CAPITOLO II - IDENTITA'

6. Caratterizzazioni mediante identità eterotipiche.

Sia $X = \{x,y,\ldots\}$ un insieme i cui elementi saranno detti variabili (o generatori), una parola è una sequenza finita di variabili. L'insieme di tutte le parole $F = F(X)$ con l'operazione di giustapposizione forma un semigruppo, il semigruppo generato da X, che viene detto semigruppo libero generato da X. Se identifichiamo l'elemento $x \in X$ con la sequenza (x) di lunghezza 1, allora risulta:

$(x_1,x_2,\ldots,x_m) = (x_1)(x_2)\ldots(x_m) = x_1x_2\ldots x_m$, per cui ogni parola può essere riguardata come il prodotto delle sue variabili. Se l'insieme X delle variabili ha cardinale n, allora si dice che F è il semigruppo libero su n generatori, e se n è finito allora si dice che F è finitamente generato.

Una coppia di parole (P,Q) si dice identità e si scrive $P = Q$.

Sia S una banda. Diremo che S soddisfa un'identità $P = Q$, se per ogni omomorfismo $f : F \to S$ risulta $f(P) = f(Q)$.

Diremo che un'identità $P = Q$ implica un'identità $P' = Q'$, se ogni banda che soddisfa $P = Q$ soddisfa anche $P' = Q'$. Così ogni identità implica l'identità $x^2 = x$ (cioè l'idempotenza) perché una banda è un semigruppo idempotente, quindi soddisfa sempre l'identità $x^2 = x$.

Diremo che le identità $P = Q$ e $P' = Q'$ sono equivalenti se $P = Q$ implica $P' = Q'$ e $P' = Q'$ implica $P = Q$.

Sia X' un altro insieme di variabili. Sia $t_o : X \to X'$ una qualsiasi trasformazione di X in X', si ha allora un omomorfismo $t : F(X) \to F(X')$ che coincide con t_o su X.

E' facile provare ora i seguenti lemmi:

Lemma 6.1. -

$P = Q$ implica $t(P) = t(Q)$ per una qualsiasi trasformazione di variabili $t_\circ$.

Dimostrazione. -

Sia S una banda che soddisfa $P = Q$, dobbiamo provare che tale banda soddisfa anche $t(P) = t(Q)$, cioé, preso un qualsiasi omomorfismo $g : F(X') \to S$, risulta $g(t(P)) = g(t(Q))$, infatti $g(t(P)) = g \circ t(P)$ e $g(t(Q) = g \circ t(Q)$ e poiché $g \circ t$ è un omomorfismo da $F(X)$ in S ed S soddisfa $P = Q$, allora sarà $g \circ t(P) = g \circ t(Q)$ e quindi $g(t(P)) = g(t(Q))$.

Lemma 6.2.-

Se $P = Q$ implica $P = P'$ e $Q = Q'$ allora $P = Q$ implica $P' = Q'$.

Lemma 6.3.-

Se $P = Q$ implica $P' = Q'$ allora $P = Q$ implica $PP' = QQ'$ e $P'P = Q'Q$.

OSSERVAZIONE 6.1.-

Se consideriamo il semigruppo idempotente libero generato da X invece del semigruppo libero generato da X non ci sono differenze sostanziali nella trattazione.

Diamo ora alcune definizioni:

Una identità $P = Q$ si dice che è omotipica se P e Q contengono entrambe le stesse variabili esplicitamente, altrimenti si dice eterotipica. Al esempio un'identità $xy = x$ è eterotipica, mentre un'identità $xy = yx$ è omotipica.
Se P è una parola $x_1x_2...x_n$, allora diremo x_1 la testa di P e x_n la coda.

Teorema 6.1.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla singolarità sinistra (destra) (cioè all'identità $xy = x$ $(xy = y)$) se e solo se valgono contemporaneamente:

(1) $P = Q$ è eterotipica,

(2) P e Q hanno le stesse (differenti) teste,

(3) P e Q hanno differenti (le stesse) code.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata a destra dopo la dimostrazione del Lemma 6.4.

Proviamo la condizione sufficiente. Supponiamo che $P = Q$ soddisfi ad (1),(2),(3). Allora le parole P e Q sono espresse da $x \ldots x_1$ e $x \ldots x_2$ rispettivamente, dove x_1 è diverso da x_2 e l'uno o l'altro, ma non entrambi, possono essere uguali a x. Dalla (1) segue che o P o Q contengono una variabile y, che non sta nell'altra parola. Supponiamo che P contenga y. Una trasformazione $t_0 : X \to X$ che porta y in y e tutte le altre variabili in x, manda le parole P,Q in P',Q' dove P' è $x \ldots y \ldots x$ se $x_1 \neq y$, oppure P' è $x \ldots y$, se $x_1 = y$ (al posto dei puntini ci può essere x o y o niente), e Q' è x^n, per qualche intero positivo n (cioè $t(P)$ è P' e $t(Q)$ è Q').

Ora una qualsiasi banda soddisfa l'identità $P' = xyx$ o $P' = xy$, in accordo col fatto che P' è $x \ldots y \ldots x$ o $x \ldots y$, e l'identità $Q' = x$.

Allora per il Lemma 6.1 $P = Q \Longrightarrow P' = Q'$, e per il Lemma 6.2.:

$(P' = Q' \Longrightarrow P' = xyx,\ Q' = x) \Longrightarrow (P' = Q' \Longrightarrow xy = x)$ oppure

$(P' = Q' \Longrightarrow P' = xy,\ Q' = x) \Longrightarrow (P' = Q' \Longrightarrow xy = x)$, in conclusione

$$P = Q \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{(i) } xyx = x \\ \text{(ii) } xy = x \end{array} \quad \text{opp.}$$

La (i) è la rettangolarità, quindi per il Lemma 1.2. $(xyx = x \Longleftrightarrow xyz = xz)$ la (i) implica contemporaneamente $P = xx_1$, $Q = xx_2$, in quanto P è $x \ldots x_1$ e Q è $x \ldots x_2$; ne segue che $P = Q \Longrightarrow P = xx_1$, $Q = xx_2$,e per il lemma 6.2. risulta:

$P = Q \Longrightarrow xx_1 = xx_2$.

Proviamo ora che l'identità $xx_1 = xx_2$ implica la singolarità sinistra. Infatti consideriamo la trasformazione $t_o : X \to X$ che porta x_1 in x_1 e tutte le altre variabili in x, allora tale trasformazione manda le parole xx_1 in xx_1 e xx_2 in xx, e per il Lemma 6.1.: $xx_1 = xx_2 \Longrightarrow xx_1 = xx$; inoltre in ogni banda è vera l'identità $xx = x$; ora poiché $(xx_1 = xx \Longrightarrow xx_1 = xx_1, xx = x)$ applicando il Lemma 6.2., risulta

$$(xx_1 = xx \Longrightarrow xx_1 = x).$$

La singolarità sinistra quindi è vera nell'ipotesi (i).

La (ii) è proprio la singolarità sinistra.

In conclusione da $P = Q$ discende in entrambi i casi la singolarità sinistra, così l'implicazione verso destra della condizione sufficiente è completamente provata. Proviamo ora l'implicazione verso sinistra della condizione sufficiente.

Consideriamo l'identità $xy = x$, essa implica una qualsiasi identità della forma $x \ldots y = x \ldots x$ o $x \ldots y = x \ldots z$

dove x,y,z sono tutti differenti e i puntini stanno per una qualsiasi sequenza di variabili.

Così $xy = x$ implica una qualsiasi identità soddisfacente le condizioni del teorema.

Teorema 6.2.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla rettangolarità (cioè all'identità $xyx = x$) se e solo se

1) $P = Q$ è eterotipica,
2) P e Q hanno le stesse teste,
3) P e Q hanno le stesse code.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata dopo la dimostrazione del Lemma 6.4 Proviamo la condizione sufficiente.

Sia $P = Q$ una identità soddisfacente 1),2),3). Allora possiamo assumere che la parola P sia $x\ldots y\ldots z$ e Q sia $X\ldots z$, dove Q non deve contenere la variabile y, e z può coincidere con x.

Consideriamo la trasformazione che porta y in y e tutte le altre variabili in x, essa manda P in P' e Q in Q', dove P' è $x\ldots y\ldots x$ e Q' è x^n,per qualche intero positivo n. Ora una qualsiasi banda soddisfa l'identità $P' = xyx$ e $Q' = x$, allora per i Lemmi 6.1 e 6.2. si ha che $P = Q \Longrightarrow xyx = x$, che è equivalente alla rettangolarità.

Viceversa la rettangolarità $xyx = x$ implica una qualsiasi identità della forma $x\ldots y\ldots z = x\ldots z$ per il Lemma 1.2.

Così la rettangolarità implica una qualsiasi identità soddisfacente le precedenti condizioni.

Osservazione 6.2. -

E' facile verificare che tutte le identità menzionate nell'Osservazione 1.2. soddisfano le precedenti tre condizioni.

Teorema 6.3.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla trivialità, cioè all'identità $x = y$, se e solo se

1) $P = Q$ è eterotipica,
2) P e Q hanno teste diverse,
3) P e Q hanno code diverse.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata dopo la dimostrazione del Lemma 6.4.. Proviamo la condizione sufficiente.

Sia $P = Q$ un'identità soddisfacente le precedenti condizioni e sia z una variabile che non è contenuta in entrambe P e Q. Allora per il Lemma 6.3. è vera la seguente implicazione in quanto l'ipotesi è vera:
$(P = Q \Longrightarrow z = z) \Longrightarrow (P = Q \Longrightarrow zP = zQ \quad \text{e} \quad Pz = Qz)$.

Per il Teorema 6.1 si ha che $zP = zQ$ è equivalente alla singolarità sinistra, mentre $Pz = Qz$ è equivalente alla singolarità destra.
Così $P = Q$ implica contemporaneamente $xy = x$ e $yx = x$ e ciò implica la trivialità.

Viceversa $x = y$ implica una qualsiasi identità.

Lemma 6.4.-

Un qualsiasi semireticolo soddisfa una qualsiasi identità omotipica.

Dimostrazione.-

Sia S un semireticolo. Sia $P = Q$ un'identità omotipica le cui variabili siano $x_1,\dots,x_n$. Allora S, essendo una banda commutativa, soddisfa entrambe le identità $P = x_1x_2\dots x_n$ e $x_1x_2\dots x_n = Q$ e quindi soddisfa l'identità $P = Q$.

Dimostriamo ora la necessità dei Teoremi 6.1,6.2,6.3, cioè proviamo che un'identità $P = Q$, equivalente rispettivamente alla rettangolarità, alla singolarità sinistra (destra), alla trivialità verifica le condizioni 1),2),3) dei rispettivi teoremi.

Sia $P = Q$ un'identità siffatta, e sia S il semireticolo di due elementi $S = \{a,b\}$. Se la $P = Q$ fosse omotipica, per il Lemma 6.4., il semireticolo S la soddisferebbe e quindi S sarebbe rispettivamente rettangolare, zero-sinistro (destro), triviale, ma ciò è assurdo perché:

1) se S fosse rettangolare, per il Lemma 1.2 , si avrebbe $\forall x,y,z \in S$ $xyz = xz$ e, per il Lemma 1.1 , S sarebbe anticommutativo, mentre S è una banda commutativa,

2) se S fosse zero-sinistro (destro) si dovrebbe avere: $\forall x,y \in S$ $xy = x$ $(xy = y)$, mentre si ha che $ba = ab = a$,

3) se S fosse triviale tutti i suoi elementi dovrebbero coincidere, mentre S ha due elementi distinti.

In tutti e tre i casi quindi risulta che $P = Q$ è eterotipica e allora verifica la condizione 1) dei tre teoremi.

Sia A la banda zero-sinistra di due elementi e B la banda zero-destra di due elementi, allora A non è zero-destra, B non è zero-sinistra, e nessuna delle due è triviale.

Infatti in $A = \{a,b\}$ risulta: $ab = a$, $ba = b$; se A fosse anche zero-destra si avrebbe : $ab = b$, $ba = a$, da cui seguirebbe che $a = b$, assurdo. Analogamente per B si prova che non è zero-sinistra.

Né A né B sono triviali perché entrambe hanno due elementi distinti . Proviamo ora che la banda A soddisfa una qualunque identità $P = Q$ se le teste di P e di Q coincidono (la banda B soddisfa una qualunque identità $P = Q$ se le code di P e di Q coincidono). Infatti sia $P = Q$ una identità, dove P è la parola $x_1 \ldots x$, e Q è la parola $x_1 \ldots y$, allora se consideriamo un qualsiasi omomorfismo $f : F(X) \to A$ risulta:

$$f(x_1) \ldots . f(x) = f(x_1)(\ldots f(x)) = f(x_1)$$

$$f(x_1) \ldots f(y) = f(x_1)(\ldots f(y)) = f(x_1)$$

in quanto A è zero-sinistra, ne segue che

$f(x_1) \ldots f(x) = f(x_1) \ldots f(y)$, cioè A soddisfa la $P = Q$ in quanto $f(P) = f(Q)$, per ogni omomorfismo f.

Analogamente ragionando in B si prova che B soddisfa un'identità $P = Q$, se P e Q hanno le code coincidenti.

(i) Sia $P = Q$ equivalente alla trivialità. Le parole P e Q devono avere teste e code differenti perché se ciò non fosse le bande A,B , prima considerate, soddisfarebbero la $P = Q$ e sarebbero quindi triviali, ma ciò è assurdo perché A e B sono non triviali.

Così le condizioni 2) e 3) del Teorema 6.3. sono provate.

(ii) Supponiamo che $P = Q$ sia equivalente alla singolarità sinistra (destra). Allora le code (le teste) di P e Q devono essere differenti Infatti se ciò non accadesse la banda $B(A)$, che non è zero-sinistra (zero-destra), soddisferebbe questa identità e sarebbe quindi zero-sinistra, il che è assurdo.

Questo prova la condizione 3) del Teorema 6.1.

Si ha inoltre che le teste (le code) di P e di Q devono coincidere. Infatti se fossero diverse la $P = Q$ sarebbe equivalente alla trivialità per il Teorema 6.3. che è già stato provato completamente. Allora la banda

A(B) zero-sinistra (zero-destra), che per ipotesi soddisfa la $P = Q$, sarebbe triviale, il che è assurdo.

Ciò prova la condizione 2) del Teorema 6.1.

Supponiamo ora che $P = Q$ sia equivalente alla rettangolarità. Si ha allora che le teste e le code di P e di Q coincidono. Infatti se ciò non accadesse l'identità $P = Q$ sarebbe equivalente alla trivialità o alla singolarità sinistra o alla singolarità destra, per quanto visto prima, e la banda $A \times B$, prodotto diretto di A e di B, che è rettangolare, ma non è zero-sinistra né zero-destra né triviale, sarebbe equivalente alla singolarità sinistra o alla singolarità destra o alla trivialità e ciò è assurdo.

Sono vere perciò le condizioni 2) e 3) del Teorema 6.2.

Abbiamo così completato la classificazione di tutte le identità eterotipiche in quattro casi distinti.

7. - Caratterizzazioni mediante identità omotipiche. -

Teorema 7.1.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla commutatività se soddisfa le seguenti condizioni:

1) $P = Q$ è omotipica
2) P e Q hanno teste differenti
3) P e Q hanno code differenti.

Dimostrazione. -

Sia $P = Q$ un'identità soddisfacente le precedenti condizioni 1),2),3), possiamo suppporre che la parola P sia $x\ldots$, e Q sia $y\ldots$, con $x \neq y$.

Allora poiché $P = Q \Longrightarrow xy = xy$, per il Lemma 6.3.: $P = Q \Longrightarrow Pxy = Qxy$.

Consideriamo ora la trasformazione che porta y in y e tutte le altre variabili in x, essa per il Lemma 6.1 porta la seconda identità nell'identità $xy = yxy$, che è equivalente alla regolarità a destra, in conclusione $P = Q$ implica la regolarità a destra. Analogamente se supponiamo che P sia la parola $...x$, Q sia $....y$ e applichiamo la trasformazione considerata prima all'identità $yxP = yxQ$, la $P = Q$ implica la regolarità a sinistra.

Allora l'identità $P = Q$ implica la commutatività, in quanto per il Lemma 4.7 una banda è commutativa se e solo se è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra.

Viceversa la commutatività implica una qualunque identità omotipica.

Stabiliamo ora una condizione sufficiente affinché un'identità sia equivalente alla regolarità sinistra o destra, dopo aver introdotto il concetto di parte iniziale e parte finale, per mezzo del quale possiamo ridurre entrambi i membri di un'identità a forme più semplici.

Sia $x_1x_2...x_n$ la parola P e sia $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$ la parola P' ottenuta scrivendo tutte le variabili distinte della parola P successivamente da sinistra, allora diremo che P' è la <u>parte iniziale</u> di P e la denoteremo con $q(P)$. Analogamente possiamo definire la <u>parte finale</u> di P, che indicheremo con $r(P)$, come quella parola ottenuta scrivendo successivamente da destra le variabili distinte di P.

Così se la parola P è $xyxzx$, allora la sua parte iniziale $q(P)$ è xyz e la sua parte finale $r(P)$ è yzx.

Quando P e Q hanno la stessa parte iniziale diremo che l'identità $P = Q$ è <u>coiniziale</u>, e quando P e Q hanno la stessa parte finale diremo che la $P = Q$ è <u>cofinale</u>.

<u>Osservazione 3.2</u>.-

Se un'identità è coiniziale o cofinale allora essa è omotipica.

Teorema 7.2.-

Un'identità $P = Q$ è equivalente alla regolarità sinistra (destra) se soddisfa le seguenti condizioni:

1) $P = Q$ è coiniziale (cofinale)

2) P e Q hanno code differenti (teste differenti)

Dimostrazione. -

Supponiamo che $P = Q$ soddisfi le due precedenti condizioni. Allora per la 1) P e Q hanno la stessa parte iniziale e quindi la stessa testa, chiamiamola x; per la 2) P e Q hanno code differenti e quindi o P o Q ha una coda che è diversa da x, sia allora $P \; x \dots y$, con $y \neq x$, e sia $Q \; x \dots y \dots x$.

Sia t la trasformazione che porta y in y e tutte le altre variabili in x. Applicando il Lemma 6.1 si ha che $P = Q \Longrightarrow t(P) = t(Q)$ e poiché è vera la seguente implicazione $(t(P) = t(Q) \Longrightarrow t(P) = xy$ e $t(Q) = xyx)$ applicando il Lemma 6.2., si ha che $t(P) = t(Q) \Longrightarrow xy=xyx$, quindi $P = Q$ implica $xy = xyx$, che è regolarità sinistra.

Viceversa si vede facilmente che la regolarità sinistra implica $P = q(P$ per una qualunque parola P, dove $q(P)$ è la parte iniziale di P.

Allora se consideriamo una qualunque identità coiniziale $P = Q$, cioé tale che $q(P) = q(Q)$, poiché, per quanto visto prima,

$xy = xyx \Longrightarrow \left(P = q(P) \quad \text{e} \quad Q = q(Q)\right)$ se ne deduce che $xy = xyx \Longrightarrow P = Q$ cioé la regolarità sinistra implica una qualunque identità coiniziale e quindi, in particolare, implica un'identità coiniziale che soddisfa anche la condizione 2).

Segnaliamo ora un problema ancora aperto: "Quale è l'identità $P = Q$ che equivale alla regolarità della banda?".

Consideriamo ora l'identità:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \, a_n = a_{p_1} \cdot a_{p_2} \ldots \, a_{p_n} \qquad (*)$$

dove $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ è una permutazione non banale di $(1,2,\ldots,n)$.

Abbiamo il seguente:

Teorema 7.3.-

Una banda soddisfacente l'identità (*) è

1) normale se $p_1 = 1$; $p_n = n$,

2) normale a sinistra se $p_1 = 1$; $p_n \neq n$,

3) normale a destra se $p_1 \neq 1$; $p_n = n$

4) commutativa se $p_1 \neq 1$, $p_n \neq n$.

Dimostrazione.-

Evidente.

Accettato per la pubblicazione su parere favorevole del Prof. F. MIGLIORINI