CAPITOLO I - BANDE

1. Bande. Bande particolari. Prime proprietà delle bande. Esempio di Banda.

Un semigruppo idempotente (o banda) è un insieme $S \neq \emptyset$ chiuso rispetto ad una moltiplicazione associativa tale che per ogni elemento a di S risulti: $a^2 = a$.

Un semigruppo si dice anticommutativo quando nessuna coppia di suoi elementi commuta, cioè presi comunque $a,b \in S$ con $a \neq b$, risulta $ab \neq ba$.

Un semigruppo S si dice rettangolare se $aba = a$,
si dice zero-sinistro se $ab = a$,
si dice zero-destro se $ba = a$

per ogni a,b appartenenti ad S.

I semigruppi rettangolari, zero-sinistri, zero-destri sono tutti idempotenti. Infatti sia S un semigruppo rettangolare, allora preso $a \in S$ risulta $a^2 = a^2 a\, a^2 = a\, a^3\, a = a$.

Sia ora S un semigruppo zero-sinistro (destro), allora preso $a \in S$: $a\,a = a$

Un semigruppo zero-sinistro (destro) è rettangolare.
Infatti per ipotesi $\forall a,b \in S : ab = a\big(ba = a\big)$, allora:

$aba = (ab)a = a\,a = a\ \big(aba = a(ba) = aa = a\big)$, in quanto vale l'idempotenza.

Sia data una banda S, per ogni $a \in S$ definiamo due insiemi S_a, T_a nel seguente modo:

$S_a = \{x \in S / x = ax\}$, $T_a = \{x \in S / x = xa\}$ ovvero
$ax = x \Longleftrightarrow x \in S_a$, $xa = x \Longleftrightarrow x \in T_a$.

In S_a (T_a) ci sono tutti e soli gli elementi di S che hanno a come unità sinistra (destra).

Tali insiemi sono certamente non vuoti perché almeno a vi appartiene; inoltre vale la seguente proprietà:

$$S_a = S_b\ ,\quad T_a = T_b \Longrightarrow a = b$$

Infatti:

$$\begin{array}{c} S_a = S_b\ ,\ a \in S_a \\ T_a = T_b\ ,\ b \in T_b \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} a \in S_b \\ b \in T_a \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} a = b\,a \\ b = b\,a \end{array} \Longrightarrow a = b.$$

cosicché ogni elemento $a \in S$ viene caratterizzato dai due insiemi.

Lemma 1.1. - Sia S una banda. S è anticommutativa se e solo se per ogni terna $a,b,c \in S$: $abc = ac$.

Dimostrazione.-

Proviamo prima che la condizione è sufficiente, cioè supposto che $\forall a,b,c \in S : abc = ac$ vogliamo provare che S è anticommutativa

Presi dunque $a,b \in S$ con $a \neq b$ risulta:

$$(a\,b)(b\,a) = a(bb)a = a\,b\,a = a\,a = a$$
$$(b\,a)(a\,b) = b(aa)b = b\,a\,b = b\,b = b$$

dove $a\,b\,a = a\,a$ e $b\,a\,b = b\,b$ per l'ipotesi fatta.

Ora se fosse $a\,b = b\,a$ risulterebbe $(a\,b)\,(b\,a) = (b\,a)\,(a\,b)$ cioè $a = b$ mentre è $a \neq b$, se ne conclude che $a\,b \neq b\,a$.

Viceversa supposta S anticommutativa vogliamo provare che $\forall a,b,c \in S : abc = ac$.

Da $a(axa) = (axa)a$, in quanto entrambi uguali ad axa, segue che $a = axa$ per ogni $x \in S$. Infatti se fosse $a \neq axa$, per l'anticommutività di S, si avrebbe che anche $a(axa) \neq (axa)a$.

Allora presi $a,b,c \in S$

$$a\,b\,c = a\,b(c\,a\,c) = [a(b\,c)a]\,c = ac \qquad \left(\begin{array}{l}\text{per } x = bc : \\ a(bc)\,a = a\end{array}\right)$$

<u>Lemma 1.2.</u>- Una banda S è rettangolare se e solo se $a\,b\,c = a\,c$ $\forall a,b,c \in S$ (cioè sse S è anticommutativa).

<u>Dimostrazione.</u> -

Condizione sufficiente:

Se per una banda S si ha $a\,b\,c = a\,c$ $\forall a,b,c \in S$, allora $a\,b\,a = a\,a = a$ quindi S è rettangolare.

Condizione necessaria:

Supponiamo che S sia una banda rettangolare, allora $\forall a,b,c \in S$: $a(bc)a = a$, da cui $abc = ab(cac) = (a(bc)a)c = ac$.

<u>Lemma 1.3.</u>- In una banda rettangolare S si ha: $S_a = S_{ab}$ e $T_b = T_{ab}$ $\forall a,b \in S$.

<u>Dimostrazione.</u> -

$S_a = \{x \in S/\ x = ax\}$, $T_b = \{x \in S/x = xb\}$

Dal Lemma 1.1. risulta $ax = abx$ per cui $ax = x \iff abx = x$ $\forall x \in S$, ne segue che $S_a = S_{ab}$.

Inoltre $xb = xab$ da cui $xb = x \iff xab = x$ $\forall x \in S$, ne segue che $T_b = T_{ab}$.

<u>Lemma 1.4.</u> - In una banda <u>commutativa</u> S :

$S_a = T_a$ e $S_{ab} = S_a \cap S_b$ $\forall a,b \in S$.

<u>Dimostrazione</u>. -

Poiché S è commutativa $ax = xa$ per ogni $x \in S$, da cui $S_a = T_a$. Proviamo ora che $S_a \cap S_b = S_{ab}$.

Sia $x \in S_a \cap S_b$ allora $x = ax$ e $x = bx$, da cui

$abx = a(bx) = ax = x$, cioè $x \in S_{ab}$.

Sia ora $x \in S_{ab}$ allora $abx = x$, ne segue che

$$ax = a(abx) = a^2bx = abx = x$$
$$bx = b(abx) = (ba)bx = abbx = abx = x$$

per cui $x \in S_a \cap S_b$. In conclusione $S_a \cap S_b = S_{ab}$.

Dal lemma precedente si deduce che ogni elemento di una banda commutativa è caratterizzato da un solo insieme e che la moltiplicazione (tra elementi) è rappresentata dall'intersezione tra i relativi insiemi.

Definiamo ora in una banda S <u>due relazioni R e L</u> come segue:

$$\forall a,b \in S \quad \begin{array}{l} a\,R\,b \iff ab = b \quad \text{e} \quad ba = a \\ a\,L\,b \iff ab = a \quad \text{e} \quad ba = b \end{array}$$

<u>Lemma 1.5.</u>- In una banda S risulta:

1) $aRb \iff S_a = S_b$

2) $aLb \iff T_a = T_b$

$\forall a,b \in S$.

Dimostrazione. -

1) Proviamo che la condizione è necessaria.

Presi $a, b \in S$

$$aRb \iff ab = b \quad e \quad ba = a$$

Consideriamo

$x \in S_a \iff ax = x$, ma $a = ba$ da cui $(ba)x = x$ inoltre

$(ba)x = b(ax) = bx$ quindi $x = bx$, cioé $x \in S_b$ $(S_a \subseteq S_b)$

Ancora

$x \in S_b \iff bx = x$, ma $b = ab$ da cui $(ab)x = x$ ed essendo

$(ab)x = a(bx) = ax$ si ha $ax = x$ cioé $x \in S_a$ $(S_b \subseteq S_a$

E così si è provato che $S_a = S_b$.

Viceversa siano $S_a = S_b$, vogliamo provare che $ab = b$ e $ba = a$.

Infatti da $a \in S_a$, $S_a = S_b$ segue che $a \in S_b$, cioé $ba = a$ e

da $b \in S_b$, $S_b = S_a$ segue che $b \in S_a$, cioé $ab = b$.

Analogamente si prova la 2).

Le relazioni R e L sono relazioni di equivalenza, lo si vede immediatamente applicando il lemma 1.5. Infatti

aRa in quanto $S_a = S_a$

$aRb \implies bRa$ in quanto $S_a = S_b \implies S_b = S_a$

$aRb, bRc \implies aRc$ perché $S_a = S_b, S_b = S_c \implies S_a = S_c$

Analogamente per L.

Lemma 1.6. -

1) $aRb \Longrightarrow caRcb$ (compatibilità a sinistra di R)

2) $aLb \Longrightarrow acLbc$ (compatibilità a destra di L)

Dimostrazione. -

1) Dobbiamo provare che $(ca)(cb) = cb$ e $(cb)(ca) = ca$

Infatti dall'ipotesi $ab = b$ e $ba = a$ quindi $cab = cb$ e $cba = ca$. Allora

$(ca)(cb) = (ca)(cab) = (ca)(ca)b = cab = cb$

$(cb)(ca) = cb(cba) = (cb)(cb)a = cba = ca$ come volevamo.

2) Dobbiamo provare che $(ac)(bc) = ac$ e $(bc)(ac) = bc$

Dall'ipotesi $ab = a$ e $ba = b$ quindi $abc = ac$ e $bac = bc$.

Allora

$(ac)(bc) = (abc)(ac) = a(bc)^2 = abc = ac$

$(bc)(ac) = (bac)ac = b(ac)^2 = bac = bc$ come volevamo.

Definiamo ora in S un'altra relazione P come segue:

$a,b \in S$ $aPb \Longleftrightarrow aba = a$ e $bab = b$.

Lemma 1.7.- aRb e $bLc \Longrightarrow aPc$ $\forall a,b,c \in S$.

Dimostrazione. -

Per il lemma 1.6. (aRb e $bLc \Longrightarrow caRcb$ e $baLca$) e per ipotesi $ba = a$ e $cb = c$; ne segue che $caRc$ e $aLca$, quindi $(ca)c = c$

e $a(ca) = a$ cioé aPc.

Lemma 1.8 -

aLb o $aRb \Longrightarrow aPb$ e $caPcb$ e $acPbc$.

Dimostrazione. -

Dobbiamo provare che $aba = a$, $bab = b$

$$(ca)(cb)(ca) = ca, \ (cb)(ca)(cb) = cb \quad \text{e}$$

$$(ca)(bc)(ac) = ac \ , \ (bc)(ac)(bc) = bc$$

nell'ipotesi che $ab = a$ e $ba = b$ oppure $ab = b$ e $ba = a$

Infatti sia aLb allora $aba = (ab)a = a^2 = a$, $bab = (ba)b = b^2 = b$,

inoltre per il Lemma 1.6 si ha che $acLbc$ cioé

$ac(bc) = ac$ e $(bc)(ac) = bc$ Ne segue che

$$(ca)(cb)(ca) = c[(ac)(bc)]a = c(ac)a = (ca)^2 = ca$$
$$(cb)(ca)(cb) = c[(bc)(ac)]b = c(bc)b = (cb)^2 = cb$$
$$(ac)(bc)](ac) = (ac)^2 = ac$$
$$[(bc)(ac)](bc) = (bc)^2 = bc$$

Sia invece aRb allora $aba = (ab)a = ba = a$ e $bab = (ba)b = ab = b$

inoltre per il lemma 1.6: $caRcb$ cioé

$(ca)(cb) = cb$ e $(cb)(ca) = ca$. Ne segue che

$(ca)[(cb)](ca) = (cb)(ca) = ca$

$(cb)[(ca)](cb) = (ca)(cb) = cb$

$ac(bc)ac = a[(cb)(ca)]c = a(ca)c = (ac)^2 = ac$

$bc(ac)bc = b[(ca)(cb)]c = b(cb)c = (bc)^2 = bc$

<u>Lemma 1.9</u> -

<u>$aPb \Longrightarrow aRab$ e $bLab$ e $bRba$ e $aLba$</u> .

<u>Dimostrazione.</u> -

Per ipotesi è $aba = a$ e $bab = b$, allora

$a(ab) = a^2b = ab$ e $(ab)a = aba = a$ quindi $aRab$;

$b(ab) = bab = b$ e $(ab)b = ab^2 = ab$ quindi $bLab$,

$b(ba) = b^2a = ba$ e $(ba)b = bab = b$ quindi $bRba$;

$a(ba) = aba = a$ e $(ba)a = ba^2 = ba$ quindi $aLba$

La relazione <u>P</u> è una relazione <u>d'equivalenza</u>, infatti vale la proprietà riflessiva in quanto $aaa = a$ (aPa) . vale la proprietà simmetrica in quanto $aba = a$ e $bab = b \Longrightarrow bab = b$ e $aba = a$ $(aPb \Longrightarrow bPa$

<u>La proprietà transitiva</u> sarà provata nel seguente

<u>Lemma 1.10.-</u>

$aPb, bPc \Longrightarrow aPc$

<u>Dimostrazione.</u> -

Se aPb e bPc dal lemma 1.9 segue che $bRba, bRbc,$
$bLab, bLcb$

e poiché R ed L sono relazioni d'equivalenza esse sono simmetriche e transitive quindi

$bRba \Longrightarrow baRb$; $baRb, bRbc \Longrightarrow baRbc$

$bLab \Longrightarrow abLb$; $abLb, bLcb \Longrightarrow abLcb$.

In conclusione $abLcb$ e $baRbc$, per il lemma 1.6 risulta: $abaLcba$, $cbaRcbc$, ma per ipotesi $aba = a$, $cbc = c$ quindi $aLcba$, $cbaRc$ e per il lemma 1.7 si ha aPc, come volevamo.

Lemma 1.11.-(Compatibilità a sinistra e a destra della P).

$aPb \Longrightarrow caPcb$ e $acPbc$.

Dimostrazione. -

Per il lemma 1.9 : $aPb \Longrightarrow aRab$ e $bLab$ e per il lemma 1.8 : $caPcab$ e $cbPcab$, $acPabc$ e $bcPabc$, e per la simmetria di P: $cabPcb$ e $abcPcb$, da cui applicando la transitività della P: $caPcb$ e $acPbc$, come volevamo.

Lemma 1.12. -

Sia Q una relazione d'equivalenza definente un omomorfismo di una banda S t.c. $\forall a,b \in S : abQba$.

Allora $aPb \Longrightarrow aQb$.

Dimostrazione. -

$aPb \Longrightarrow a = aba$ e $b = bab$, da cui $a = (ab)(ba)$ e $b = (ba)(ab)$.

Ora, essendo $abQba$ per ogni $a,b \in S$, si avrà anche per ab e ba, cioé $(ab)(ba)Q(ba)(ab)$ e quindi aQb.

Abbiamo già visto che i semigruppi zero-sinistri (destri) sono rettangolari.

Viceversa vale il seguente:

Lemma 1.13.-(*)

Un semigruppo rettangolare è il prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro e di un semigruppo zero-destro. Inoltre questa fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. - Sia S un semigruppo rettangolare. Consideriamo gli insiemi A e B di tutti i sottoinsiemi di S della forma xS e Sx, cioé $A = \{xS/x\epsilon S\}$, $B = \{Sx/x\epsilon S\}$, e facciamo vedere che A è un semigruppo zero-sinistro e che B è zero-destro, cioé proviamo che $\forall xS,yS\epsilon A$. $(xS)(yS) = xS$ e $\forall Sx,Sy \in B : (Sx)(Sy) = Sy$.

Proviamo intanto che $\begin{cases} xyS = xS \\ Sxy = Sy \end{cases}$

Da $yS \subseteq S$ segue che $xyS \subseteq xS$. Inoltre $xS = (xyx)S = (xy)(xS) \subseteq xyS$. Quindi $xyS = xS$.

Analogamente $Sxy = Sy$. Ne segue che

$(xS)(yS) = (xS)(yxS) = x(Syx)S = (xSx)S = xS$. Analogamente

$(Sx)(Sy) = Sy$ cioé vale $\begin{cases} (xS)(yS) = xS \\ (Sx)(Sy) = Sy \end{cases}$

Proviamo ora che S è prodotto diretto di A e B.

Siano $p : S \to A, q : S \to B$ due applicazioni così definite

$$p(x) = xS \ , \quad q(x) = Sx.$$

Proviamo che p e q sono epimorfismi. Intanto sono banalmente suriettive.

(*) Recentemente, è stato dimostrato (v. [4] (Bibl.)) il seg. Teorema più generale:
TEOREMA.- Un semigruppo S è fattoriabile come $S=AB$, con A semigruppo zero-sinistro e B semigruppo zero-destro se e solo se S è completamente semplice non banale (né gruppo destro né gruppo sinistro) ed esiste un idempotente k tale che $kSk = k$.

Inoltre sono omomorfismi in quanto:

$p(xy) = xyS = xS = xSyS = p(x)p(y)$. (Analogamente per q).

Consideriamo ora il prodotto diretto AxB e sia $r : S \to AxB$ l'applicazione così definita $r(x) = (p(x),q(x))$.

La r è un omomorfismo, infatti:

$r(xy) = (xyS,Sxy) = (xS,Sy)$

$r(x)r(y) = (xS,Sx)\ (yS,Sy) = \Big((xS)(yS),(Sx)(Sy)\Big) = (xS,Sy)$.

La r è suriettiva, infatti:

$\forall (xS,Sy) \in AxB\ \exists\ xy \in S \ni' \ r(xy) = (xyS,Sxy) = (xS,Sy)$.

La r è iniettiva, cioé $r(x) = r(y) \Longrightarrow x = y$, infatti:

$r(x) = r(y) \Longrightarrow (xS,Sx) = (yS,Sy) \Longrightarrow xS = yS,\ Sx = Sy$ e per la rettangolarità di S si ha che : $\{x\} = xSx = ySx = ySy = \{y\}$, da cui $x = y$.

In conclusione S è isomorfo al prodotto diretto di A e B.

Proviamo ora che la precedente fattorizzazione di S è unica a meno di isomorfismi, cioé presa un'altra fattorizzazione di S questa è isomorfa alla prima, più precisamente se $A' \times B'$ è un'altra fattorizzazione di S faremo vedere che esiste un isomorfismo tra A ed A' e un isomorfismo fra B e B'.

Sia $r': S \to A'$ un isomorfismo, dove A' è un semigruppo zero-sinistro e B' è un semigruppo zero-destro, e $A'xB'$ il loro prodotto diretto. Definiamo due applicazioni come segue:

$p' : S \to A'$ e $q' : S \to B'$ da $r'(x) = (p'(x), q'(x))$.

Le due applicazioni sono suriettive, infatti essendo r' sopra, cioé

$\forall (a',b') \in A'xB'\ \exists\ x \in S \ni' \ r'(x) = (p'(x),q'(x)) = (a',b')$, risulta che:

$\forall a' \in A'\ \exists\ x \in S \ni' \ p'(x) = a'$ e $\forall b' \in B'\ \exists\ x \in S \ni' \ q'(x) = b'$

Inoltre p' e q' sono omomorfismi, infatti da $r'(xy) = r'(x)r'(y))$ e da $r'(xy) = \bigl(p'(xy),q'(xy)\bigr)$, $r'(x)\ r'(y) = \bigl(p'(x),q'(x)\bigr)\bigl(p'(y),q'(y)\bigr)$ si deduce che

$$\bigl(p'(xy),q'(xy)\bigr) = \bigl(p'(x),q'(x)\bigr)\bigl(p'(y),q'(y')\bigr) = \bigl(p'(x)p'(y),q'(x)\ q'(y)\bigr)$$

e quindi

$$p'(xy) = p'(x)p'(y) \quad \text{e} \quad q'(xy) = q'(x)q'(y).$$

Proviamo ora che $p(x) = p(y) \Longrightarrow p'(x) = p'(y)$.

Infatti se $p(x) = p(y)$, cioé $xS = yS$, risulta $p'(xS)= p'(x)p'(S) = p'(x$ (essendo A' un semigruppo zero-sinistro) e analogamente $p'(yS) = p'(y,$ e quindi $p'(x) = p'(y)$. (Analogamente per q').

Esistono perciò due epimorfismi $f:A \to A'$ e $g : B \to B'$ tali che $p' = fp$ e $q' = gq$. La f e la g sono anche iniettive, infatti siano $xS \neq yS$ e supponiamo per assurdo che $f(xS = f(yS)$.

Essendo $xyS = xS$ si avrebbe $xyS \neq yS$ quindi $xy \neq y$. Ma $p'(xy = fp(xy) = f(xyS) = f(xS) = f(yS) = fp(y) = p'(y)$ e $q'(xy) = gq(xy) = g(Sxy)= g(Sy) = gq(y) = q'(y)$.

Quindi avremmo $r'(xy) = r'(y)$: assurdo perché r' è un isomorfismo e quindi iniettivo e $xy \neq y$. Quindi f e g sono biunivoche.

In conclusione se S è isomorfo, tramite r', al prodotto diretto $A'xB'$ essendo A' isomorfo ad A tramite f e B' isomorfo a B tramite g, la nuova fattorizzazione di S è isomorfa alla precedente, così il lemma è completamente provato

<u>Osservazione 1.1.</u>-

Gli insiemi A e B precedentemente definiti sono gli insiemi di tutti gli ideali minimali destri e sinistri di S rispettivamente.

Infatti per ogni $x\in S$ xS è un ideale destro di S in quanto

$(xS)S \subseteq xS$. Inoltre è minimale; infatti supponiamo che esista un altro ideale destro K t.c. $K \subseteq xS$, allora preso $xs \in xS$, essendo K non vuoto e incluso in xS, risulterà ogni suo elemento del tipo $x\bar{s}$, ora preso $x\bar{s} \in K$, si ha che $x\bar{s}x = x$ (poiché S è rettangolare) e $xs = (x\bar{s}x)s = (x\bar{s})(xs) \in KS \subseteq K$, quindi ogni elemento xs di xS è anche elemento di K, per cui $K = xS$ e xS è minimale.

Osservazione 1.2.-

Abbiamo visto in un lemma precedente l'equivalenza tra le due identita $abc = ac$ e $aba = a$ $\forall a,b,c \in S$, dove S è una banda.
Quindi ciascuna di esse può definire le rettangolarità di una banda. Diamo ora altre identità in bande che sono equivalenti alla rettangolarità:

1 $ax_1x_2\ldots x_na = a$ $(n \geq 1)$

2 $ax_1x_2\ldots x_{i-1}ax_i\ldots x_{j-1}ax_j\ldots x_na = a$ $(1 < i < j <\ldots n)$

3 $ax_1x_2\ldots x_nb = ab$ $(n \geq 1)$

4 $ax_1\ldots x_{i-1}c_1x_i\ldots x_{j-1}c_2x_j\ldots x_nb = ab$
dove c_k è a oppure b $\forall k$ $(1 < i < j <\ldots <n)$

5 $ax_1x_2\ldots x_nb = ax_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}b$ $(1 \leq i_1<i_2\ldots<i_r \leq n,\ r\ \ n)$

Sorge ora il problema di determinare le condizioni perché tali identità siano equivalenti alla rettangolarità. Ciò sarà discusso successivamente e troveremo che l'equivalenza delle precedenti identità con la rettangolarità è solo un caso particolare del Teorema 6.2.

Osservazione 1.3.

Le due identità, $aba = a$ e $abc = ac$, non sono equivalenti per semigruppi qualsiasi. La prima infatti definisce una banda rettangolare, ma la seconda definisce una classe un poco più ampia di semigruppi che contengono bande rettangolari.

Esempio di banda.-

Sia S un semigruppo commutativo.
Per ogni elemento a di S definiamo il seguente sottinsieme:
$K_a = \{b \in S / b^n = ca,\ a^m = d\, b$, per qualche $c,d \in S$, con $m,n \in \mathbb{N}\}$.
Si vede facilmente che la relazione ρ,

$$a \rho b \Longleftrightarrow b \in K_a \qquad (a,b \in S),$$

è una relazione di equivalenza in S.

Infatti, evidentemente $a \rho a$; e $a \rho b$ implica $b \rho a$.
Inoltre, se $b \in K_a$ e $c \in K_b$ $(a,b,c \in S)$, esistono $x,y \in S$ ed $m,n \in \mathbb{N}$, tali che $b^n = x\,a$, $c^m = y\,b$, dunque $c^{mn} = y^n b^n = (y^n x)a$. Analogamente si dimostra che esistono un elemento $z \in S$ ed un $t \in \mathbb{N}$ tali che $a^t = zc$, e pertanto $c \in K_a$. Dunque se $a \rho b$ e $b \rho c$ ne segue $a \rho c$.
I sottinsiemi $K_a (a \in S)$ sono detti componenti archimedee di S.

Proposizione 1.-

Se $x \in K_a$, $y \in K_b$, allora $xy \in K_{ab}$ $(a,b \in S)$.

Dimostrazione. - Sia $x \in K_a$, $y \in K_b$; allora è $x^m = v\,a$, $y^n = z\,b$, per opportuni $v,z \in S$, $m,n \in \mathbb{N}$. Supposto $m \geq n$, abbiamo

$$(xy)^m = x^m y^m = v\,a\,y^{m-n}\,z\,b = w\,a\,b.$$

Analogamente si prova che esistono un elemento $w' \in S$ ed un $k \in \mathbb{N}$ tali che $(ab)^k = w'xy$. Perciò $xy \in K_{ab}$.

Sia $E = K_a, a\in S$; per la Proposizione 1 è lecito definire in E la seguente moltiplicazione:

$$K_a \cdot K_b = K_{ab} .$$

Tale moltiplicazione, evidentemente, è associativa, dunque E è un semigruppo

<u>Proposizione 2.</u> -

Ogni $K_a \in E$ è un sottosemigruppo di S ed E è una banda.

<u>Dimostrazione.</u> -

Siano $x,y \in K_a$; allora, per la Proposizione 1., $xy \in K_{a^2}$; ma, evidentemente, $a^2 = a$, dunque $xy \in K_a$, onde K_a è un sottosemigruppo di S

Infine $K_a \cdot K_a = K_{a^2} = K_a$, dunque E è idempotente.

2.- Teorema di decomposizione. -

<u>Teorema 2.1.</u>-

Data una banda S esiste un omomorfismo $\emptyset$ di S su una banda commutativa T tale che l'immagine inversa di ogni elemento di T è una banda rettangolare. L'omomorfismo $\emptyset$ è il più debole, nel senso che ogni altra immagine omomorfa commutativa di S è anche un'immagine omomorfa di

<u>Dimostrazione.</u> -

Dalla transitività e dalla compatibilità a sinistra e a destra della P (Lemmi 1.10 e 1.11) segue che P è compatibile, cioé definisce un omomorfismo $\emptyset$, precisamente l'epimorfismo canonico di S su S/P; per la compatibilità di P risulta che S/P è un semigruppo.

Proviamo che S/P e commutativo e idempotente. Vale la commutatività perché per ogni $a,b \in S$:

$ab(ba)ab = ab^2a^2b = (ab)(ab) = ab$ e

$ba(ab)ba = ba^2b^2a = (ba)(ba) = ba,$ cioè $abPba$.

Inoltre $\forall a \in S: a^2Pa$, perché $a^2a\,a^2 = a$ e $a\,a^2a = a$, quindi S/P è idempotente.

Proviamo ora che l'immagine inversa di ogni elemento di S/P (cioè ogni classe di equivalenza mod. P) è una banda rettangolare (cioè una banda anticommutativa).

Infatti presi due elementi $a,b \in S$ in una stessa classe d'equivalenza,il loro prodotto sta ancora nella stessa classe, cioè $aPb \Longrightarrow aPab$, in quanto, per i lemmi 1.9 e 1.8, risulta $aPb \Longrightarrow aRab \Longrightarrow aPab$. Inoltre aPa^2 e $a^2 = a$ quindi ogni classe è una banda.

Proviamo che è anche anticommutativa. Infatti presi a,b nella stessa classe (cioè aPb) con $a \neq b$ risulta:

$(ab)(ba) = abba = aba = a$ e $(ba)(ab) = b\,a\,a\,b = b\,a\,b = b$,
se fosse $a\,b = b\,a$ sarebbe anche $(ab)(ba) = (ba)(ab)$ cioè $a = b$, contro l'ipotesi, per cui $ab \neq ba$.

Proviamo ora che l'omomorfismo $\emptyset$ è il più debole, nel senso che ogni altra immagine omomorfa commutativa di S è anche immagine omomorfa di S/P.

Sia Q un'altra relazione d'equivalenza compatibile, Q quindi definisce l'epimorfismo canonico di S sulla banda commutativa S/Q (stiamo supponendo per ipotesi che S/Q sia commutativa).

Siano $ab \in S$ t.c. aPb, ora poiché per ogni $a,b \in S$ $a\,b\,Q\,b\,a$ (in quanto S/Q è commutativa), dal lemma 1.12 segue che è anche aQb, cioè $P \subseteq Q$. Allora, per il terzo teorema di omomorfismo sulle strutture, i semigruppi S/Q e $\frac{S/P}{Q/P}$ sono isomorfi, possiamo perciò considerare l'epimorfismo di S/P su S/Q che ad ogni classe mod. P associa la classe mod. Q che la contiene. Si è così trovato che un'altra qualsiasi immagine omomorfa commutativa S/Q di S è anche immagine omomorfa di S/P e quindi $\emptyset$ è l'omomorfismo più debole.

Una versione di tale teorema più chiara e moderna è la seguente:

<u>Teorema 2.1.-</u>

Una banda è un "semireticolo" di bande rettangolari.
Infatti data una banda S esiste un semireticolo Γ ed una famiglia disgiunta di bande rettangolari di S, con insieme di indici in Γ, $\{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, t.c.:

1) $S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$

2) $S_\gamma \; S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ $\qquad \forall\, \gamma,\delta \in \Gamma.$

Osserviamo che il semireticolo Γ è il semigruppo T del Teorema precedente in quanto ogni banda commutativa è un semireticolo; gli S_γ sono le immagini inverse degli elementi di T stesso, infatti esse costituiscono una partizione di S e, essendo bande anticommutative, sono semigruppi rettangolari.

Inoltre, presi $t,q \in T$ si prova facilmente che
$\Phi^{-1}(t)\,\Phi^{-1}(q) \subseteq \Phi^{-1}(tq)$, e quindi è vera anche la seconda proprietà sugli S.

3. - Semigruppi totali. -

Diamo ora una definizione interessante che è una generalizzazione della definizione di banda.

Un <u>semigruppo</u> S si dice <u>totale</u> se ogni suo elemento può essere scritto come prodotto di due lementi di S stesso, cioé $S^2 = S$, quindi

$\forall a \in S \;\; \exists\, b,c \in S \quad \ni' \quad a = bc.$

Vale la seguente implicazione: S banda $\Longrightarrow$ S semigruppo totale. Infatti $\forall a \in S$ con S banda $\exists\, a,a \in S \quad \ni' \quad a = a \cdot a$, quindi S è totale. Non vale naturalmente il viceversa .

Lemma 3.1.- Un semigruppo totale S è rettangolare se e solo se è soddisfatta l'identità $abc = ac \quad \forall a,b,c \in S$.

Dimostrazione.-

Sufficienza.

Sia S totale. Supponiamo per ipotesi che $abc = ac \quad \forall a,b,c \in S$. Preso allora $a \in S$: $a = xy$ per qualche elemento x,y di S. Allora $a^2 = (xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)x = xy = a$. Cosicché S è una banda, da cui, per il lemma 1.2. S è rettangolare.

Necessità:

Ovvia, perché ogni semigruppo rettangolare, per il lemma 1.2., soddisfa l'identità $abc = ac$, e quindi anche un semigruppo totale la soddisfa.

Teorema 3.1.-

Sia S un semigruppo che soddisfa l'identità $abc = ac$. Allora esiste un sottosemigruppo rettangolare R di S e una partizione di S, con R come insieme di indici tale che

$$S = \bigcup_{r \in R} S_r$$

dove $\quad S_r \cap S_t = \emptyset \quad$ se $\quad r \neq t$

$\qquad r \in S_r$

e $\qquad S_r\, S_t = \{r\, t\}$

Dimostrazione. -

Sia S un semigruppo che soddisfi l'identità $abc = ac$. Consideriamo l'applicazione $f : S \to S$ definita da $f(x) = x^2$. Allora f è un omomorfismo di S in S, infatti $f(xy) = (xy)^2 = x(yx)y = xy = x(xy)y = x^2y^2 = f(x)\,f(y)$.

Sia R l'immagine di S tramite f:

$$R = f(S) = \{x^2 / x \in S\}$$

Risulta che $R^2 \subseteq R$, infatti preso $a^2b^2 \in R^2$: $a^2b^2 = (ab)^2$ essendo f un omomorfismo, quindi $a^2b^2 \in R$, inoltre $R \subseteq S^2$ perché $x^2 \in S^2$ $\forall x^2 \in R$. Quindi $R^2 \subseteq R \subseteq S^2$.

Viceversa $S^2 \subseteq R \subseteq R^2$, infatti ogni elemento xy di S^2 è idempotente, perché $(xy)^2 = x(yx)y = xy$, quindi $xy \in R$; e $R \subseteq R^2$, in quanto $x^2 = xx = xx^2x = x^2x^2$. In conclusione $R^2 = R = S^2$.

Ora $R^2 = R$ ci dice che R è totale, e per il lemma 3.1. è rettangolare. Allora preso $r \in R$ e definito S_r come segue $S_r = \{x \in S / x^2 = r\}$, S si decompone nel seguente modo:

$S = \bigcup_{r \in R} S_r$, dove $r \in S_r$ e $S_r\,S_t = \{rt\}$. Infatti essendo R idempotente, in quanto rettangolare, risulta $r^2 = r$, da cui $r \in S_r$; e se $x \in S_r$, $y \in S_t$ allora $x^2 = r$, $y^2 = t$ e quindi $xy = x(xy)y = x^2y^2 = rt$, cioé $S_r\,S_t = \{rt\}$.

4. - Bande regolari. -

Una banda S si dice:

1) regolare a sinistra se $aba = ab$
2) regolare a destra se $aba = ba$
3) regolare se $abaca = abca$

per ogni $a,b,c \in S$

Seguono dalle definizioni i seguenti lemmi:

Lemma 4.1.-

Una banda S regolare a sinistra (destra) è regolare. Infatti per ogni $a,b \in S$ $aba = ab$ per ipotesi, presi dunque $a,b,c \in S$: $abaca = (aba)ca=abca$
Analogamente a destra.

Lemma 4.2.-

Il prodotto diretto di bande regolari (a sinistra, a destra) è anch'esso regolare (a sinistra, a destra).

Basta tener conto infatti della definizione di prodotto diretto tra semigruppi e della definizione di bande regolari (a sinistra, a destra).

Lemma 4.3.-

Ogni sottosemigruppo di una banda regolare (a sinistra, a destra) è anch'esso regolare (a sinistra, a destra).

Lemma 4.4.-

Una banda S zero-sinistra (zero-destra) è regolare a sinistra (a destra).
Infatti $\forall a,b \in S$:

$$ab = a \ \big(ba = a\big) \Longrightarrow aba = (ab)a = ab\Big(aba = a(ba) = ba\Big)$$

Lemma 4.5.-

Una banda rettangolare S è regolare.
Per il lemma 1.2. una banda rettangolare soddisfa l'identità $abc = ac$, allora $abaca = (ab)a(ca) = abca, \quad \forall a,b,c \in S$.

Lemma 4.6.-

Una banda è zero-sinistra (zero-destra) se e solo se è rettangolare e regolare a sinistra (a destra).

La condizione è sufficiente, infatti $\forall a,b \in S$:
$aba = a$, $aba = ab \Longrightarrow ab = a$. Analogamente a destra.
La condizione è necessaria, infatti per il lemma 4.4. ogni banda zero-sinistra è regolare a sinistra, e ogni banda zero-sinistra è rettangolare. Analogamente a destra.

Lemma 4.7.-

Una banda S è commutativa se e solo se è regolare a sinistra e a destra.

Infatti $\forall a,b \in S$.
$ab = ba \Longleftrightarrow (aba = ab \quad e \quad aba = ba)$

Lemma 4.8.-

Un semigruppo totale S è una banda regolare a sinistra (a destra) se e solo se soddisfa all'identità $aba = ab$ ($aba = ba$).

Dimostrazione. -

La condizione è necessaria banalmente.
La condizione è sufficiente, basterà provare che S è idempotente.
Infatti per ipotesi è $S^2 = S$ e quindi preso $x \in S$ risulta $x = ab$ con $a,b \in S$. Allora $x^2 = (ab)(ab) = a(bab) = a(ba) = aba = ab = x$, quindi S è idempotente.

Diamo ora altre definizioni.

Sia S una banda. Allora per il Teorema 2.1 esiste un semireticolo e una famiglia disgiunta di sottosemigruppi rettangolari di S, con insieme degli indici in Γ, S_γ $\gamma \in \Gamma$, tale che

(i) $$S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$$

(ii $\quad S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta} \qquad \forall_\gamma, \delta \in \Gamma$

Inoltre Γ è unico a meno di isomorfismi e di conseguenza così è per gli S_γ .

Diremo Γ <u>semireticolo strutturale</u> , e S_γ il <u>γ-nucleo.</u>

Un omomorfismo $p : S \to \Gamma$, tale che $p(S_\gamma) = \gamma$, detto <u>omorfismo naturale;</u> p è un omomorfismo, infatti, essendo $S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$, per ogni $x,y \in S$ esistono $S_\gamma, S_\delta \subseteq S$ t.c. $x \in S_\gamma$, $y \in S_\delta$, allora $p(x) = \gamma$, $p(y) = \delta$, e poiché $xy \in S_\gamma S_\delta$ e $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ risulta $xy \in S_{\gamma\delta}$ e quindi $p(xy) = \gamma\delta$. Allora $p(x)p(y) = p(xy)$.

In questo caso scriveremo $S \sim \Sigma\{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e la diremo <u>decomposizione strutturale</u> di S.

Diamo ora alcuni corollari relativi al Teorema 2.1.

<u>Corollario 4.1.</u>-

Ogni nucleo S_γ è un sottosemigruppo rettangolare massimale di S. Inoltre ogni seottosemigruppo rettangolare di S è contenuto in uno ed un solo nucleo.

<u>Dimostrazione.</u> -

Sia $S \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$ la decomposizione strutturale di S e sia $p : S \to$ l'omomorfismo naturale. Se R è un sottosemigruppo rettangolare di S, allora p(R) è anche un sottosemigruppo rettangolare di Γ, essendo p un omomorfismo. Poiché Γ è un semireticolo, p(R) è ridotto ad un solo elemento, infatti consideriamo due elementi α, β di p(R) e supponiamo per assurdo che sia $\alpha \neq \beta$. Γ, essendo un semireticolo, è ordinato rispetto a la relazione $\leq$ così definita: $\alpha \leq \beta \iff \alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$. Ora si possono ver -

ficare due casi per gli elementi α, β di $p(R)$ prima considerati: che α e β siano confrontabili, o che non lo siano. Nel primo caso può accadere, per esempio, che $\beta \leq \alpha$, allora $\alpha\beta = \beta\alpha = \beta$ e $\alpha(\beta\alpha) = \alpha\beta = \beta$, d'altra parte $\alpha\beta\alpha = \alpha$ (essendo $p(R)$ rettangolare), quindi avremmo $\alpha = \beta$, che è assurdo.

Supponiamo ora invece che α e β non siano confrontabili, allora $\alpha \not\leq \beta$ $\beta \not\leq \alpha$, cioè $\alpha\beta \neq \beta$ e $\alpha\beta \neq \alpha$, ma $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e $\alpha\beta\alpha = \alpha(\beta\alpha)$ $= \alpha(\alpha\beta) = \alpha\alpha\beta = \alpha\beta$ (perché Γ è un semigruppo idempotente commutativo), quindi sarebbe $\alpha\beta = \alpha$, assurdo.

Diciamo allora γ l'unico elemento di $p(R)$, cioè $\gamma = p(R)$; si ha allora che $R \subseteq p^{-1}(\gamma) = S_\gamma$. Cioè R è contenuto in uno ed un solo S_γ, poiché gli S_γ sono disgiunti. D'altronde S_γ è rettangolare per ogni $\gamma \in \Gamma$ (per il Teorema 2.1), quindi ogni nucleo S_γ è un sottosemigruppo rettangolare massimale, perché ogni altro sottosemigruppo rettangolare R di S è incluso in S_γ.

Corollario 4.2.-

Per ogni omomorfismo (suriettivo) $q : S \to \Delta$, dove Δ è un semireticolo, esiste un unico omomorfismo (suriettivo) $f : \Gamma \to \Delta$ tale che $q = fp$, dove $p : S \to \Gamma$ è l'omomorfismo naturale; cioè f rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \Delta \\ \Gamma \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. -

Poiché $q(S_\gamma)$ è rettangolare, in quanto S_γ è rettangolare e q è un omomorfismo, esso è ridotto ad un unico elemento in Δ. Allora esiste un'applicazione $f : \Gamma \to \Delta$ definita da $f(\gamma) = q(S_\gamma)$; f è un omomorfismo, infatti $f(\gamma\delta) = q(S_{\gamma\delta})$; $f(\gamma)\cdot f(\delta) = q(S_\gamma)\cdot q(S_\delta)$, $q(S_\gamma)\, q(S_\delta) = q(S_\gamma S_\delta) \subseteq q(S_{\gamma\delta})$ e poiché $q(S_{\gamma\delta})$ ha un solo elemento: $q(S_\gamma S_\delta) = q(S_{\gamma\delta})$.

Inoltre q associa ad S_γ l'unico elemento di Δ $q(S_\gamma)$, $p(S_\gamma) = \gamma$ e $f(\gamma) = q(S_\gamma)$ quindi $f(p(S_\gamma)) = q(S_\gamma)$, se ne conclude che $q = fp$. L'unicità della f è immediata.

Corollario 4.3.-

Sia $q: S \to \Delta$ un omomorfismo suriettivo, dove Δ è un semireticolo. Se $q^{-1}(\delta)$ è rettangolare per ogni $\delta \in \Delta$, allora l'applicazione f definita prima è un isomorfismo. Più precisamente possiamo considerare Δ come il semireticolo strutturale di S, $q^{-1}(\delta)$ come il δ-nucleo e q come l'omomorfismo naturale, cioé $S \sim \Sigma\{q^{-1}(\delta)/\delta \in \Delta\}$

Dimostrazione. -

Poiché $q^{-1}(\delta)$ è rettangolare, esiste un unico $\gamma \in \Gamma$ t.c. $q^{-1}(\delta) \subseteq S_\gamma$ per il Corollario 4.1. Ora abbiamo $\gamma = p((S_\gamma) \supseteq pq^{-1}(\delta) = p(fp)^{-1}(\delta) =$

$= pp^{-1}f^{-1}(\delta) f^{-1}(\delta)$. Cioé $\forall\ \delta \in \Delta$ $\exists|\ \gamma \in \Gamma$ t.c. $\gamma \supsetneq f^{-1}(\delta)$, da cui $f(\gamma) \supseteq \delta$, con $f(\gamma) = q(S_\gamma)$; e quindi $q(S_\gamma) \supseteq \delta$, ma $q(S_\gamma)$ è ridotto ad un solo elemento perciò $q(S_\gamma) = \delta$. In conclusione $\forall \delta \in \Delta$ $\exists|\ \gamma \in \Gamma$ t.c. $f(\gamma) = \delta$, cioé f è bigettiva.

Teorema 4.1.-

Una banda è regolare a sinistra (a destra), se e solo se i suoi nuclei sono tutti zero-sinistri (zero-destri).

Dimostrazione. -

Condizione necessaria.

Sia S una banda regolare a sinistra. Poiché ciascun nucleo, S_γ di S è rettangolare, esso è anche regolare a sinistra per il lemma 4.3.. Inoltre ogni S_γ deve essere zero-sinistro per il lemma 4.6. .

Condizione sufficiente.

Sia ogni nucleo di S zero-sinistro. Siano $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Allora $ab, ba \in S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$, in quanto $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ e Γ è commutativo. Perciò, essendo $S_{\alpha\beta}$ zero-sinistro, abbiamo $aba = ab^2a = (ab)(ba) = ab$, il che prova che S è regolare a sinistra.

Sia Γ un semireticolo, siano A e B bande aventi Γ come loro semireticolo strutturale. Siano $A \sim \Sigma\,\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\{B_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ le loro decomposizioni strutturali. Costruiamo il prodotto diretto $D = A\times B$. Allora i $C_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$ possono essere considerati come sottosemigruppi rettangolari di D. Anche $C = \bigcup\,\{C_\gamma / \gamma \in\Gamma\}$ è un sottosemigruppo di D. Inoltre la decomposizione strutturale di C è $C \sim \Sigma\,\{C_\gamma / \gamma\in\Gamma\}$.

Siano $p : A \to \Gamma$ e $q : B \to \Gamma$ gli omomorfismi naturali. Allora

risulta $C = \{(x,y) : x \in A, y \in B,\ p(x) = q(y)\}$,

in quanto $p(A_\gamma) = \gamma$ e $q(B_\gamma) = \gamma$, e $r : C \to \Gamma$ definito da $r\big((x,y)\big) = p(x) = q(y)$ è l'omomorfismo naturale.

Diciamo C il <u>prodotto retratto</u> di A e B rispetto a Γ e notiamo che tale prodotto dipende non solo da A, B e Γ ma anche dagli omomorfismi naturali p e q.

Lemma 4.9.-

Il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è regolare.

Dimostrazione.-

Poiché il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è un sottosemigruppo del loro prodotto diretto, la tesi segue dai lemmi 4.1, 4.2, 4.3. .

Proveremo ora l'inverso di questo lemma, esso svolge un ruolo essenziale nel teorema fondamentale delle bande regolari.

Lemma 4.10.-

Sia $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ una banda regolare. Allora esistono una banda regolare a sinistra $A \sim \Sigma \{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e una banda regolare a destra $B \sim \Sigma \{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ che hanno lo stesso semireticolo strutturale Γ, tali che S sia isomorfo al prodotto retratto di A e B rispetto a Γ.

Dimostrazione. -

Sia $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ una banda regolare. Poiché ogni γ-nucleo S_γ è rettangolare possiamo assumere, per il lemma 1.1, che $S_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$, dove A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro. Siano $A = \cup \{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, $B = \cup \{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, $T = A \times B$. Allora S può essere identificato con un sottoinsieme di T. Proveremo che A e B possono essere considerati come semigruppi idempotenti.

Siano $a \in A_\alpha$, $c \in A_\beta$, $b, b' \in B_\alpha$, $d, d' \in B_\beta$.

Allora $(a,b), (a,b') \in S_\alpha$, $(c,d), (c,d') \in S_\beta$.

Poniamo $(e,f) = (a,b)(c,d)$, $(e',f') = (a,b')(c,d')$.

Allora (e,f), $(e',f') \in S_{\alpha\beta}$ e precisamente $e,e' \in A_{\alpha\beta}$, $f,f' \in B_{\alpha\beta}$.

Ora poiché $A_{\alpha\beta}$ è zero-sinistro e $B_{\alpha\beta}$ è zero-destro risulta

$(e,f)(e',f') = (e,f')$.

D'altra parte abbiamo

$(e,f)(e',f') = (a,b)(c,d)(a,b')(c,d') =$

$= (a,b'b)(c,d'd)(a,bb')(c,d') =$ (essendo B_α e B_β zero-destri)

$= (a,b')(a,b)(c,d')(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') =$

$= (a,b')(a,b)(a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') =$ (usando ripetutamente la rettangolarità)

$= (a,b'bb')(c,d')(a,b)(c,d)(a,bb')(c,d') =$

$= (a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b')(c,d') =$

$=(e',f)(e,f)(e',f') =$ (dalla definizione)

$= (e',f')$ (dalla rettangolarità di $S_{\alpha\beta}$).

Quindi $(e,f') = (e',f')$ o $e = e'$.Perciò e è determinato soltanto da a e c e non dipende da b o da d. Similmente f è determinato solo da b e d. Ora possiamo definire $m = A \times A \to A$, $n : B \times B \to B$ da $\big(m(a,c),n(b,d)\big) = (a,b)(c,d) = (e,f)$.

Perciò A e B diventano sistemi moltiplicativi in cui m e n sono le loro moltiplicazioni e A_γ e B_γ sono sottosistemi con A_γ banda zero-sinistra e B_γ banda zero-destra. Anche $T = A \times B$ è un sistema moltiplicativo. Consideriamo la proiezione $p : T \to A$ definita da $p\big((a,b)\big) = a$ e la proiezione $q : T \to B$ definita da $q\big((a,b)\big) = b$. Tali applicazioni p e q, con dominio ristretto a $S \subseteq T$, sono evidentemente omomorfismi e risulta $A = p(S)$ e $B = q(S)$. Poiché gli omomorfismi conservano ogni relazione definita da identità, ne consegue che associatività e idempotenza si conservano in A e B, essendo S una banda. Se ne conclude che A e B sono bande.

Poiché A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro essi sono rettangolari e poiché Γ è un semireticolo $A \sim \Sigma\{A_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\{B_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ diventano le decomposizioni strutturali di A e B per il Corollario 4.3. relativo al Teorema 2.1. Allora esiste una banda regolare a sinistra A e una banda regolare a destra B tale che S è il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ.

<u>Teorema 4.2.</u>- Una banda è regolare se e solo se essa è il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra.

<u>Dimostrazione</u>. -

Il lemma 4.9 prova che la condizione è sufficiente, e il lemma 4.10 prova che la condizione è necessaria.

<u>Corollario 4.4.</u>- Ogni banda regolare è contenuta nel prodotto diretto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra.

<u>Dimostrazione</u>. -

Segue immediatamente dal Teorema 4.1.

<u>Corollario 4.5.</u>-

Sia S il prodotto retratto delle bande A e B rispetto a Γ e sia T il prodotto retratto delle bande C e D rispetto a Δ, dove $A \sim \Sigma\{A_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ e $C \sim \Sigma\{C_\delta/\delta\in\Delta\}$ sono regolari a sinistra e $B \sim \Sigma\{B_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ e $D \sim \Sigma\{D_\delta/\delta\in\Delta\}$ sono regolari a destra.

Sia $k : S \to T$ un omomorfismo, allora esiste un omomorfismo $h : \Gamma \to \Delta$ e due omomorfismi $f : A \to C$ e $g : B \to D$ soddisfacenti le seguenti condizioni:

(1) $k(a,b) = \big(f(a),g(b)\big)$

(2) $hp = rf$ e $hq = sg$, cioè tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[d, "h"] & B \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "r"] & \Delta & D \arrow[l, "s"'] \end{tikzcd}$$

sia analitico, dove p,q,r,s sono gli omomorfismi naturali.

<u>Dimostrazione</u>. -

(1) Sia dunque $k : S \to T$ un omomorfismo e siano $u : S \to \Gamma$, $v : T \to \Delta$ gli omomorfismi naturali. Allora poiché $vk : S \to \Delta$ è un omomorfismo, per il Corollario 4.2, esiste un unico omomorfismo $h : \Gamma \to \Delta$ t.c. $vk = hu$

Quindi $v(k(S_\gamma)) = h\,u(S_\gamma) = h(\gamma)$, e così $k(S_\gamma) \subseteq v^{-1}(\delta) = T_\delta$, dove $h(\gamma) = \delta$. Ora l'omomorfismo $k_\gamma : S_\gamma \to T_\delta$ definisce in modo unico gli omomorfismi $f_\gamma : A_\gamma \to C_\delta$ e $g_\gamma : B_\gamma \to D_\delta$, tali che $k_\gamma(a,b) = (f_\gamma(a), g_\gamma(b))$, dove k_γ è l'omomorfismo k col suo dominio ristretto a S_γ

Poiché A e B sono rispettivamente l'unione disgiunta degli A_γ e dei B_γ, con $\gamma \in \Gamma$, f_γ e g_γ determinano univocamente le applicazioni $f : A \to C$ e $g : B \to D$ t.c.

$$f(a) = f_\gamma(a) \qquad \text{se} \quad a \in A_\gamma$$

$$g(b) = g_\gamma(b) \qquad \text{se} \quad b \in B_\gamma$$

Ne segue che $k(a,b) = \big(f(a), g(b)\big)$ infatti, se $a \in A_\gamma$ e $b \in B_\gamma$, si ha: $k(a,b) = k_\gamma(a,b) = \big(f_\gamma(a), g_\gamma(b)\big) = \big(f(a), g(b)\big)$.

Quindi se $(a,b) \in S$ e $(a',b') \in S$, essendo $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ per $\gamma, \delta \in \Gamma$ abbiamo che:

$$(f(aa'), g(bb')) = k(aa',bb') = k\big((a,b)(a',b')\big) = k(a,b)\, k(a',b') =$$

$$= \big(f(a), g(b)\big)\big(f(a'), g(b')\big) = \big(f(a)f(a'), g(b)g(b')\big),$$

il che prova che f e g sono omomorfismi.

(2) Presa ora la coppia $(a,b) \in S_\gamma$ ne segue che $\big(f(a), g(b)\big) = k(a,b) \in$ dove $\delta = k(\gamma)$, e quindi $rf(a) = \delta = h(\gamma) = hp(a)$, cioè $rf = hp$. Analogamente si prova che $sg = hq$.

Corollario 4.6.-

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'omomorfismo k del Corollario 4.5 sia 1) iniettivo, 2) suriettivo, 3) biiettivo è che esistono rispettivamente gli omomorfismi h, f, g che siano tutti 1) iniettivi, 2) suriettivi, 3) biiettivi, soddisfacenti tutte le condizioni del Corollario 4.5.

Dimostrazione. -

La condizione è sufficiente, infatti considerati gli omomorfismi h, f, g soddisfacenti tutte le condizioni del Corollario 4.5 e che siano 1) iniettivi, 2) suriettivi, 3) biiettivi, si può considerare l'omomorfismo $k : S \to T$ definito da $k(a,b) = \big(f(a), g(b)\big)$; si vede facilmente che k è rispettivamente 1) iniettiva, 2) suriettiva, 3) biiettiva.

La condizione è necessaria, infatti sia 1) k iniettivo. Allora $k^{-1}(T_\delta)$ è rettangolare se non è vuoto, e così esso è contenuto in un solo S_δ per il Corollario 4.1.

Quindi h è iniettivo. Facilmente si prova che anche f e g sono iniettivi.

2) Sia k suriettivo. Allora

$h(\Gamma) = h(u(S)) = v\, k(S) = v(T) = \Delta$, che prova che k è suriettivo. Ovviamente anche f e g sono suriettivi.

3) la biiettività segue banalmente dall'iniettività e dalla suriettività.

Il caso 3) del precedente Corollario può essere riesposto come segue:

Corollario 4.7.-

La decomposizione di una banda regolare nel prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è unica a meno di isomorfismi.

5. - Bande normali.

In questo paragrafo daremo il teorema strutturale di bande normali ed alcuni contenuti rilevanti.

Una banda S si dice

(1) normale a sinistra (a destra) se $axy = ayx$ $(xya = yxa)$

(2) normale se $axya = ayxa$

(3) semiregolare a sinistra (a destra) se $axy = axyayxy$ $(xya = xyxaxya)$

(4) seminormale a sinistra (a destra) se $axy = axyay$ $(xya = xaxya)$

(5) quasinormale a sinistra (a destra) se $axy = axay$ $(xya = xaya)$

per ogni $a,x,y \in S$.

Valgono i seguenti lemmi:

Lamma 5.1.-

Se S è normale (a sinistra, a destra) allora S è regolare (a sinistra, a destra).

Dimostrazione. -

Presi $a,x,y \in S$, supposta S normale a sinistra, normale , risulta rispettivamente

$axy = ayx \Longrightarrow axa = aax = ax$

$axya = ayxa \Longrightarrow axaya = a(xa)ya = ay(xa)a = ayxa = axya$

E quindi S è rispettivamente regolare a sinistra, regolare.

Lemma 5.2.-

Se S è normale e regolare a sinistra (a destra), allora S è normale a sinistra (a destra).

Dimostrazione. -

Per ogni $a,x,y \in S$ risulta:

$axya = ayxa, axa = ax \Longrightarrow axy = axya = ayxa = axy.$

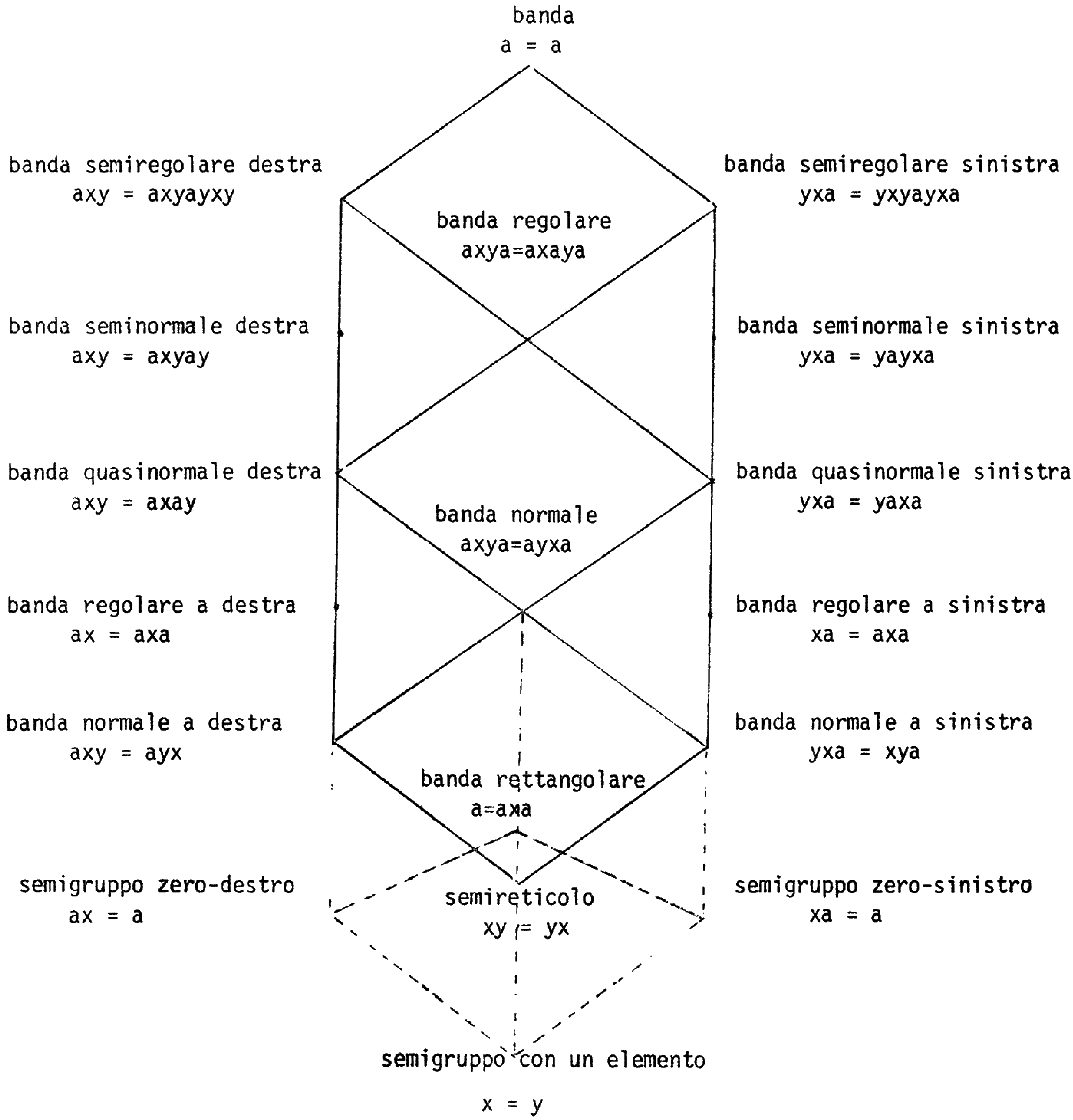
Lemma 5.3.-

Una banda è regolare se e solo se è contemporaneamente semiregolare a sinistra e a destra.

Lemma 5.4.-

Una banda è normale se e solo se è contemporaneamente quasi-normale a sinistra e a destra.

La precedente classificazione delle bande può essere rappresentata dalla seguente Tavola 1:


banda
a = a
banda semiregolare destra
axy = axyayxy
banda semiregolare sinistra
yxa = yxyayxa
banda regolare
axya=axaya
banda seminormale destra
axy = axyay
banda seminormale sinistra
yxa = yayxa
banda quasinormale destra
axy = axay
banda quasinormale sinistra
yxa = yaxa
banda normale
axya=ayxa
banda regolare a destra
ax = axa
banda regolare a sinistra
xa = axa
banda normale a destra
axy = ayx
banda normale a sinistra
yxa = xya
banda rettangolare
a=axa
semigruppo zero-destro
ax = a
semireticolo
xy = yx
semigruppo zero-sinistro
xa = a
semigruppo con un elemento
x = y

TAV. 1

Teorema 5.1.-

Una banda $S \sim \Sigma\{S_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ è normale a sinistra (a destra) se e solo se ogni S_γ è zero-sinistro (zero-destro) ed esiste una famiglia di funzioni $\Phi = \{\Phi^\alpha_\beta : \alpha \geq \beta,\ \alpha,\beta\in\Gamma\}$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1) $\Phi^\alpha_\beta : S_\alpha \to S_\beta$ per $\alpha \geq \beta$

2) Φ^α_α è l'applicazione identica

3) $\Phi^\beta_\gamma\ \Phi^\alpha_\beta = \Phi^\alpha_\gamma$ per $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

4) $ab = \Phi^\alpha_{\alpha\beta}(a)$ $(ab = \Phi^\beta_{\alpha\beta}\ (b))$ per $a \in S_\alpha$,

Dimostrazione. -

Sia $S \sim \Sigma\{S_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ normale a sinistra. Allora per il Lemma 5.1. S è regolare a sinistra. Perciò ogni S_γ è zero-sinistro per il Teorema 4.1. Consideriamo ora $\alpha,\beta\in\Gamma$ con $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$, $x,y \in S_\beta$. Allora dalla normalità a sinistra di S e dal fatto che ogni S_γ è zero-sinistro si ha:

$$ax = axy = ayx = ay$$

$\left(\beta \leq \alpha \Longleftrightarrow \alpha\ \beta = \beta\alpha = \beta\right.$, quindi $\left.S_\alpha\ S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta\right)$

Possiamo considerare allora l'applicazione $\phi^\alpha_\beta : S_\alpha \to S_\beta$ così definita $a \to \phi^\alpha_\beta(a) = a\,S_\beta$, e siamo sicuri che è un'applicazione perché aS_β è ridotto ad un solo elemento, per quanto visto prima.

E' facile così provare le condizioni 2),3),4) della tesi.

2) $\Phi^{\alpha}_{\alpha}(a) = aS_{\alpha} = a$ perchè S_{α} è zero-sinistro.

3) $\Phi^{\beta}_{\gamma}(\Phi^{\alpha}_{\beta}(a)) = \Phi^{\beta}_{\gamma}(a\, S_{\beta}) = a\, S_{\beta} S_{\gamma} \subseteq a\, S_{\beta\gamma} = a\, S_{\gamma} = \Phi^{\alpha}_{\gamma}(a)$

4) $\Phi^{\alpha}_{\alpha\beta}(a) = a\, S_{\alpha\beta} = a\, S_{\beta} = ab$

Così la condizione necessaria del teorema è provata; la condizione sufficiente è contenuta nel seguente teorema:

Teorema 5.2.-

Sia Γ un semireticolo. Sia $\{S_{\gamma}/\gamma\in\Gamma\}$ una famiglia disgiunta di insiemi. Sia $\Phi = \{\Phi^{\alpha}_{\beta} : \alpha \geq \beta \;, \alpha, \beta\in\Gamma\}$ una famiglia di applicazioni soddisfacenti le condizioni 1),2),3) del Teorema 5.1.

Sia $S = \cup\{S_{\gamma}/\gamma\in\Gamma\}$. Allora S con la moltiplicazione definita da 4) del teorema 5.1 diventa una banda normale a sinistra (a destra), la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\{S_{\gamma}/\gamma\in\Gamma\}$. Inoltre una qualunque banda normale a sinistra (destra) si può ottenere mediante questo procedimento a meno di isomorfismi.

Teorema 5.3.

Una banda normale a sinistra (a destra) è isomorfa al prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro (zero-destro) e di un semireticolo se e solo se ciascuna funzione di Φ del Teorema 5.2. è biiettiva.

Teorema 5.4.

Una banda è normale se e solo se essa è il prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra.

Dimostrazione. -

Proviamo prima la condizione necessaria:

Sia S una banda normale, essa è regolare per il Lemma 5.1 . Perciò per il Teorema 4.2. S è il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ, dove Γ è il semireticolo strutturale di S e A (B) è un semigruppo regolare a sinistra (a destra), avente Γ come suo semireticolo strutturale. Poiché $A(B)$ è normale e regolare a sinistra (a destra), esso deve essere normale a sinistra (a destra) per il Lemma 5.2.
La condizione sufficiente è ovvia.

Teorema 5.5.-

Una banda $S \sim \Sigma\{A_\gamma \times B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ è normale se e solo se esistono due famiglie di funzioni $\Phi = \{\phi^\alpha_\beta : \alpha \geq \beta,\ \alpha,\beta \in \Gamma\}$, $\Psi = \{\Psi^\alpha_\beta : \alpha \geq \beta, \alpha,\beta \in \Gamma$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

1) $\phi^\alpha_\beta : A_\alpha \to A_\beta \quad , \Psi^\alpha_\beta : B_\alpha \to B_\beta \quad , \ \alpha \geq \beta$

2) ϕ^α_α e Ψ^α_α sono le funzioni identiche

3) $\phi^\beta_\gamma\, \phi^\alpha_\beta = \phi^\alpha_\gamma \ , \Psi^\beta_\gamma\, \Psi^\alpha_\beta = \Psi^\alpha_\gamma \quad , \ \alpha \geq \beta \geq \gamma$

4) $(a,b)(a',b') = \left(\phi^\alpha_{\alpha\beta}(a),\ \Psi^\beta_{\alpha\beta}(b')\right)$ se $(a,b) \in A_\alpha \times B_\alpha$, $(a',b') \in A_\beta \times B_\beta$

Dimostrazione. -

La condizione necessaria segue dai Teoremi 5.1 e 5.4. La sufficiente è contenuta nel Teorema 5.7 successivo.

Teorema 5.6.-

Una Banda $S \sim \Sigma\, \{S_\gamma \ / \ \gamma \in \Gamma\}$ è normale se e solo se esiste una famiglia di funzioni $\Theta = \{\nu^\alpha_\beta : \alpha \geq \beta,\ \ \alpha,\beta \in \Gamma\}$, tale che :

1) $\theta^\alpha_\beta : S_\alpha \to S_\beta \ , \quad \alpha \geq \beta$

2) θ^α_α è l'identità.

3) $\theta^{\beta}_{\gamma}\,\theta^{\alpha}_{\beta} = \theta^{\alpha}_{\gamma}$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

4) $ab = \theta^{\alpha}_{\alpha\beta}(a)\;\theta^{\beta}_{\alpha\beta}(b)$ se $a \in S_{\alpha}$, $b \in S_{\beta}$

Dimostrazione. -

La condizione necessaria segue dal Teorema 5.5 precedente. La condizione sufficiente è contenuta nel Teorema 5.8 seguente.

Teorema 5.7.-

Sia Γ un semireticolo. Siano $\{A_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$, $\{B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ due famiglie disgiunte di insiemi. Siano Φ , Ψ due famiglie di funzioni soddisfacenti le condizioni 1),2),3) del Teorema 5.5. Allora con la moltiplicazione definita dalla proprietà 4) del Teorema 5.5 , $S = U\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ diventa una banda normale, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\{A_{\gamma}\times B_{\gamma} / \gamma\epsilon\Gamma\}$.

Dimostrazione. -

Per il Teorema 5.2 $A = U\{A_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ e $B = U\{B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ risultano rispettivamente una banda normale a sinistra e una banda normale a destra le cui decomposizioni strutturali sono rispettivamente $A \sim \Sigma\,\{A_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\,\{B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$.

Per il Teorema 5.4 la banda $S = U\{A_{\gamma} x B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\,\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ è una banda normale, in quanto è prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra.

Teorema 5.8.-

Sia Γ un semireticolo. Sia $\{S_{\gamma}/\gamma\epsilon\Gamma\}$ una famiglia disgiunta di semigruppi rettangolari. Sia θ una famiglia di funzioni soddisfacente alle condizioni 1),2),3) del Teorema 5.6. Allora con la moltiplicazione definita dalla proprietà 4) del Teorema 5.6 , $S = \cup\{S_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ diventa una banda normale, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\ \{S_\gamma/\gamma\in\Gamma\}$.

Dimostrazione. -

La dimostrazione segue facilmente dal Teorema 5.2.

Teorema 5.9.-

Una banda normale è isomorfa al prodotto diretto di un semigruppo rettangolare e di un semireticolo se e solo se ogni funzione di Φ e $\Psi(\Theta)$ del Teorema 5.5. (5.6) è biiettiva.

Dimostrazione. -

Segue facilmente dal Teorema 5.3.