APPENDICE

Cenni sul fibrato tangente ad una varietà topologica e sui microfibrati (*)

Come è noto ([9]), dal punto di vista intuitivo, una varietà differenziabile può essere caratterizzata come una varietà topologica tale che per ogni punto esista uno spazio tangente che varii con continuità al variare del punto. Il concetto di spazio tangente è strettamente legato a quello di struttura differenziabile: infatti esso coinvolge la nozione di derivata, operazione che perde significato su una varietà dotata di una struttura topologica.

Nell'intento di dare per una varietà topologica un concetto analogo a quello di fibrato tangente per le varietà differenziabili, Milnor nel 1962 ([9],[10]) ha introdotto la nozione di "microfibrato" e quindi di "microfibrato tangente" , che ha portato poi a quello di fibrato tangente ad una varietà topologica.

La nozione di microfibrato è essenzialmente ottenuta da quella di fibrato tangente restringendo l'attenzione ad un intorno della 0-sezione ed abbandonando ogni condizione di "linearità" cosicché si usano solo condizioni topologiche; anzi la fibra su di un punto sarà un "germe" di uno spazio topologico. Il termine "microfibrato" è dovuto ad A. Shapiro. L'uso dei microfibrati ha trovato larga applicazione nei problemi di smussamento.

Premesse.-

(1.1) Siano X ed E due spazi topologici. Si definisce $\mathbb{R}^n$-fibrato su X una coppia di funzioni continue (s,p) che rendono commutativo il

(*) Nell'esposizione seguiremo l'articolo di R. Lashof [7] e la tesi di laurea di C. Giammaruco, Il fibrato tangente ad una varietà topologica, Un. Lecce, A.A.1979-80 (Relatore G.De Cecco).

seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "id"'] & & X \end{tikzcd}$$

e verificanti inoltre le seguenti condizioni:

$\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x ed un omeomorfismo

$$k : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$$

tale che

1) $p \circ k = pr_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U \qquad (x,y) \longmapsto x$

2) $k^{-1} \circ s|U = \times 0 : U \to U \times \mathbb{R}^n \qquad y \longmapsto (y,0)$

X si dirà <u>spazio base</u>, E <u>spazio totale</u>, (k,U) <u>funzione coordinata</u> e $p^{-1}(x)$ <u>fibra su x</u>.

Si vede facilmente che ogni fibra di un $\mathbb{R}^n$-fibrato è <u>omeomorfa</u> ad $\mathbb{R}^n$.

(1.2) Una <u>struttura di fibrato vettoriale</u> su un $\mathbb{R}^n$-fibrato (s,p) è una famiglia $\{(k_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ di funzioni coordinate tali che

1) $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X;

2) $\forall x \in U_\alpha \cap B_\beta$ l'applicazione

$$(k_\beta^{-1} \circ k_\alpha)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad y \longmapsto pr_2\, k_\beta^{-1}(k_\alpha(x,y))$$

è un isomorfismo lineare.

Due strutture di fibrato vettoriale su (s,p) sono chiamate <u>equivalenti</u> se la riunione delle famiglie che le definiscono è ancora una struttura di fibrato vettoriale.

Un fibrato vettoriale n-dimensionale è un $\mathbb{R}^n$-fibrato insieme con una classe di equivalenza di strutture di fibrato vettoriale. Allora ogni fibra $p^{-1}(x)$ ha una ben determinata struttura di <u>spazio vettoriale</u> su $\mathbb{R}$ di dimensione n.

Basta infatti considerare la corrispondenza biunivoca

$$k_x : \mathbb{R}^n \to p^{-1}(x) \qquad y \to k(x,y)$$

e, posto $e_1 = k_x(y_1)$, $e_2 = k_x(y_2)$, definire

$$e_1 + e_2 = k_x(y_1 + y_2) \qquad \lambda e_1 = k_x(\lambda y_1).$$

(1.3) Se $X_1 \xrightarrow{s_1} E_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ e $X_2 \xrightarrow{s_2} E_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ sono due $\mathbb{R}^n$-fibrati, una coppia di applicazioni continue (ϕ,f), $\phi: E_1 \to E_2$, $f : X_1 \to X_2$, è chiamata un'<u>applicazione $\mathbb{R}^n$-fibrata</u> se

(1) $p_2\phi = fp_1$

(2) $s_2 f = \phi s_1$

(3) $\phi|p_1^{-1}(x_1) : p_1^{-1}(x_1) \to p_2^{-1}(f(x_1))$ è un omeomorfismo $\forall x_1 \in X_1$.

Inoltre se (s_1,p_1) e (s_2,p_2) sono fibrati vettoriali, un'applicazione fibrata è chiamata <u>lineare</u> se è lineare sulle fibre. Un'applicazione fibrata (lineare) è chiamata un'<u>equivalenza</u> fibrata (vettoriale) se $X_1 = X_2 = X$, $f = id_X$. In tal caso ϕ risulta un omeomorfismo.

Se poi ϕ, ristretta alle fibre, è un isomorfismo di spazi vettoriali $\forall x \in X$, si dirà che (ϕ, id) è un isomorfismo di fibrati vettoriali e scriveremo

$$(s_1, p_1) \overset{\sim}{=} (s_2, p_2)$$

2. Il fibrato tangente ad una varietà.

(2.1) Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Ricordiamo che ad ogni punto $x \in M$ è associato lo spazio tangente $T_x(M)$, spazio vettoriale di dimensione n, e che l'insieme

$$TM = \{(x, v_x) \mid x \in M,\ v_x \in T_x(M)\}$$

può essere dotato di struttura topologica anzi differenziabile.

Allora

$$M \xrightarrow{\sigma} TM \xrightarrow{\pi} M$$

risulta un $\mathbb{R}^n$-fibrato vettoriale differenziabile dove

$$\sigma : x \longmapsto (x, 0_x) \qquad \pi : (x, v_x) \longmapsto x$$

(2.2) Vogliamo ora illustrare le motivazioni che sono alla base del concetto di fibrato tangente ad una varietà topologica.

Come è noto, se M è una varietà riemanniana (anzi una qualsiasi varietà differenziabile paracompatta), tramite l'applicazione esponenziale è possibile definire l'applicazione

$$\Phi : N \to M \times M$$
$$(x, v_x) \longmapsto (x, \exp_x v_x)$$

dove N è un intorno della 0-sezione σ del fibrato tangente TM.

Ebbene Φ risulta un'immersione di N su un intorno della diagonale $\Delta(M) \subset M \times M$. Tenendo poi conto che è possibile trovare una funzione differenziabile

$$\varepsilon : M \to \mathbb{R}$$

tale che $\varepsilon(x) > 0$ e

$$\{v_x \in T_x(M) \mid \|v_x\| < \varepsilon(x)\} \subseteq N_x \qquad \forall x \in M,$$

si può definire l'applicazione

$$r : TM \to N$$
$$(x, v_x) \mapsto \frac{\varepsilon(x) v_x}{\|v_x\| + 1}$$

che risulta anch'essa un'immersione. Allora

$$\Psi = \Phi \circ r : T(M) \to M \times M$$

immerge TM in un intorno della diagonale e soddisfa le seguenti proprietà

(a) $$pr_1 \cdot \Psi = \pi : TM \to M$$

(b) $$\Psi \cdot \sigma(x) = (x, x) \in \Delta(M)$$

Si può dimostrare il notevole teorema

(2.3) <u>TEOREMA</u>. -

Sia $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} M$ *un fibrato vettoriale differenziabile di dimensione* n *e* $\Psi : E \to M \times M$ *un'immersione* C^∞ *su un intorno di* $\Delta(M)$ *soddisfacente le condizioni (a) e (b) di sopra. Allora*

$$(s, p) \cong (\sigma, \pi)$$

Si costruisce dapprima il seguente $\mathbb{R}^n$-fibrato

$$M \xrightarrow{s'} G \xrightarrow{p'} M$$

dove $\quad G = \bigcup_{x\in M} \{ v \in T_{s(x)}E \mid v \text{ è tangente a } p^{-1}(x)\}$

$$s' : x \longmapsto 0_y \qquad\qquad y = s(x) \in E$$

$$p' : v \longmapsto x \qquad v \in T_yE\,,\; y = s(x).$$

Si fa vedere poi che

$$(s',p') \overset{\sim}{=} (s,p) \qquad \text{e} \qquad (s',p') \cong (\sigma,\pi)$$

da cui la conclusione.

(2.4) Quanto detto chiarisce la seguente definizione.

Sia M una <u>varietà topologica</u> di dimensione n. Un $\mathbb{R}^n$-fibrato $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} M$ si dice fibrato tangente ad M se esiste un'immersione

$$\Psi : E \to M \times M$$

che porti E su un intorno della diagonale e che soddisfi

a) $\qquad pr_1 \circ \Psi = p$

b) $\qquad \Psi \circ s(x) = (x,x)$

Si può far vedere (usando alcuni risultati di Kister [5]) che ogni varietà topologica ammette un fibrato tangente unico a meno di equivalenze.

Si osservi che se una varietà topologica M ammette una struttura differenziabile, allora il fibrato vettoriale tangente immerso tramite l'applicazione $\Psi : TM \to M \times M$ incontrato in (2.2), rappresenta l'$\mathbb{R}^n$-fibrato tangente di M, considerata come varietà topologica. Questo ci dice che se M ammette una struttura differenziabile, allora l'$\mathbb{R}^n$-fibrato tangente ammette una <u>struttura lineare.</u>

3. Microfibrati.-

(3.1) Siano X ed E due spazi topologici. Si definisce <u>microfibrato</u> su X una coppia di funzioni continue (s,p) che rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "id"'] & & X \end{tikzcd}$$

e verificanti inoltre le seguenti condizioni

$\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x ed un intorno aperto V di $s(x)$ con

$$s(U) \subseteq V \qquad\qquad p(V) \subseteq U$$

ed un omeomorfismo $\quad k : U \times \mathbb{R}^n \to V \quad$ tale che

1) $\quad p \cdot k = pr_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U \qquad\qquad (u,y) \longmapsto u$

2) $\quad k^{-1} \cdot s|U = \times\, 0 : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \qquad\qquad u \longmapsto (u,0)$

X si dirà lo <u>spazio base</u>, E lo <u>spazio totale</u>, $p^{-1}(x)$ la fibra su x, s l'<u>iniezione</u> e p la <u>proiezione</u> del microfibrato.
Infatti si vede facilmente che s è iniettiva, p è suriettiva e che la fibra $p^{-1}(x)$ <u>non</u> è necessariamente omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, ma contiene un sottospazio topologico omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$. Da qui il termine "microfi-

brato", cioé "fibrato in piccolo".

(3.2) Si osservi che solo gli intorni di $s(X)$ in E giocano un ruolo essenziale nella teoria. Per es. se E' è un intorno arbitrario di $s(X)$ in E, allora si vede che il microfibrato $X \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{p|E'} X$ è isomorfo al precedente.

(3.3) Sia $\xi = (s,p)$ un fibrato vettoriale di dimensione n su X, con E spazio totale, $p: E \to X$ la proiezione ed $s : X \to E$ la sezione nulla. Allora (s,p) costituisce anche un microfibrato, chiamato il microfibrato soggiacente a ξ, e sarà denotato con $|\xi|$.

(3.4) Sia M una varietà topologica e

$$\Delta : M \longrightarrow M \times M \qquad x \longmapsto (x,x)$$

l'applicazione diagonale, allora il diagramma

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{pr_1} M$$

costituisce un microfibrato, chiamato il microfibrato tangente ad M che indicheremo t_M.

Si dimostra facilmente (tenendo conto di quanto detto nel paragrafo 2) che vale

(3.5) TEOREMA. -

Sia M una varietà differenziabile paracompatta con fibrato tangente $\tau = (\sigma,\pi)$. Allora il microfibrato soggiacente $|\tau|$ è isomorfo al microfibrato tangente di M.

(3.6) COROLLARIO. -

Se la varietà M ammette una struttura differenziabile, allora esiste un fibrato vettoriale ξ su M tale che $\tau_M \cong |\xi|$.

Tale risultato si può invertire.Vale infatti il seguente notevole teorema dovuto a Milnor, Cairns, Hirsch :

(3.7) TEOREMA. -

Una varietà combinatoria M ammette una struttura differenziabile compatibile con quella combinatoria se e solo se il suo microfibrato tangente è equivalente ad un vettoriale.

(3.8) Concludiamo osservando che i concetti di fibrato e di microfibrato, pur essendo abbastanza distinti, sono strettamente legati dal seguente teorema

(3.9) TEOREMA (Kister)

Se X è un complesso localmente finito e di dimensione finita, allora ad ogni microfibrato su X è associato uno spazio fibrato, unico a meno di isomorfismi di microfibrati.

Cioè, dato il microfibrato di dimensione n

$$X \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} X$$

esiste un insieme aperto E_1, $s(X) \subseteq E_1 \subseteq E$, tale che

$$p \mid E_1 : E_1 \to X$$

è un fibrato con fibra $\mathbb{R}^n$ e gruppo strutturale il gruppo $H_0(n)$ di tutti gli omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che conservano l'origine.