INTRODUZIONE

Una varietà topologica M (paracompatta) è detta <u>triangolabile</u> se esiste un omeomorfismo

$$T : |K| \longrightarrow M$$

detto <u>triangolazione</u>, tra il sostegno di un complesso simpliciale localmente finito(*) K e la varietà stessa. Il poliedro $P = |K|$ si può pensare sottoinsieme di qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^N$. Un'applicazione

$$f : P \to \mathbb{R}^m$$

è detta <u>lineare a tratti</u> (o <u>PL</u>=piecewise linear) se esiste una decomposizione $\{\Delta_\alpha^r\}(\alpha \in \Lambda,\ 0 \leq r \leq m)$ di K per cui

$$f\,|\Delta_\alpha^r : \Delta_\alpha^r \to \mathbb{R}^m$$

è un'applicazione <u>affine</u> per ogni simplesso $\Delta_\alpha^r \in K^{(**)}$. Un atlante di M $\Phi = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ è detto PL se ogni omeomorfismo

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

è PL per la struttura lineare canonica di $\mathbb{R}^m$. Una <u>PL-varietà</u> è una coppia (M,Φ) dove Φ è un atlante PL massimale per M. Si dice anche che Φ è una PL-struttura per M.

Ogni PL-varietà (M,ϕ) ha una triangolazione

$$T : P \to M$$

tale che ogni applicazione seguente è PL

$$T^{-1} \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \to P$$

(*) Cioé in ogni vertice concorre un numero finito di simplessi (potendo essere il complesso anche infinito).

(**) Cioé se a_i sono i vertici di Δ_α^r e $x = \sum_i t_i a_i \in \Delta_\alpha^r$ con $\sum_i t_i = 1$, allora $f(x) = \sum_i t_i f(a_i)$.

Una varietà PL con una triangolazione fissata, compatibile con la struttura PL, è detta combinatoria. Da quanto procede segue che ogni varietà PL ammette almeno una struttura combinatoria, la quale in generale non è unica; ogni varietà combinatoria poi induce una struttura PL. Perciò le varietà PL e combinatorie spesso vengono confuse tra loro. Il loro studio forma l'oggetto della topologia combinatoria.

Si può considerare la categoria $\mathcal{PL}$ i cui oggetti sono le varietà PL e i morfismi le applicazioni PL. L'equivalenza nella categoria $\mathcal{PL}$ è detta PL-isomorfismo.

Intuitivamente una varietà PL è una varietà di dimensione m con una classe d'equivalenza di triangolazioni. Storicamente sono state formulate le seguenti congetture:

1) Congettura della triangolazione: Ogni m-varietà topologica ammette una struttura PL, o più in generale una triangolazione.
2) Hauptvermutung per le varietà: Due PL-varietà qualunque omeomorfe sono PL-equivalenti.

Si è dimostrato (Poincaré, Rado, Papakyriakopoulos, Moise) che le due congetture sono vere per $m \leq 3$. Invece R.C.Kirby e L.C. Siebenmann [4] hanno costruito esempi in cui le due congetture sono false per $m \geq 4$.

Se M è invece una varietà differenziabile, la congettura 1) è vera. Più precisamente Cairn [1] ha dimostrato che ogni varietà differenziabile può essere triangolata, anzi Whitehead [14] ha provato l'esistenza (e l'unicità a meno di isomorfismi PL) di una triangolazione differenziabile compatibile con la struttura differenziabile. Cioé su M esiste una triangolazione

$$T : |K| \to M$$

tale che per ogni simplesso $\Delta \in K$, l'applicazione

$$T \mid \Delta : \Delta \to M$$

è un diffeomorfismo con l'immagine rispetto alla struttura differenziabile di M.

Sorge allora spontaneo il problema inverso: data una varietà combinatoria M, è possibile trovare su M una struttura differenziabile compatibile con la struttura PL, in breve uno "smussamento" (in inglese "smoothing")?

Munkres |11| ha dimostrato che ci sono ostruzioni all'esistenza di una struttura differenziabile su una varietà M combinatoria e queste sono classi di coomologia $H^i(M,\Gamma^{i-1})$ dove $i = 1,\dots, m = \dim M$ e Γ^h è il gruppo dei diffeomorfismi della sfera S^{h-1} modulo il sottogruppo invariante dei diffeomorfismi che si estendono a diffeomorfismi del disco D^h.

Ricordiamo che i gruppi Γ^h sono abeliani finiti $\forall h$ e $\Gamma^h = 0$ per $h = 1,2,\dots,6$. (Invece per es. $\Gamma^7 \cong \mathbb{Z}_{28}$, $\Gamma^8 \cong \mathbb{Z}_2$).

La teoria dello smussamento ha come oggetto il problema di studiare l'esistenza di smussamenti di varietà PL e di classificarli.

Se indichiamo con $\mathcal{Diff}$ la categoria delle varietà differenziabili e con Top la categoria delle varietà topologiche, le situazioni che si presentano possono essere illustrate schematicamente dal seguente diagramma

$$\mathcal{Diff} \xrightarrow{W} PL \xrightarrow{F} Top$$

dove F è il funtore dimenticante e W il funtore di Whithead che ad una data varietà differenziabile associa la varietà PL avente lo stesso sostegno e la struttura PL assicurataci dal teorema di Whithead.

Per ogni categoria si va allora alla ricerca di insiemi completi di invarianti che caratterizzino le classi d'equivalenza di varietà. Spesso la difficoltà essensiale nel passaggio da una categoria all'altra risiede nel tradurre adeguatamente i concetti propri di una categoria in concetti significativi anche per l'altra. Un esempio di ciò è il concetto di microfibrato introdotto da Milnor (1961), indispensabile nella teoria dello smussamento.(*)

In questi appunti, che espongono risultati recenti di N. Teleman [12], si affrontano gli aspetti analitici delle varietà PL in una nuova visione diversa da quella seguita da Munkres, Hirsch, Lashof, Rothenberg. Infatti estendendo la nozione di metrica riemanniana su varietà combinatorie, si dimostra che le metriche così introdotte definiscono una generalizzazione del concetto di smussamento, caratterizzando nello stesso tempo quali delle tali metriche inducono uno smussamento nel senso usuale. Cioè si dimostra che su una varietà combinatoria M gli smussamenti sono in corrispondenza biunivoca con le metriche riemanniane generalizzate a "densità di volume costante" su M.

La presente trattazione può essere considerata anche un'introduzione "geometrica" ai problemi dello smussamento. Infatti si dà anche una realizzazione geometrica dello spazio $PL(m)/O(m)$ che gioca un ruolo fondamentale nella teoria ormai classica dello smussamento. Esso risulta fibra del fibrato

$$\Gamma(M) = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x$$

dove Γ_x è lo spazio topologico di tutte le metriche "riemanniane normalizzate" in x.

Allora la varietà combinatoria M ammette una struttura differenziabile se e soltanto se esiste una sezione globale continua di $\Gamma(M)$. Ogni sezione continua in $\Gamma(M)$ definisce uno smussamento.

(*) Cfr. l'Appendice.