}(p)}((\Psi_{U\bar{U}})_{*p}(X_p))$$

essendo $\delta_{\Psi_{U\bar{U}}(p)}$ la 1-forma canonica $\delta$ su $G$ calcolata nel punto $\Psi_{U\bar{U}}(p)$.

Nella (2) sostituendo ad $X_p$ il vettore tangente $(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})$ si ottiene:

$$(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \mathrm{ad}(\Psi_{U\bar{U}}(p))^{-1}\, \Theta^{j}_{j'}\, \Gamma^{\alpha}_{j\beta} E^{\beta}_{\alpha} + (\delta_{U\bar{U}})_p\, \Theta^{j}_{j'}\, A_p(\frac{\partial}{\partial x^{j}})_p \qquad (3)$$

Tenuto anche conto del n. 2, della (3), segue

$$(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}\Theta^{j}_{.j'}\Theta^{k}_{.k'}E^{k'}_{\circ} + \Gamma^{i}_{jo}\Theta^{j}_{.j'}\bar{\Theta}^{.i'}_{i}E^{\circ}_{i'} + \Gamma^{i}_{jk}\Theta^{j}_{.j'}\Theta^{k}_{.k'}\bar{\Theta}^{.i'}_{i}E^{k'}_{i'} +$$

$$+ A^{h}_{j}\, \Theta^{j}_{.j'}\, \bar{\Theta}^{.h'}_{h}\, \Theta^{i}_{.h'k'}\, \bar{\Theta}^{.i'}_{i}\, E^{k'}_{i'}$$

e da questa e dall'espressione $(\omega_{\bar{U}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{j'}})_p = \Gamma^{\alpha'}_{j'\beta'}E^{\beta'}_{\alpha'}$ si ottengono in modo ovvio le uguaglianze (1). $\square$

Prop. 3.2. - Ogni pseudoconnessione proiettiva $\Gamma$ su M induce una pseudo-connesione lineare $\overset{\circ}{\Gamma}$ e viceversa.

Dim.

Infatti fissata in $\tilde{G}$ la carta locale $(U_{oo},\phi_{oo})$, per ogni carta $(U,\phi)$ di M, si indichino con $A^i_j$, $\Gamma^\alpha_{j\beta}$ le componenti di $\Gamma$ rispetto a tali carte e si ponga $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, allora le $n^2+n^3$ funzioni $A^i_j$, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ sono le componenti rispetto ad $(U,\Phi)$ di una pseudoconnessione lineare $\overset{\circ}{\Gamma}$ in M in quanto per la prop. 3.1 se $(U',\phi')$ è un'altra carta locale di M tale che $U \cap U' \neq \emptyset$ si ha

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\Theta^j_{.j'}\Theta^k_{.k'}\overset{-1}{\Theta}{}^{i'}_{i} + A^h_j\Theta^j_{.j'}\overset{-1}{\Theta}{}^{h'}_{h}\overset{-1}{\Theta}{}^{i'}_{i}\Theta^i_{h'k'} .$$

Viceversa, indicato con $L(M)$ lo spazio fibrato dei riferimenti lineari di M, si considerino l'applicazione $\varphi : GL(n,R) \to \tilde{G}$, $\tilde{A} \to \tilde{B}$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

e l'applicazione $\Phi : L(M) \to \mathcal{S}(M)$ che ad ogni riferimento lineare $\ell_p = (X_1,X_2,\dots,X_n)$ nel punto $p \in M$, associa il riferimento proiettivo $\Phi(\ell_p)$ così definito:

$$\Phi(\ell_p) = (0_{T_p(M)}, D_p(X_1),\dots,D_p(X_n), \sum_{i=1}^{n} X_i) .$$

Si verifica facilmente che $(\Phi,\varphi)$ è un omomorfismo di fibrati e quindi per ogni pseudoconnessione lineare $\overset{\circ}{\Gamma}$ si può considerare la pseudoconnessione proiettiva immagine di $\overset{\circ}{\Gamma}$ tramite detto omomorfismo. (c.f.r. [3]). □

## 4. Pseudoconnessioni proiettive riducibili.

Denotato con $\mathcal{A}'(P)$ l'insieme dei riferimenti proiettivi in p che hanno come iperpiano all'infinito $D_p(M)$, si vede facilmente che se $u'_p$ e $v'_p$ sono due riferimenti di $A'_p$,
allora la trasformazione lineare omogenea invertibile del cambiamento di riferimento nel passaggio da $u'_p$ a $v'_p$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix}$$

con $a \in GL(n,\mathbb{R})$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, quindi da una matrice del gruppo di Lie $A(n,\mathbb{R})$ (c.f.r.[4] pag. 125).

Se si pone

$$\mathcal{A}'(M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{A}'(p)$$

e si indica con $\Psi'$ l'applicazione

$$\Psi' : \mathcal{A}'(M) \times A(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{A}'(M)$$
$$(u'_p, A) \to \Psi'(u'_p, A)$$

con $\Psi'(u'_p,A) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Psi(u'_p,\tilde{A})$

e con $\pi'$ la proiezione

$$\pi' : A'(M) \to M$$
$$u'_p \to p$$

per la prop. 5.3. c.f.r.[4] risulta che $\eta = (A'(M), A(n,R), \Psi', M, \pi')$ è un sottofibrato ridotto del fibrato dei riferimenti proiettivi $\xi = (\{M\}, \tilde{G}, \Psi, M, \pi)$; considerate allora le applicazioni

$$F : A'(M) \to \mathcal{P}(M)$$
$$g : A(n,R) \to \tilde{G}$$

così definite: F è l'inclusione di $A'(M)$ in $\mathcal{P}(M)$ e g è la restrizione della surgezione canonica $GL(n+1,R) \to \tilde{G}$ al sottogruppo $A(n,R)$, per ogni pseudoconnessione $\Gamma$ su $\eta$ l'immagine $\Gamma'$ di $\Gamma$ mediante l'omomorfismo di fibrati (F,g) (c.f.r.[3] ) è una pseudoconnessione proiettiva su M <u>riducibile</u> alla pseudoconnessione $\Gamma$ su $\eta$ .

## B I B L I O G R A F I A

[1] I. CATTANEO GASPARINI "*Sulle connessioni proiettive*" Annali di Matem. Pura ed Applicata (IV) Vol. L (1960) pag. 467-474

[2] C. DI COMITE "*Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale*" Annali di Matem. Pura ed Applicata (VI) Vol. IC (1974) pag. 109-142

[3] C. DI COMITE "*Pseudoconnessioni affini*" Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. Napoli - Serie IV Vol. XLIII (1976)

[4] S.KOBAYASHI-K.NOMIZU "*Fondation of differential geometry*"Vol. I (1963). Interscience Publishers.