INTRODUZIONE

Una varietà topologica M (paracompatta) è detta <u>triangolabile</u> se esiste un omeomorfismo

$$T : |K| \longrightarrow M$$

detto <u>triangolazione</u>, tra il sostegno di un complesso simpliciale localmente finito[(*)] K e la varietà stessa. Il poliedro $P = |K|$ si può pensare sottoinsieme di qualche spazio euclideo $\mathbb{R}^N$. Un'applicazione

$$f : P \to \mathbb{R}^m$$

è detta <u>lineare a tratti</u> (o <u>PL</u>=piecewise linear) se esiste una decomposizione $\{\Delta_\alpha^r\}(\alpha \in \Lambda,\ 0 \leq r \leq m)$ di K per cui

$$f\,|\Delta_\alpha^r : \Delta_\alpha^r \to \mathbb{R}^m$$

è un'applicazione <u>affine</u> per ogni simplesso $\Delta_\alpha^r \in K$[(**)]. Un atlante di M $\Phi = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ è detto PL se ogni omeomorfismo

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

è PL per la struttura lineare canonica di $\mathbb{R}^m$. Una <u>PL-varietà</u> è una coppia (M,Φ) dove Φ è un atlante PL massimale per M. Si dice anche che Φ è una PL-struttura per M.

Ogni PL-varietà (M,ϕ) ha una triangolazione

$$T : P \to M$$

tale che ogni applicazione seguente è PL

$$T^{-1} \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \to P$$

(*) Cioé in ogni vertice concorre un numero finito di simplessi (potendo essere il complesso anche infinito).

(**) Cioé se a_i sono i vertici di Δ_α^r e $x = \sum_i t_i a_i \in \Delta_\alpha^r$ con $\sum_i t_i = 1$, allora $f(x) = \sum_i t_i f(a_i)$.

Una varietà PL con una triangolazione fissata, compatibile con la struttura PL, è detta combinatoria. Da quanto procede segue che ogni varietà PL ammette almeno una struttura combinatoria, la quale in generale non è unica; ogni varietà combinatoria poi induce una struttura PL. Perciò le varietà PL e combinatorie spesso vengono confuse tra loro. Il loro studio forma l'oggetto della topologia combinatoria.

Si può considerare la categoria $\mathcal{PL}$ i cui oggetti sono le varietà PL e i morfismi le applicazioni PL. L'equivalenza nella categoria $\mathcal{PL}$ è detta PL-isomorfismo.

Intuitivamente una varietà PL è una varietà di dimensione m con una classe d'equivalenza di triangolazioni. Storicamente sono state formulate le seguenti congetture:

1) Congettura della triangolazione:Ogni m-varietà topologica ammette una struttura PL, o più in generale una triangolazione.
2) Hauptvermutung per le varietà:Due PL-varietà qualunque omeomorfe sono PL-equivalenti.

Si è dimostrato (Poincaré, Rado, Papakyriakopoulos, Moise) che le due congetture sono vere per $m \leq 3$. Invece R.C.Kirby e L.C. Siebenmann [4] hanno costruito esempi in cui le due congetture sono false per $m \geq 4$.

Se M è invece una varietà differenziabile,la congettura 1) è vera. Più precisamente Cairn [1] ha dimostrato che ogni varietà differenziabile può essere triangolata, anzi Whitehead [14] ha provato l'esistenza (e l'unicità a meno di isomorfismi PL) di una triangolazione differenziabile compatibile con la struttura differenziabile. Cioé su M esiste una triangolazione

$$T : |K| \to M$$

tale che per ogni simplesso $\Delta \in K$, l'applicazione

$$T \mid \Delta : \Delta \to M$$

è un diffeomorfismo con l'immagine rispetto alla struttura differenziabile di M.

Sorge allora spontaneo il problema inverso: data una varietà combinatoria M, è possibile trovare su M una struttura differenziabile compatibile con la struttura PL, in breve uno "smussamento" (in inglese "smoothing")?

Munkres |11| ha dimostrato che ci sono ostruzioni all'esistenza di una struttura differenziabile su una varietà M combinatoria e queste sono classi di coomologia $H^i(M,\Gamma^{i-1})$ dove $i = 1,\dots, m = \dim M$ e Γ^h è il gruppo dei diffeomorfismi della sfera S^{h-1} modulo il sottogruppo invariante dei diffeomorfismi che si estendono a diffeomorfismi del disco D^h.

Ricordiamo che i gruppi Γ^h sono abeliani finiti $\forall h$ e $\Gamma^h = 0$ per $h = 1,2,\dots,6$. (Invece per es. $\Gamma^7 \cong \mathbb{Z}_{28}$, $\Gamma^8 \cong \mathbb{Z}_2$).

La teoria dello smussamento ha come oggetto il problema di studiare l'esistenza di smussamenti di varietà PL e di classificarli.

Se indichiamo con $\mathcal{Diff}$ la categoria delle varietà differenziabili e con $\mathcal{Top}$ la categoria delle varietà topologiche, le situazioni che si presentano possono essere illustrate schematicamente dal seguente diagramma

$$\mathcal{Diff} \xrightarrow{W} \mathcal{PL} \xrightarrow{F} \mathcal{Top}$$

dove F è il funtore dimenticante e W il funtore di Whithead che ad una data varietà differenziabile associa la varietà PL avente lo stesso sostegno e la struttura PL assicurataci dal teorema di Whithead.

Per ogni categoria si va allora alla ricerca di insiemi completi di invarianti che caratterizzino le classi d'equivalenza di varietà. Spesso la difficoltà essensiale nel passaggio da una categoria all'altra risiede nel tradurre adeguatamente i concetti propri di una categoria in concetti significativi anche per l'altra. Un esempio di ciò è il concetto di microfibrato introdotto da Milnor (1961), indispensabile nella teoria dello smussamento.(*)

In questi appunti, che espongono risultati recenti di N. Teleman [12], si affrontano gli aspetti analitici delle varietà PL in una nuova visione diversa da quella seguita da Munkres, Hirsch, Lashof, Rothenberg. Infatti estendendo la nozione di metrica riemanniana su varietà combinatorie, si dimostra che le metriche così introdotte definiscono una generalizzazione del concetto di smussamento, caratterizzando nello stesso tempo quali delle tali metriche inducono uno smussamento nel senso usuale. Cioè si dimostra che su una varietà combinatoria M gli smussamenti sono in corrispondenza biunivoca con le metriche riemanniane generalizzate a "densità di volume costante" su M.

La presente trattazione può essere considerata anche un'introduzione "geometrica" ai problemi dello smussamento. Infatti si dà anche una realizzazione geometrica dello spazio $PL(m)/O(m)$ che gioca un ruolo fondamentale nella teoria ormai classica dello smussamento. Esso risulta fibra del fibrato

$$\Gamma(M) = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x$$

dove Γ_x è lo spazio topologico di tutte le metriche "riemanniane normalizzate" in x.

Allora la varietà combinatoria M ammette una struttura differenziabile se e soltanto se esiste una sezione globale continua di $\Gamma(M)$. Ogni sezione continua in $\Gamma(M)$ definisce uno smussamento.

(*) Cfr. l'Appendice.

C A P I T O L O I

UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LO SMUSSAMENTO.

1.PREMESSE

(1.1) Sia M una PL-varietà di dimensione m e

$$K = \{\Delta^r_\alpha\} \qquad \alpha \in \Lambda \qquad 0 \leq r \leq m \qquad r = \dim \Delta^r_\alpha$$

il complesso simpliciale associato ad una triangolazione di M. Nel seguito identificheremo M con il suo schema combinatorio K che pensiamo realizzato in modo euclideo in $\mathbb{R}^N$ (anche se ciò non è necessario).

Sia inoltre Γ una struttura combinatoria riemanniana di classe C° su M: cioé ad ogni simplesso massimale (chiuso) $\sigma = \Delta^m_\alpha$ è associata una struttura riemanniana continua Γ_σ tale che

$$\Gamma_\sigma | \sigma \cap \tau = \Gamma_\tau | \sigma \cap \tau$$

per ogni coppia σ , τ di simplessi "vicini" (cioé tali che $\sigma \cap \tau$ sia un $(m-1)$-simplesso di K). Si dice anche che la struttura riemanniana è C°-compatibile.

Se $x \in |K| = M$ allora definiamo

$$\Lambda(x) = \{\alpha \in \Lambda \mid x \in \Delta^r_\alpha \ , \quad 0 \leq r \leq m\}$$

$$\Lambda'(x) = \{\alpha \in \Lambda \mid x \in \Delta^r_\alpha \ , \quad r = m\}$$

Ora Δ^r_α è immerso in $\mathbb{R}^N$, quindi ha una struttura differenziabile indotta da quella di $\mathbb{R}^N$; ha senso quindi considerare lo spazio tangente $T_x(\Delta^r_\alpha)$ a Δ^r_α nel punto x.

Consideriamo ora cammini:

$$\lambda : [0,1] \to \Delta^r_\alpha$$

di classe C^1 uscenti da x e definiamo

$$V^r_\alpha(x,M) = \{v \mid v = \dot{\lambda}(0) \in T_x(\Delta^r_\alpha)\ , \qquad \lambda(0) = x\}$$

La struttura riemanniana in M definisce una metrica piatta euclidea su $V^r(x,M)$, che è detto <u>angolo solido tangente</u> di Δ^r_α in x. Per definizione $\dim V^r_\alpha(x,M) = r$.

Indicata con $S^{r-1}_{\alpha,x}$ la sfera unitaria di centro l'origine di $T_x(\Delta^r_\alpha)$, consideriamo i "triangoli sferici"

$$\tau^{r-1}_\alpha(x,M) = V^r_\alpha(x,M) \cap S^{r-1}_{\alpha,x} \qquad \alpha \in \Lambda(x)\ .$$

Le relazioni d'incidenza tra i Δ^r_α $(\alpha \in \Lambda(x))$ determinano relazioni d'incidenza tra i $V^r_\alpha(x,M)$; queste determinano relazioni d'incidenza tra i triangoli sferici. Possiamo allora considerare i complessi seguenti (con le relazioni d'incidenza indotte):

$$V(x,M) = \{V^r_\alpha(x,M) \mid \alpha \in \Lambda(x),\ 1 \le r \le m\}$$

$$\Sigma(x,M) = \{\tau^{r-1}_\alpha \mid \alpha \in \Lambda(x)\ , \quad 1 \le r \le m\}$$

Allora

$$\Sigma(x,M) \subset V(x,M).$$

Chiamiamo poi <u>misura dell'angolo</u> $V^m_\alpha(x,M)$ e la indichiamo $|V^m_\alpha(x,M)|_m$, la misura su $S^{m-1}_{\alpha,x}$ di $\tau^{m-1}_\alpha(x,M)$, che dipende dalla metrica nel vertice x.

La somma

$$\Omega(x,M) = \sum_{\alpha\in\Lambda'(x)} |V^m_\alpha(x,M)|_m$$

è detta densità di volume di Γ in x. La varietà triangolata M è detta a densità di volume costante se

$$\forall x \in M \qquad \Omega(x,M) = |S^{m-1}|_{m-1}$$

Si osservi che la densità di volume è certamente costante in ogni punto che non appartiene allo scheletro (m-2)-dimensionale.

(1.2) Esempio.-

Consideriamo la varietà bidimensionale tetraedro regolare con la metrica indotta da quella di $\mathbb{R}^3$. Esso non ha densità di volume costante; nei vertici si ha infatti

$$\Omega(x,M) = 3 \frac{\pi}{3} = \pi \neq 2\pi = |S^1|_1 .$$

Ma è possibile modificare la metrica data in modo che essa diventi a densità di volume costante. Nel caso particolare basta che la nuova metrica raddoppi gli angoli.

(1.3) Osservazione.-

In generale si vuole che un angolo α diventi β, cioè $\cos\alpha = a$ diventi $\cos\beta = b$.

Si deve trovare un nuovo prodotto scalare (h_{ij}) tale che

$$\frac{h_{ij} \; v^i w^j}{\sqrt{h_{ij} v^i v^j} \sqrt{h_{ij} w^i w^j}} = \frac{b}{a} \frac{g_{ij} \; v^i \; w^j}{\sqrt{g_{ij} \; v^i \; w^j} \sqrt{g_{ij} \; w^i w^j}} \qquad a \neq 0$$

Conoscendo i coefficienti (g_{ij}) ed applicando il principio d'identità dei polinomi si ricavano i coefficienti (h_{ij}).

In particolare se vogliamo $\beta = 2\alpha$ e quindi $\cos\beta = 2\cos^2\alpha - 1$ si ha $b = 2a^2 - 1$.

(1.4) Supponiamo d'ora in avanti che M sia a densità di volume costante. Sia $x_0 \in M$ un punto di M che possiamo sempre supporre essere un vertice; infatti, se non lo è, è sempre possibile, tramite una suddivisione, far diventare x_0 un vertice della decomposizione. E la metrica indotta sulla nuova suddivisione ha ancora densità di volume costante.

Inoltre poiché dobbiamo verificare proprietà locali, possiamo limitare le nostre considerazioni alla stella $St(x_0,M)$ che supponiamo abbia vertici $x_0, v_1, \dots, v_n$. Ora $St(x_0,M) \subset V(x_0,M)$ e ogni angolo $V^r_\alpha(x_0,M) \subset V(x_0,M)$ ha una struttura affine ben determinata; indichiamo con S_i il vettore $\overrightarrow{x_0 v_i}$ $(i=1,2,\dots n)$.

Se $v_i \in \Delta^r_\alpha \subset St(x_0,St)$ si considera su Δ^r_α il campo $\bar{X}_i$ di vettori paralleli con X_i, che viene esteso a $V^r_\alpha(x_0,M)$ Δ^r_α. La metrica riemanniana Γ^r_α è determinata dai prodotti scalari

$$\langle \bar{X}_i, \bar{X}_j \rangle_\xi \qquad \xi \in V^r_\alpha$$

(1.5) LEMMA. -

Con le stesse ipotesi e notazioni si costruisca su $V(x_0,M)$ *una metrica riemanniana costante* $\tilde{\Gamma}_{x_0}(M) = \{\tilde{\Gamma}^r_\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda(x_0)$, *mediante il seguente prodotto scalare*

$$\langle \bar{X}_i, \bar{X}_j \rangle_\xi = \langle X_i, X_j \rangle_{x_0} \qquad \xi \in V(x_0,M)$$

Allora $\tilde{\Gamma}_{x_0}(M)$ *ha densità di volume costante.*

Dim.-

La proprietà $|S^{m-1}|_{m-1} = \omega(\xi, V(x_0,M))$ per $\xi \in V(x_0,M)$ fa intervenire solo il prodotto scalare $\widetilde{< , >}_\xi$. Considerata la seguente omotopia

$$\widetilde{<\bar{X}_i,\bar{X}_j>}_{t,\xi} = <\bar{X}_i,\bar{X}_j>_{(1-t)x_o+t\xi} \qquad 0 \le t \le 1$$

abbiamo

$$\lim_{t\searrow o} \widetilde{< , >}_{t,\xi} = <\bar{X}_i,X_j>_{x_o} = \widetilde{< , >}_\xi .$$

Ora $\Omega(\xi,V(x_o,M))_{\widetilde{< , >}_{t,\xi}}$ è una funzione continua della variabile t, e quindi

$$\Omega(\xi,V(x_o,M))_{\widetilde{< , >}_\xi} = \Omega(\xi,V(x_o,M))_{\lim\limits_{t\searrow o} \widetilde{< , >}_{t,\xi}} =$$

$$= \lim_{t\searrow o} \Omega(\xi,V(x_o,M))_{< , >_{(1-t)x_o+t\xi}} = \lim_{t\searrow o} |S^{m-1}| = |S^{m-1}|$$

che prova il lemma. $\lrcorner$

(1.6) <u>LEMMA</u>. -

Sia $V(x_o,M)$ dotato della metrica riemanniana $\tilde{\Gamma}_{x_o}(M)$ e sia $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{x_o}(\Sigma(x_o,M))$ la metrica indotta su $\Sigma(x_o,M)$. Allora $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{x_o}(\Sigma(x_o,M))$ ha densità di volume costante.

<u>Dim</u>.-

Sia $\xi \in \Sigma(x_o,M)$ e $V^r_\alpha(x_o,M)$ un angolo solido che contiene ξ, allora

$$V^r_\alpha(\xi,V(x_o,M)) = V^{r-1}_\alpha(\xi,\tau^{r-1}_\alpha(x_o,M)) \oplus \mathbb{R}\,\xi$$

dove $\oplus$ denota la decomposizione ortogonale (si osservi che il raggio che contiene ξ è ortogonale alla sfera $S_\alpha^{r-1}(x_o,M)$).

Da questa decomposizione si deduce

$$V_\alpha^m(\xi,V(x_o,M)) = \frac{|V_\alpha^{m-1}(\xi, \Sigma(x_o,M))|}{|S^{m-2}|} |S^{m-1}|$$

Inoltre

$$\Omega(\xi,\Sigma(x_o,M)) = \sum_{\alpha\in\Lambda'(x_o)} |V_\alpha^{m-1}(\xi,\Sigma(x_o,M))| =$$

$$= \frac{|S^{m-2}|}{|S^{m-1}|} \sum_{\alpha\in\Lambda'(x_o)} | V_\alpha^m (\xi,V(x_o,M)) | = \frac{|S^{m-2}|}{|S^{m-1}|} |S^{m-1}| = |S^{m-2}|$$

tenendo conto anche del lemma precedente. $\rfloor$

2. IL LEMMA PRINCIPALE .

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente lemma fondamentale per il seguito, dove si è indicato con $\mathbb{E}^m$ lo spazio $\mathbb{R}^m$ dotato della metrica euclidea ordinaria.

(2.1) LEMMA. -

Sia M una PL-varietà di dimensione m e Γ una metrica riemanniana su M di classe C^0 a densità di volume costante. Allora $\forall x_o \in M$ esiste un PL-omeomorfismo

$$\Phi(x_o,M) : V(x_o,M) \to \mathbb{E}^m \qquad \Phi(x_o,M)(x_o) = 0$$

verificante le seguenti proprietà

(*i*) $\phi(x_o,M)|\,V_\alpha^r(x_o,M)$ *con* $\alpha\in\Lambda(x_o)$ *è un'isometria sull'immagine;*

(*ii*) $\phi(x_o,M)$ *è unico a meno di isometrie di* $\mathbb{E}^m$;

(*iii*) $\phi(x_o,M)$ *varia in modo continuo quando* x_o *percorre un suo intorno stellato.*

(2.2) Osservazioni. -

La proprietà (i) dice che se $\phi(x_o,M)$ esiste, allora esso si può costruire come segue. Si parte da un angolo solido tangente massimale $V_\alpha^m(x_o,M)$ che rappresentiamo isometricamente in $\mathbb{E}^m$ in modo tale che il vertice x_o di $V^m(x_o,M)$ vada in $0\in\mathbb{E}^m$. Chiamiamo tale isometria $\phi_1(x_o,M)$. Consideriamo ora un altro angolo solido tangente massimale di $V(x_o,M)$ adiacente al primo, se $\phi(x_o,M)$ esiste, allora $\phi_1(x_o,M)$ può essere esteso al nuovo angolo in modo unico tale da verificare (i) e così via.

Dim. del lemma. -

Procediamo per induzione sulla dimensione m di M. Per $m = 2$ il teorema è chiaramente vero. Infatti per ipotesi è possibile "sviluppare" sul piano (in modo isometrico) le piramidi $V^2(x_o,M)$ e poi si procede come indicato nell'osservazione precedente. Supponiamo quindi vero il teorema per $m-1$ e dimostriamolo per m.

Supponiamo allora di aver costruito $\phi(x_o,M)$ soddisfacente le proprietà i) iv) e sia

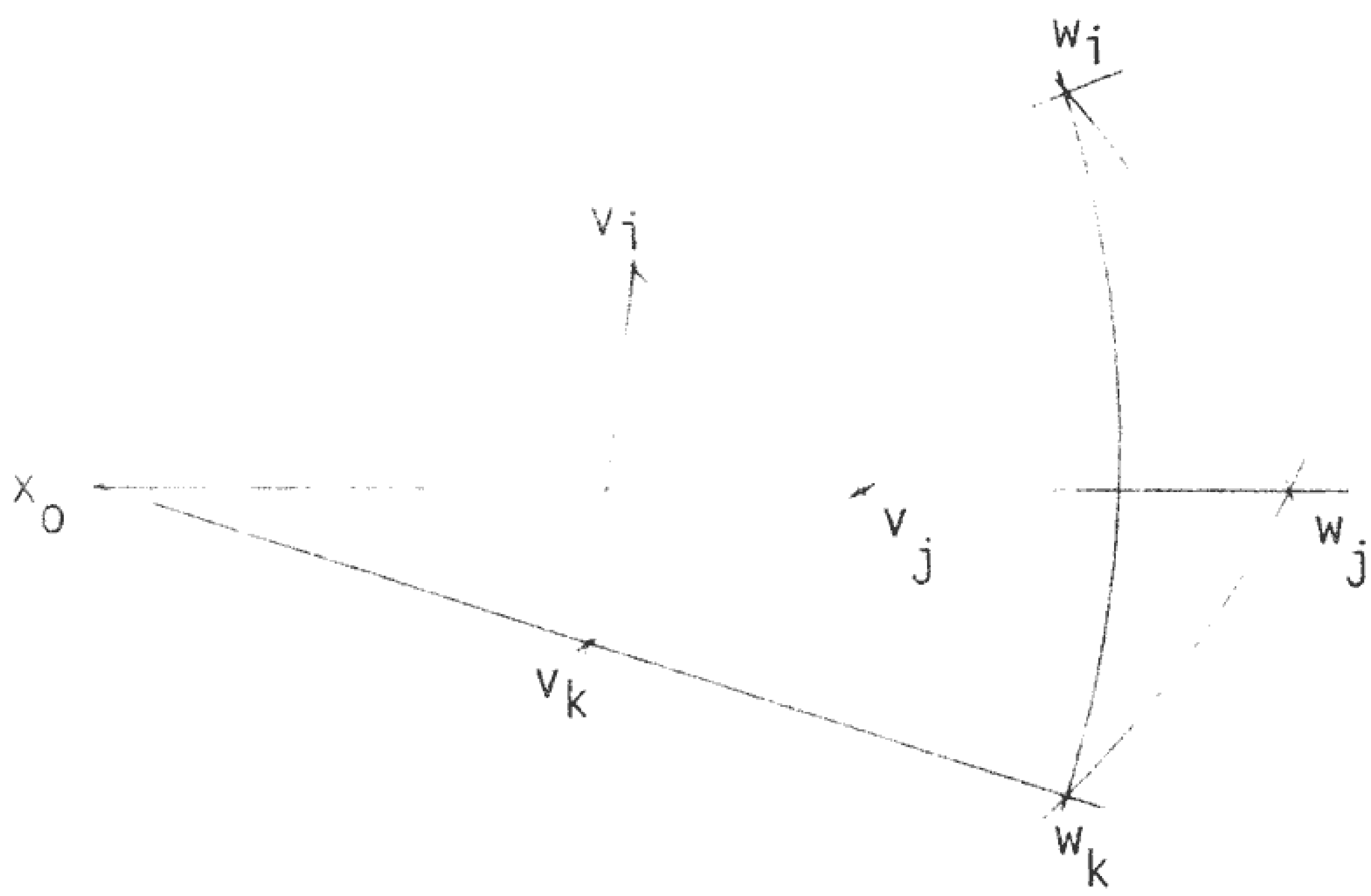
$$\Psi(x_o,M)\,:\,\Sigma(x_o,M)\to S^{m-1}$$

la restrizione di $\phi(x_o,M)$ a $\Sigma(x_o,M)$.

Indichiamo con i') - iv') le corrispondenti affermazioni di i)-iv) del teorema in cui abbiamo cambiato ϕ con Ψ, V con τ ed **E** con S. Allora $\Psi(x_o,M)$ soddisfa i')-iv').

Inversamente supponiamo di avere un'appl. $\Psi(x_o,M)$ che soddisfi i')-iv'). Allora esiste una ed una sola possibilità di costruire $\phi(x_o,M)$ in modo tale che soddisfi i)-iv) e inoltre valga $\Psi = \phi|\Sigma$.
Facciamo vedere ora come possa essere costruita $\Psi(x_o,M)$

Sia $w_i (1 \leq i \leq n)$ il vertice di $\Sigma(x_o,M)$ collineare con x_o e x_i dove $x_o, x_1,\ldots,x_n$ sono i vertici della stella $St(x_o,M)$.



Per prima proveremo che si può costruire $\Psi(x_o,M)$ su $St(w_i,\Sigma)$, dopo faremo vedere che $\Psi(x_o,M)$ può essere estesa su tutto $\Sigma(x_o,M)$. Ora $\Sigma(x_o,M)$ è una varietà combinatoria di dimensione $m-1$, sulla quale per il lemma (1.6) si può considerare la metrica $\tilde{\tilde{\Gamma}}(\Sigma(x_o,M))$ di densità di volume costante. Possiamo allora applicare a $\Sigma(x_o,M)$ l'ipotesi induttiva. Dunque esiste un PL-omeomorfismo

$$\phi_o(w_i,\Sigma(x_o,M)) : V(w_i,\Sigma(x_o,M)) \to \mathbb{E}^{m-1}$$

che soddisfa i)-iv).

Sia $\bar{w}_i$ un punto di S^{m-1} e consideriamo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
V(w_i,\Sigma(x_o,M)) \arrow[r, "\phi_o(w_i,\Sigma(x_o,M)"] \arrow[d, "\exp_{w_i}"'] & E^{m-1} \arrow[d, "\exp_{\bar{w}_i}"] \\
St(w_i,\Sigma(x_o,M)) \arrow[r, "\Psi_{w_i}(x_o,M)"] & S^{m-1}
\end{tikzcd}$$

dove $\exp_{\bar{w}_i}$ è come al solito l'applicazione che associa ad un vettore tangente $v \in T_{\bar{w}_i}(S^{m-1}) \cong E^{m-1}$ il punto di S^{m-1} a distanza $\|v\|$ da $\bar{w}_i$ sulla geodetica uscente da $\bar{w}_i$ nella direzione v; analogamente per $\exp_{w_i}$ considerando la metrica $\tilde{\tilde{r}}(\Sigma(x_o,M)$. L'applicazione $\Psi_{w_i}(x_o,M)$ è quella che rende commutativo il diagramma.

Si osservi che ogni 1-simplesso $[w_i,w_j] \subset St(w_i,\Sigma(x_o,M))$ è un arco di cerchio massimo (essendo $\Sigma(x_o,M) \subset S^{m-1}$). L'appl. $\Psi_{w_i}(x_o,M)$ ha le seguenti proprietà:

1) porta ogni 1-simplesso $[w_i,w_j]$ in un arco congruente di cerchio massimo in S^{m-1},

2) conserva l'angolo tra ogni coppia di 1-simplessi $[w_i,w_j]$, $[w_i,w_k]$ appartenenti allo stesso 2-simplesso contenuto in $St(w_i,\Sigma(x_o,M))$;

3) è un omeomorfismo di un intorno di w_i sull'immagine. Inoltre l'applicazione $\Psi_{w_i}(x_o,M))$ soddisfa i')-ii').

Noi ora costruiremo $\Psi(x_o,M)$. Fissiamo un simplesso massimale $\tau^{m-1}_{\alpha_o} \in \Sigma(x_o,M)$ e scegliamo un'immersione isometrica:

$$\Psi_{\alpha_o}(x_o,M) : \tau^{m-1}_{\alpha_o} \to S^{m-1} .$$

Lo scopo è quello di estendere tale immersione a tutti i simplessi massimali di $\Sigma(x_o,M)$ e quindi a tutto $\Sigma(x_o,M)$.

Sia τ^{m-1}_{α} un qualsiasi simplesso massimale di $\Sigma(x_o,M)$. Esisterà allora almeno una catena (di simplessi massimali)

$$\gamma \equiv (\tau^{m-1}_{\alpha_o}, \tau^{m-1}_{\alpha_1}, \ldots, \tau^{m-1}_{\alpha_p} = \tau^{m-1}_{\alpha})$$

tale che $\forall i$, $0 \leq i \leq p-1$, $\dim(\tau^{m-1}_{\alpha_i} \cap \tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}}) = m-2.$

Si può allora costruire induttivamente partendo da ψ_{α_o} un'applicazione continua

$$\Psi_{\gamma} : \bigcup_{i=0}^{p} \tau^{m-1}_{\alpha_i} \to S^{m-1}$$

con le seguenti proprietà

(a) $\Psi_{\gamma} \mid \tau^{m-1}_{\alpha_o} = \Psi_{\alpha_o}(x_o,M)$

(b) $\Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_i}) \cap \Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}}) = \Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_i} \cap \tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}})$

(c) $\Psi_\gamma|\tau^{m-1}_{\alpha_i}$ $\quad 0 \leq i \leq p$ è un'immersione isometrica.

La condizone (b) può richiedere che si debba ancora suddividere $\Sigma(x_o,M)$ che supponiamo si possa fare.

Poniamo allora per definizione

$$\Psi(x_o,M) \mid \tau^{m-1}_\alpha = \Psi_\gamma|\tau^{m-1}_\alpha \ .$$

Rimane da far vedere che tale definizione è ben posta, non dipende cioé dalla scelta della catena congiungente τ^{m-1}_α con $\tau^{m-1}_{\alpha_o}$, una volta scelta l'immersione iniziale $\Psi_{\alpha_o}(x_o,M)$.

Innanzitutto notiamo che per l'ipotesi induttiva, dato un qualsiasi simplesso $\tau \in \Sigma(x_o,M)$ (di dimensione arbitraria) e una immersione isometrica $\Psi_\sigma : \sigma \to S^{m-1}$ di un qualsiasi simplesso massimale $\sigma \in St(\tau,\Sigma(x_o,M))$, allora esiste un'unica immersione

che $\quad \Psi : St(\tau,\Sigma(x_o,M)) \to S^{m-1}$

(i) estende Ψ_σ in modo continuo,

(ii) quando è ristretta ad un simplesso massimale di $St(\tau,\Sigma(x_o,M))$ è un'isometria.

Infatti Ψ è un'applicazione aperta sull'interno di $St(\tau,\Sigma(x_o,M))$.
Ritorniamo ora alla nostra questione.

Siano γ e γ' due catene congiungenti $\tau^{m-1}_{\alpha_o}$ e τ^{m-1}_α .

Poiché S^{m-1} è semplicemente connessa per $m \geq 3$, allora esiste una "omotopia" γ_j $(1 \leq j \leq N)$ che la collega, cioé una successione finita di catene γ_j

$$\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N = \gamma'$$

tale che $\forall j$, $1 \leq j \leq N-1$, le catene γ_j e γ_{j+1} sono della forma

$$\gamma_j \equiv (a,b,c) \qquad\qquad \gamma_{j+1} \equiv (a,b',c)$$

dove a,b,b',c sono catene e b,b' sono contenute in $St(\tau, \Sigma(x_o,M))$ per un (arbitrario) simplesso $\tau \in \Sigma(x_o,M)$.

Da queste considerazioni segue che $\Psi(x_o,M)$ è continua.

Infatti siano τ_α^{m-1} e τ_β^{m-1} due arbitrari simplessi con $\dim(\tau_o^{m-1}, \tau_\beta^{m-1}) = m-2$ e sia γ una catena congiungente $\tau_{\alpha_o}^{m-1}$ con τ_α^{m-1}. Allora $(\gamma, \tau_\beta^{m-1})$ è una catena congiungente $\tau_{\alpha_o}^{m-1}$ con τ_β^{m-1} e quindi può essere usata per definire $\Psi(x_o,M)$ su entrambi i simplessi τ_α^{m-1} e τ_β^{m-1}; dalla definizione di queste restrizioni segue che $\Psi(x_o,M)$ è continua su $\tau_\alpha^{m-1} \cap \tau_\beta^{m-1}$ e quindi è continua.

Come si diceva prima, l'ipotesi induttiva implica che $\Psi(x_o,M)$ è aperta. Inoltre $\Psi(x_o,M)\ (\Sigma(x_o,M))$ è chiuso ed aperto in S^{m-1} ma S^{m-1} è connesso per cui vale

$$\Psi(x_o,M)\ (\Sigma(x_o,M)) = S^{m-1}$$

Poiché $\Psi(x_o,M)$ è una isometria locale si ha la diseguaglianza stretta

$$\text{Mis}\left[\Psi(x_o,M)(\Sigma(x_o,M))\right] < \sum_{\tau_{\alpha_i}^{m-1} \in \Sigma(x_o,M)} \text{Mis}\left[\Psi(x_o,M)(\tau_{\alpha_i}^{m-1})\right]$$

se e solo se $\Psi(x_o,M)$ è non iniettiva. Ora il primo termine della diseguaglianza è $|S^{m-1}|$ poiché $\Psi(x_o,M)$ è suriettiva; ma anche il secondo termine della diseguaglianza è $|S^{m-1}|$ per l'ipotesi della metrica con densità di volume costante, per cui si conclude che $\Psi(x_o,M)$ è anche iniettiva.

Si conclude allora che $\Psi(x_o,M)$ è l'applicazione richiesta. $\lrcorner$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema che dà una condizione analitica necessaria e sufficiente per lo smussamento di varietà PL.

(2.3) TEOREMA DELLO SMUSSAMENTO. -

Se Γ è una metrica riemanniana di classe C^0 con densità di volume costante sulla PL-varietà M, allora Γ definisce una struttura differenziabile di classe C^1 su M, compatibile con la struttura combinatoria.

Dim.-

Sia $V(M) = \bigcup_{x\in M} V(x,M)$ (unione disgiunta) con la topologia naturale e consideriamo il diagramma

$$M \xrightarrow{s} V(M) \xrightarrow{p} M$$

dove le applicazioni sono così definite

$$s(x) = 0 \in V(x,M) \qquad\qquad p(V(x,M)) = x$$

Si vede subito che esso individua un microfibrato [1] equivalente al microfibrato tangente di M

(1) Cfr. §3 dell'Appendice.

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{pr_1} M$$

Basta far vedere che un intorno della sezione nulla di $V(M)$ è un intorno anche della sezione nulla di $M \times M$.

Si considerino infatti $M \times M$, con una triangolazione indotta dalla reticolazione di prodotto topologico, e $St((x,x),MxM)$ per $x \in M$. Ovviamente $St(x,x),MxM)$ è un intorno di (x,x) in M, ma anche un intorno di $(x,0)$ in $V(M)$ come si può vedere facilmente.

Infatti l'affermazione (i) del lemma ci permette di introdurre una struttura vettoriale sulla fibra di $V(M)$ e la (ii) ci assicura che tale struttura è ben definita. La proprietà (iii) esprime la banalità locale. Quindi il microfibrato tangente ammette una struttura vettoriale e per un teorema di Milnor [(2)] si conclude che M ammette una struttura differenziabile di classe C^1 compatibile con la struttura combinatoria.┘

(2.4) Osservazioni.-

Da quanto procede è chiaro che cosa debba intendersi per spazio tangente ad M in un suo punto x_o. Fissiamo la nostra attenzione al caso in cui x_o sia un vertice di M, gli altri casi essendo contenuti in questo dopo un'opportuna reticolazione.

Indichiamo con E_α^r lo spazio vettoriale di dimensione r che contiene V_α^r e limitiamoci al caso $r = m$, ponendo per semplicità $V_\alpha^m = V_\alpha$.

Sia

$$\phi(x_o,M) : V(x_o,M) \longrightarrow E^m$$

l'omeomorfismo del lemma (2.1) e

---

(2) Cfr. l'Appendice (3.7)

$$\phi_\alpha = \phi|_\alpha \; : V_\alpha \to \phi(V_\alpha) = W_\alpha \subset E^m$$

l'isometria indotta. Ora ϕ_α si estende ad un'isometria

$$\rho_\alpha : E_\alpha \to E.$$

Sia v_α un vettore (uscente da x_0 e) appartenente a V_α. Allora $\phi_\alpha(v_\alpha) = w_\alpha \in W_\alpha$ e chiamiamo

$$v_\beta = \rho_\beta^{-1}(w_\alpha)$$

che risulta unico.

Infatti se $\rho : E \to E$ è un'isometria risulta commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
 & E & \\
E_\alpha \arrow[uur, "\bar\rho_\alpha"] \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[rr, "\rho_{\alpha\beta}"'] & & E_\beta \arrow[uul, "\bar\rho_\beta"'] \arrow[ul, "\rho_\beta"']
\end{tikzcd}$$

e quindi

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_\beta^{-1} \circ \rho_\alpha = \bar\rho_{\alpha\beta}$$

essendo

$$v_\beta = \rho_{\alpha\beta}(v_\alpha)$$

L'insieme $\{v_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda(x_0)}$ di tutti i vettori corrispondenti nel modo sopra detto costituisce per <u>definizione</u> lo <u>spazio tangente</u> in x_0 alla PL-varietà M.

Concludiamo dicendo che cosa debba intendersi per <u>funzione differenziabile</u> $f : M \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in M$. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$f_\alpha = f|V_\alpha$ sia differenziabile per ogni α. Questo ha senso poiché su $V_\alpha \subset E_\alpha$ esiste una struttura differenziabile canonica. Diremo che f è differenziabile di x_0 se

$$v_\alpha f_\alpha = v_\beta f_\beta = v_\gamma f_\gamma = \ldots\ldots\ldots$$

dove $\quad v_\lambda = \rho_{\mu\lambda}(v_\mu)$ è considerato come derivazione su V .

CAPITOLO II

PROBLEMI DI SMUSSAMENTO. -

Alcuni Lemmi.-

(1.1) Sia

$$\phi : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$$

un PL-omeomorfismo. Allora esiste una triangolazione D di $\mathbb{R}^m$ e una T di $\mathbb{E}^m$ tale che ϕ sia simpliciale, si può inoltre modificare D e T in modo tale che le origini siano vertici delle due triangolazioni.

Consideriamo ora $St(0,D)$ e prolunghiamo radialmente da 0 tutti i simplessi della stella che contengono 0. Analogamente per $St(0,T)$. Si ottiene così una decomposizione $\bar{D}$ di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\bar{T}$ di $\mathbb{E}^m$) mediante "coni simpliciali" con vertici in 0.

L'applicazione $\phi \mid St(0,D)$ si estende linearmente, in modo unico, a tutto $\mathbb{R}^n$ e costituisce ancora un PL-omeomorfismo, che indichiamo $\bar{\phi}$.

Si vede facilmente che vale

(1.2) LEMMA.-

Siano $\phi_1,\phi_2 : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$ *due PL-omeomorfismi. Allora*

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 \Longleftrightarrow germ_0\, \phi_1 = germ_0\, \phi_2$$

cioé le applicazioni $\bar{\phi}_i$ dipendono solo da ciò che accade in un intorno di 0, come è ovvio trattandosi di coni.

Sia η la matrice in $\mathbb{E}^m$ e Γ_ϕ la matrice riemanniana su $\mathbb{R}^m$ indotta da ϕ, cioé

$$\Gamma_\phi = \phi^*(\eta) \qquad \phi^* : T^*(E^m) \to T^*(\mathbb{R}^m).$$

Allora

(1.3) LEMMA. -

La metrica Γ_ϕ è determinata dala sua restrizione in 0 ed ha densità di volume costante.

Dim.-

La prima affermazione discende dalfatto che Γ_ϕ è "costante" su ogni cono simpliciale della decomposizione. Inoltre Γ_ϕ ha densità di volume costante poiché da

$$\Gamma_\phi(v,w) = \eta(\phi(v), \phi(w))$$

segue $$|V_\alpha^m(0,\mathbb{R}^m)|_m^{\Gamma_\phi} = |V_\alpha^m \cap S_{\alpha,0}^{m-1}|_{S_{\alpha,0}^{m-1}}^{\Gamma_\phi} = |\phi(V_\alpha^m \cap S_{\alpha,0}^{m-1})|_{\phi(S_{\alpha,0}^{m-1})}^{\eta}$$

e quindi

$$\Omega(0,\mathbb{R}^m) = \sum_\alpha |V_\alpha^m(0,\mathbb{R}^m)|_m = |\phi(S_{\alpha,0}^{m-1})|_{\phi(S_{\alpha,0}^{m-1})} \quad \_| \quad .$$

Inversamente, se abbiamo una metrica riemanniana definita solo in $0 \in \mathbb{R}^m$, possiamo estenderla su tutto $\mathbb{R}^m$ come nel Lemma (1.5) del Cap. 1. Se questa metrica estesa ha densità di volume costante, diciamo che la metrica riemanniana iniziale in 0 è "normalizzata". Quindi una metrica riemanniana su M con densità di volume costante non è altro che un campo su M di metriche riemanniane normalizzate.

2. LO SPAZIO $\tilde{\Gamma}(M)$.-

Indichiamo con $\tilde{\Gamma}(m)$ l'insieme di tutte le metriche riemanniane normalizzate in $0 \in \mathbb{R}^m$ rispetto a tutte le possibili decomposizioni di $\mathbb{R}^m$ in coni simpliciali.

Introduciamo ora una topologia su $\tilde{\Gamma}(m)$.

Sia D una decomposizione di $\mathbb{R}^m$ in coni simplciali con vertici in 0. Per ogni cono simpliciale 1-dimensionale della decomposizione D, scegliamo un punto su esso, differente da 0. Siano $e_1,\dots,e_p$ questi punti che si posono considerare anche come estremi di vettori uscenti da 0.

Indichiamo con A l'insieme di tutte le coppie di indici (i,j) per cui e_i e e_j appartengono ad uno stesso 2-cono simpliciale della decomposizione. Allora una metrica normalizzata in 0 è determinata dalla matrice (simmetrica) a coefficienti reali

$$(\langle e_i, e_j\rangle) \qquad (i,j) \in A.$$

Se N è la cardinalità dell'insieme dei 2-coni simpliciali della decomposizione, ogni matrice del tipo precedente (e quindi ogni metrica riemanniana normalizzata in 0) può essere identificata ad un punto di $\mathbb{R}^N$.

Naturalmente

$$N \leq \binom{p}{2} + p$$

dove al secondo membro compare la dimensione dello spazio delle matrici simmetriche di ordine p.

Quindi, fissata una decomposizione D di $\mathbb{R}^m$, l'insieme $\Gamma(D)$ di tutte le metriche riemanniane in 0 riceve una topologia, quella indotta da $\mathbb{R}^N$ tramite l'applicazione $\Gamma(D) \to \mathbb{R}^N$ che associa ad ogni metrica in 0 il punto di $\mathbb{R}^N$ corrispondente alla matrice associata. Indichiamo ancora con $\Gamma(D)$ lo spazio topologico di sostegno $\Gamma(D)$. Sia D'

un raffinamento di D, allora $p' \geq p$ da cui $N' \geq N$ e quindi $\Gamma(D) \subset \Gamma(D')$.

Allora sull'insieme

$$\tilde{\Gamma}(m) = \lim_{\vec{D}} \Gamma(D)$$

possiamo introdurre la topologia debole, cioè $U \subset \tilde{\Gamma}(m)$ è per definizione aperto in $\tilde{\Gamma}(m)$ se e solo se $U \cap \Gamma(D)$ è aperto in $\Gamma(D)$ per ogni D.

3. LO SPAZIO $\Gamma(m)$.-

(3.1) Consideriamo ora l'insieme PL(m) dei germi dei PL-omeomorfismi

$$\phi(\mathbb{R}^m , 0) \to (\mathbb{E}^m, 0)$$

L'insieme Pl(m) può essere dotato di struttura di gruppo con l'usuale composizione tra applicazioni avendo identificato $\mathbb{E}^m$ con $\mathbb{R}^m$.

Indicato con O(m) il sostegno di PL(m) costituito dalle trasformazioni ortogonali di $\mathbb{E}^m$ si consideri

$$\Gamma(M) = PL(m)_{/O(m)} \cdot$$

Poiché O(m) in generale non è normale in PL(m), l'insieme quoziente in generale non è un gruppo.

Lo spazio $\Gamma(m)$ è fondamentale nella teoria dello smussamento. Intanto vale il seguente teorema che permette di identificare $\Gamma(m)$ con m prima introdotto.

(3.2) TEOREMA. -

Sia ϕ *il germe del PL-omeomorfismo*

$$\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{E}^m, 0)$$

Allora l'applicazione

$$\Psi : PL(m) \longrightarrow \tilde{\Gamma}(m) \qquad \phi \longmapsto \Gamma_\phi$$

si fattorizza tramite la corrispondenza biunivoca

$$\Theta \quad \Gamma(m) \to \tilde{\Gamma}(m).$$

Dim.-

Poiché una trasf. ortogonale di $\mathbb{E}^m$ non cambia la metrica di $\mathbb{E}^m$, si ha chiaramente

$$\begin{tikzcd} PL(m) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{\Gamma}(m) \\ & \Gamma(m) \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$

dove π è la proiezione canonica. Si vede facilmente che Θ è suriettiva. Infatti, considerata una metrica normalizzata γ in $0 \in \mathbb{R}^m$, per il lemma princiaple (2.1) del Cap. 1 esiste un PL-omeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{E}^m,0)$ tale che $\Gamma_\phi \equiv \gamma$.

Supponiamo ora che

$$\phi_1, \phi_2 : (\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{E}^m,0)$$

siano due PL-omeomorfismi tali che $\Gamma_{\phi_1} = \Gamma_{\phi_2}$. Allora sempre per il lemma prima ricordato si conclude che ϕ_1 e ϕ_2 differiscono per una trasformazione ortogonale. Ciò prova l'iniettività di Θ $\lrcorner$

(3.3) Sia M^m una PL-varietà. Per ogni punto $x \in M$ indichiamo con Γ_x lo spazio topologico di tutte le metriche riemanniane normalizzate in x.

Allora

$$\Gamma(M) = \bigcup_{x\in M} \Gamma_x$$

è lo spazio totale di un fibrato (localmente banale) su M con fibra $\Gamma(m)$.

Da quanto precede segue che

(3.4) PROPOSIZIONE.-

Ogni metrica riemanniana con densità di volume costante su M *è una sezione continua del fibrato* $\Gamma(M)$.

Da questa proposizione e dal lemma principale segue

(3.5) TEOREMA. -

La varietà combinatoria M *ammette una struttura differenziabile compatibile con la struttura combinatoria se e solo se esiste una sezione globale in* $\Gamma(M)$. *Ogni sezione continua in* $\Gamma(M)$ *definisce uno sumussamento.*

Dunque le ostruzioni a smussamenti su M si possono interpretare come ostruzioni alle sezioni del fibrato $E = (\Gamma(M), M, p)$ di fibra $\Gamma(m)$ (connessa per archi). Ora, come è noto, le ostruzioni si trovano nei gruppi di coomologia

$$H^i(M; \pi_{i-1}(\Gamma(m)))$$

della varietà M a coefficienti nel gruppo d'omotopia $(i-1)$-dimensionale della fibra.

4. LA RELAZIONE DI CONCORDANZA

(4.1) Si denoti con $S(M)$ l'insieme delle sezioni continue in $\Gamma(M)$ e quindi degli sumussamenti di M. Se $\alpha \in S(M)$, indichiamo con M_α la varietà differenziabile M con la struttura indotta da α.

In $S(M)$ esiste la relazione di equivalenza " $\overset{\sim}{\sim}$ " del diffeomorfismo

$$\alpha \overset{\sim}{\sim} \beta \iff M_\alpha \text{ diffeomorfa a } M_\beta$$

Ora vogliamo introdurre un'altra relazione di equivalenza, più adatta a classificare gli smussamenti.

Siano $\alpha, \beta \in S(M)$. Essi sono detti <u>concordanti</u> (nel senso di Milnor) in simboli $\alpha \sim \beta$, se esiste $\gamma \in S(MxI)$ tale che

$$\partial(MxI)_\gamma = M_\alpha \times 0 \cup M_\beta \times 1.$$

Si vede facilmente che la relazione di concordanza è una relazione di equivalenza. Si può inoltre dimostrare che

$$\alpha \sim \beta \implies \alpha \overset{\sim}{\sim} \beta$$

ma non è vero il viceversa ([3]).

Tenendo conto poi dei risultati del paragrafo precedente, è facile vedere che:

(4.2) <u>PROPOSIZIONE</u>. -

$\alpha \simeq \beta \iff \alpha \sim \beta$ *dove si è indicata con "* $\simeq$ *" l'usuale relazione d'omotopia di sezioni.*

<u>Dim.</u>

Infatti se $\alpha \simeq \beta : M \to \Gamma(M)$ esiste un'appl. continua

$$\gamma : M \times I \to \Gamma(M)$$

tale che

$$\gamma(x,0) = \alpha(x) \qquad\qquad \gamma(x,1) = \beta(x)$$

cioè esiste una $\gamma \in S(MxI)$ tale che

$$\gamma \mid (Mx0) = \alpha \qquad\qquad \gamma \mid (Mx1) = \beta$$

cioè α e β sono concordanti.

L'inverso è ovvio. $\lrcorner$

Indicando con $\mathcal{S}(M) = S(M)/\sim$ le classi di concordanza di $S(M)$, e con $[M,\Gamma(M)]$ le classi di omotopia delle applicazioni $M \to \Gamma(M)$ (i cui livelli sono sezioni) dalla proposizione precedente segue

(4.3) <u>COROLLARIO.</u> -

Gli insiemi $\mathcal{S}(M)$ *e* $[M,\Gamma(M)]$ *sono in corrispondenza biunivoca, in simboli*

$$\mathcal{S}(M) \cong [M,\Gamma(M)]$$

(4.4) In particolare, se $M \cong S^m$ si ha

$$\mathcal{S}(S^m) \cong [S^m,\Gamma(M)] = \pi_m(\Gamma(M)).$$

Ora per $m \leq 3$, Munkres e Smale hanno dimostrato che tutti gli smussamenti di S^m sono concordanti, lo stesso ha dimostrato Cerf per $m = 4$. Quindi

$$\pi_m(\Gamma(M)) = 0 \qquad\qquad m \leq 4.$$

APPENDICE

Cenni sul fibrato tangente ad una varietà topologica e sui microfibrati (*)

Come è noto ([9]), dal punto di vista intuitivo, una varietà differenziabile può essere caratterizzata come una varietà topologica tale che per ogni punto esista uno spazio tangente che varii con continuità al variare del punto. Il concetto di spazio tangente è strettamente legato a quello di struttura differenziabile: infatti esso coinvolge la nozione di derivata, operazione che perde significato su una varietà dotata di una struttura topologica.

Nell'intento di dare per una varietà topologica un concetto analogo a quello di fibrato tangente per le varietà differenziabili, Milnor nel 1962 ([9],[10]) ha introdotto la nozione di "microfibrato" e quindi di "microfibrato tangente" , che ha portato poi a quello di fibrato tangente ad una varietà topologica.

La nozione di microfibrato è essenzialmente ottenuta da quella di fibrato tangente restringendo l'attenzione ad un intorno della 0-sezione ed abbandonando ogni condizione di "linearità" cosicché si usano solo condizioni topologiche; anzi la fibra su di un punto sarà un "germe" di uno spazio topologico. Il termine "microfibrato" è dovuto ad A. Shapiro. L'uso dei microfibrati ha trovato larga applicazione nei problemi di smussamento.

Premesse.-

(1.1) Siano X ed E due spazi topologici. Si definisce $\mathbb{R}^n$-fibrato su X una coppia di funzioni continue (s,p) che rendono commutativo il

(*) Nell'esposizione seguiremo l'articolo di R. Lashof [7] e la tesi di laurea di C. Giammaruco, Il fibrato tangente ad una varietà topologica, Un. Lecce, A.A.1979-80 (Relatore G.De Cecco).

seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "p"] & \\
X \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "id"'] & & X
\end{tikzcd}$$

e verificanti inoltre le seguenti condizioni:

$\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x ed un omeomorfismo

$$k : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$$

tale che

1) $p \circ k = pr_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U \qquad (x,y) \longmapsto x$

2) $k^{-1} \circ s|U = \times 0 : U \to U \times \mathbb{R}^n \qquad y \longmapsto (y,0)$

X si dirà <u>spazio base</u>, E <u>spazio totale</u>, (k,U) <u>funzione coordinata</u> e $p^{-1}(x)$ <u>fibra su x</u>.

Si vede facilmente che ogni fibra di un $\mathbb{R}^n$-fibrato è <u>omeomorfa</u> ad $\mathbb{R}^n$.

(1.2) Una <u>struttura di fibrato vettoriale</u> su un $\mathbb{R}^n$-fibrato (s,p) è una famiglia $\{(k_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ di funzioni coordinate tali che

1) $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X;

2) $\forall x \in U_\alpha \cap B_\beta$ l'applicazione

$$(k_\beta^{-1} \circ k_\alpha)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad y \longmapsto pr_2\, k_\beta^{-1}(k_\alpha(x,y))$$

è un isomorfismo lineare.

Due strutture di fibrato vettoriale su (s,p) sono chiamate equivalenti se la riunione delle famiglie che le definiscono è ancora una struttura di fibrato vettoriale.

Un fibrato vettoriale n-dimensionale è un $\mathbb{R}^n$-fibrato insieme con una classe di equivalenza di strutture di fibrato vettoriale. Allora ogni fibra $p^{-1}(x)$ ha una ben determinata struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n.

Basta infatti considerare la corrispondenza biunivoca

$$k_x : \mathbb{R}^n \to p^{-1}(x) \qquad y \to k(x,y)$$

e, posto $e_1 = k_x(y_1)$, $e_2 = k_x(y_2)$, definire

$$e_1 + e_2 = k_x(y_1 + y_2) \qquad \lambda e_1 = k_x(\lambda y_1).$$

(1.3) Se $X_1 \xrightarrow{s_1} E_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ e $X_2 \xrightarrow{s_2} E_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ sono due $\mathbb{R}^n$-fibrati, una coppia di applicazioni continue (ϕ,f), $\phi: E_1 \to E_2$, $f : X_1 \to X_2$, è chiamata un'applicazione $\mathbb{R}^n$-fibrata se

(1) $p_2\phi = fp_1$

(2) $s_2 f = \phi s_1$

(3) $\phi|p_1^{-1}(x_1) : p_1^{-1}(x_1) \to p_2^{-1}(f(x_1))$ è un omeomorfismo $\forall x_1 \in X_1$.

Inoltre se (s_1,p_1) e (s_2,p_2) sono fibrati vettoriali, un'applicazione fibrata è chiamata lineare se è lineare sulle fibre. Un'applicazione fibrata (lineare) è chiamata un'equivalenza fibrata (vettoriale) se $X_1 = X_2 = X$, $f = id_X$. In tal caso ϕ risulta un omeomorfismo.

Se poi ϕ , ristretta alle fibre, è un isomorfismo di spazi vettoriali $\forall x \in X$, si dirà che (ϕ, id) è un isomorfismo di fibrati vettoriali e scriveremo

$$(s_1, p_1) \stackrel{\sim}{=} (s_2, p_2)$$

2. Il fibrato tangente ad una varietà.

(2.1) Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Ricordiamo che ad ogni punto $x \in M$ è associato lo spazio tangente $T_x(M)$, spazio vettoriale di dimensione n, e che l'insieme

$$TM = \{(x, v_x) \mid x \in M, \ v_x \in T_x(M)\}$$

può essere dotato di struttura topologica anzi differenziabile.

Allora

$$M \xrightarrow{\sigma} TM \xrightarrow{\pi} M$$

risulta un $\mathbb{R}^n$-fibrato vettoriale differenziabile dove

$$\sigma \ : x \longmapsto (x, 0_x) \qquad\qquad \pi \ : (x, v_x) \longmapsto x$$

(2.2) Vogliamo ora illustrare le motivazioni che sono alla base del concetto di fibrato tangente ad una varietà topologica.

Come è noto, se M è una varietà riemanniana (anzi una qualsiasi varietà differenziabile paracompatta), tramite l'applicazione esponenziale è possibile definire l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : N &\to M \times M \\ (x, v_x) &\longmapsto (x, \exp_x v_x) \end{aligned}$$

dove N è un intorno della 0-sezione σ del fibrato tangente TM.

Ebbene Φ risulta un'immersione di N su un intorno della diagonale $\Delta(M) \subset M \times M$. Tenendo poi conto che è possibile trovare una funzione differenziabile

$$\varepsilon: M \to \mathbb{R}$$

tale che $\varepsilon(x) > 0$ e

$$\{v_x \in T_x(M) \mid \|v_x\| < \varepsilon(x)\} \subseteq N_x \qquad \forall x \in M,$$

si può definire l'applicazione

$$r : TM \to N$$
$$(x,v_x) \mapsto \frac{\varepsilon(x)v_x}{\|v_x\|+1}$$

che risulta anch'essa un'immersione. Allora

$$\Psi = \Phi \circ r : T(M) \to M \times M$$

immerge TM in un intorno della diagonale e soddisfa le seguenti proprietà

(a) $$pr_1 \cdot \Psi = \pi : TM \to M$$

(b) $$\Psi \circ \sigma(x) = (x,x) \in \Delta(M)$$

Si può dimostrare il notevole teorema

(2.3) <u>TEOREMA</u>. -

Sia $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} M$ *un fibrato vettoriale differenziabile di dimensione* n *e* $\Psi : E \to M \times M$ *un'immersione* C^∞ *su un intorno di* $\Delta(M)$ *soddisfacente le condizioni* (a) *e* (b) *di sopra. Allora*

$$(s,p) \cong (\sigma,\pi)$$

Si costruisce dapprima il seguente $\mathbb{R}^n$-fibrato

$$M \xrightarrow{s'} G \xrightarrow{p'} M$$

dove $G = \bigcup_{x \in M} \{ v \in T_{s(x)}E \mid v$ è tangente a $p^{-1}(x)\}$

$$s' : x \longmapsto 0_y \qquad y = s(x) \in E$$

$$p' : v \longmapsto x \qquad v \in T_y E \,, \; y = s(x).$$

Si fa vedere poi che

$$(s',p') \stackrel{\sim}{=} (s,p) \qquad e \qquad (s',p') \cong (\sigma,\pi)$$

da cui la conclusione.

(2.4) Quanto detto chiarisce la seguente definizione.

Sia M una <u>varietà topologica</u> di dimensione n. Un $\mathbb{R}^n$-fibrato $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} M$ si dice fibrato tangente ad M se esiste un'immersione

$$\Psi : E \to M \times M$$

che porti E su un intorno della diagonale e che soddisfi

a) $\quad pr_1 \circ \Psi = p$

b) $\quad \Psi \circ s(x) = (x,x)$

Si può far vedere (usando alcuni risultati di Kister [5]) che ogni varietà topologica ammette un fibrato tangente unico a meno di equivalenze.

Si osservi che se una varietà topologica M ammette una struttura differenziabile, allora il fibrato vettoriale tangente immerso tramite l'applicazione $\Psi : TM \to M \times M$ incontrato in (2.2), rappresenta l'$\mathbb{R}^n$-fibrato tangente di M, considerata come varietà topologica. Questo ci dice che se M ammette una struttura differenziabile, allora l'$\mathbb{R}^n$-fibrato tangente ammette una <u>struttura lineare.</u>

3. <u>Microfibrati</u>.-

(3.1) Siano X ed E due spazi topologici. Si definisce <u>microfibrato</u> su X una coppia di funzioni continue (s,p) che rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "id"'] & & X \end{tikzcd}$$

e verificanti inoltre le seguenti condizioni

$\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x ed un intorno aperto V di $s(x)$ con

$$s(U) \subseteq V \qquad\qquad p(V) \subseteq U$$

ed un omeomorfismo $k : U \times \mathbb{R}^n \to V$ tale che

1) $p \cdot k = pr_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U \qquad (u,y) \longmapsto u$

2) $k^{-1} \cdot s|U = \times\, 0 : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \qquad u \longmapsto (u,0)$

X si dirà lo <u>spazio base</u>, E lo <u>spazio totale</u>, $p^{-1}(x)$ la fibra su x, s l'<u>iniezione</u> e p la <u>proiezione</u> del microfibrato.

Infatti si vede facilmente che s è iniettiva, p è suriettiva e che la fibra $p^{-1}(x)$ <u>non</u> è necessariamente omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, ma contiene un sottospazio topologico omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$. Da qui il termine "microfibrato", cioé "fibrato in piccolo".

(3.2) Si osservi che solo gli intorni di $s(X)$ in E giocano un ruolo essenziale nella teoria. Per es. se E' è un intorno arbitrario di $s(X)$ in E, allora si vede che il microfibrato $X \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{p|E'} X$ è isomorfo al precedente.

(3.3) Sia $\xi = (s,p)$ un fibrato vettoriale di dimensione n su X, con E spazio totale, $p: E \to X$ la proiezione ed $s : X \to E$ la sezione nulla. Allora (s,p) costituisce anche un microfibrato, chiamato il <u>microfibrato soggiacente</u> a ξ, e sarà denotato con $|\xi|$.

(3.4) Sia M una varietà <u>topologica</u> e

$$\Delta : M \longrightarrow M \times M \qquad x \longmapsto (x,x)$$

l'applicazione diagonale, allora il diagramma

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{pr_1} M$$

costituisce un microfibrato, chiamato il <u>microfibrato tangente</u> ad M che indicheremo t_M.

Si dimostra facilmente (tenendo conto di quanto detto nel paragrafo 2) che vale

(3.5) <u>TEOREMA</u>. -

Sia M una varietà differenziabile paracompatta con fibrato tangente $\tau = (\sigma,\pi)$. Allora il microfibrato soggiacente $|\tau|$ è isomorfo al microfibrato tangente di M.

(3.6) COROLLARIO. -

Se la varietà M ammette una struttura differenziabile, allora esiste un fibrato vettoriale ξ su M tale che $\tau_M \stackrel{\sim}{=} |\xi|$.

Tale risultato si può invertire.Vale infatti il seguente notevole teorema dovuto a Milnor, Cairns, Hirsch :

(3.7) TEOREMA. -

Una varietà combinatoria M ammette una struttura differenziabile compatibile con quella combinatoria se e solo se il suo microfibrato tangente è equivalente ad un vettoriale.

(3.8) Concludiamo osservando che i concetti di fibrato e di microfibrato, pur essendo abbastanza distinti, sono strettamente legati dal seguente teorema

(3.9) TEOREMA (Kister)

Se X è un complesso localmente finito e di dimensione finita, allora ad ogni microfibrato su X è associato uno spazio fibrato, unico a meno di isomorfismi di microfibrati.

Cioè, dato il microfibrato di dimensione n

$$X \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} X$$

esiste un insieme aperto E_1, $s(X) \subseteq E_1 \subseteq E$, tale che

$$p \mid E_1 : E_1 \to X$$

è un fibrato con fibra $\mathbb{R}^n$ e gruppo strutturale il gruppo $H_0(n)$ di tutti gli omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che conservano l'origine.

BIBLIOGRAFIA

[1] S.S. CAIRNS, *Triangulation of the manifold of class one* Bull. Amer.Math. Soc.41 (1935),549-552

[2] M.W.HIRSCH *Obstruction theories for smoothing manifolds and maps*,Bull.Amer.Math.Soc.69(1963),352-356

[3] M.W.HIRSCH,B.MAZUR, *Smoothing of piecewise linear manifolds* Princeton Univ. Press (1974)

[4] R.C.KIRBY,L.C SIEBENMANN, *Foundational essays on topological manifolds, smoothing and triangulations*, Ann.of Math.St. 88,Princeton Un.Press (1977)

[5] J.M.KISTER, *Microbundles are fibre bundles* Ann.of Math. (2) 80 (1964), 190-199

[6] N.H.KUIPER *On the smooothing of triangulated and combinatorial manifolds*, sta in "Differential and Combinatorial Topology" 3-22,Princeton Univ. Press (1965)

[7] R.LASHOF, *The tangent bundles of a topological manifold* Am. Math. Monthly, 79, (1972),1090-1095.

[8] R.LASHOF,M.ROTHENBERG, *Microbundles and smoothing*,Topology 3 (1965),357-388

[9] J.MILNOR, *Topological manifolds and smooth manifolds* Proc. Inst.Congress Math.(Stokholm 1962)132-138

[10] J.MILNOR, *Microbundles I*,Topology 3, (1964),suppl.1,53-80

[11] J. MUNKRES, *Obstruction to imposing differentiable structu re* Illinois J.Math. 8 (1964), 361-376

[12] N. TELEMAN, *Global Analysis on PL-Manifolds* Transaction Soc. 1979,49-88

[13] R. THOM, *Des varietēs triangulēes aux varietēs diffē- rentiables* Proc. Int. Congrees Math.1958,248-255

[14] J.H.WHITEHEAD, *On C^1 complexes*, Ann.of Math.,41(1940),809-824.