

INTRODUZIONE. -

Dopo il primo lavoro di Mc Lean (1956), i semigrupperi idempotenti (o bande) sono stati ampiamente studiati, sotto diversi aspetti, da numerosi autori (Kimura, Yamada, Petrich, Warne, Green, Rees, Gerhardt,...). Solo una parte del vasto materiale sui semigrupperi idempotenti sparso in numerosi articoli si trova sistemata in modo organico nei piú moderni testi di Teoria dei Semigrupperi. Pertanto è sembrato utile raccogliere e sistemare, rispettando per lo piú lo sviluppo cronologico, insieme ai risultati piú noti anche molti altri meno noti, ma interessanti, sulle bande in un apposito Quaderno, che possa offrire un quadro piú vasto e completo della teoria qui sviluppata e della problematica suscettibile di ulteriori ricerche.

Il Quaderno consiste di due Parti, nettamente distinte per i temi studiati e divise, ciascuna, in due Capitoli.

Nella Parte I, il Capitolo 1 ha come punti centrali il teorema di decomposizione (di semireticolato) di un semigruppero idempotente (§ 2) e la classificazione completa (di Kimura e Petrich) delle bande. Da notare, inoltre, nello stesso Capitolo, un esempio non banale di semigruppero idempotente e un primo studio dei semigrupperi S totali ($S^2 = S$), che sono una generalizzazione dei semigrupperi idempotenti

Il Capitolo 2 è invece dedicato alla caratterizzazione di varie classi di semigrupperi idempotenti mediante identità. Le identità che si considerano sono quelle definite e studiate da Kimura, e, successivamente, da Yamada.

Nella Parte II, il Capitolo 3 è essenzialmente dedicato ad un metodo (di Petrich) di costruzione delle bande, dedotto da quello usato da Lallement per i semigrupperi completamente regolari, con l'uso di una espressione esplicita dell'involuppo traslazionale di una banda rettangolare.

Il Capitolo 4, infine, è uno studio delle bande libere e delle varietà di bande.

Sono indicati vari problemi tuttora aperti.

CAPITOLO I - BANDE

1. Bande. Bande particolari. Prime proprietà delle bande. Esempio di Banda.

Un semigruppo idempotente (o banda) è un insieme $S \neq \emptyset$ chiuso rispetto ad una moltiplicazione associativa tale che per ogni elemento a di S risulta: $a^2 = a$.

Un semigruppo si dice anticommutativo quando nessuna coppia di suoi elementi commuta, cioè presi comunque $a, b \in S$ con $a \neq b$, risulta $ab \neq ba$.

Un semigruppo S si dice rettangolare se $aba = a$,
si dice zero-sinistro se $ab = a$,
si dice zero-destro se $ba = a$

per ogni a, b appartenenti ad S .

I semigrupp

o rettangolari, zero-sinistri, zero-destri sono tutti idempotenti. Infatti sia S un semigruppo rettangolare, allora preso $a \in S$ risulta $a^2 = a^2 a$ $a^2 = a a^3$ $a = a$.

Sia ora S un semigrupp

o zero-sinistro (destro), allora preso $a \in S$:
 $a a = a$

Un semigrupp

o zero-sinistro (destro) è rettangolare. Infatti per ipotesi $\forall a, b \in S : ab = a$ ($ba = a$), allora:

$aba = (ab)a = a a = a$ ($aba = a(ba) = aa = a$), in quanto vale l'idempotenza.

Sia data una banda S , per ogni $a \in S$ definiamo due insiemi S_a, T_a nel seguente modo:

$$S_a = \{x \in S / x = ax\}, T_a = \{x \in S / x = xa\} \quad \text{ovvero}$$
$$ax = x \iff x \in S_a, \quad xa = x \iff x \in T_a.$$

In $S_a(\tau_a)$ ci sono tutti e soli gli elementi di S che hanno a come unità sinistra (destra).

Tali insiemi sono certamente non vuoti perché almeno a vi appartiene; inoltre vale la seguente proprietà:

$$S_a = S_b, \tau_a = \tau_b \implies a = b$$

Infatti:

$$\begin{array}{l}
S_a = S_b, a \in S_a \\
\implies a \in S_b \\
\implies a = b a \\
\tau_a = \tau_b, b \in \tau_b \\
\implies b \in \tau_a \\
\implies b = b a \\
\implies a = b.
\end{array}$$

cosicché ogni elemento $a \in S$ viene caratterizzato dai due insiemi.

Lemma 1.1. - Sia S una banda. S è anticommutativa se e solo se per ogni terna $a, b, c \in S$: $abc = ac$.

Dimostrazione.-

Proviamo prima che la condizione è sufficiente, cioè supposto che $\forall a, b, c \in S : abc = ac$ vogliamo provare che S è anticommutativa

Presi dunque $a, b \in S$ con $a \neq b$ risulta:

$$\begin{aligned}
(a b)(b a) &= a(bb)a = a b a = a a = a \\
(b a)(a b) &= b(aa)b = b a b = b b = b
\end{aligned}$$

dove $a b a = a a$ e $b a b = b b$ per l'ipotesi fatta.

Ora se fosse $a b = b a$ risulterebbe $(a b)(b a) = (b a)(a b)$ cioè $a = b$ mentre è $a \neq b$, se ne conclude che $a b \neq b a$.

Viceversa supposta S anticommutativa vogliamo provare che $\forall a, b, c \in S : abc = ac$.

Da $a(axa) = (axa)a$, in quanto entrambi uguali ad axa , segue che $a = axa$ per ogni $x \in S$. Infatti se fosse $a \neq axa$, per l'anticommutatività di S , si avrebbe che anche $a(axa) \neq (axa)a$.

Allora presi $a, b, c \in S$

$$a b c = a b (c a c) = [a(b c)a] c = ac \quad \left(\begin{array}{l} \text{per } x = bc : \\ a(bc) a = a \end{array} \right)$$

Lemma 1.2.- Una banda S è rettangolare se e solo se $a b c = a c$ $\forall a, b, c \in S$ (cioè se S è anticommutativa).

Dimostrazione. -

Condizione sufficiente:

Se per una banda S si ha $a b c = a c$ $\forall a, b, c \in S$, allora $a b a = a a = a$ quindi S è rettangolare.

Condizione necessaria:

Supponiamo che S sia una banda rettangolare, allora $\forall a, b, c \in S$: $a(bc)a = a$, da cui $abc = ab(cac) = (a(bc)a)c = ac$.

Lemma 1.3.- In una banda rettangolare S si ha: $S_a = S_{ab}$ e $T_b = T_{ab}$ $\forall a, b \in S$.

Dimostrazione. -

$$S_a = \{x \in S / x = ax\}, \quad T_b = \{x \in S / x = xb\}$$

Dal Lemma 1.1. risulta $ax = abx$ per cui $ax = x \iff abx = x$ $\forall x \in S$, ne segue che $S_a = S_{ab}$.

Inoltre $xb = xab$ da cui $xb = x \iff xab = x$ $\forall x \in S$, ne segue che

$$T_b = T_{ab}.$$

Lemma 1.4. - In una banda commutativa S :

$$S_a = T_a \quad \text{e} \quad S_{ab} = S_a \cap S_b \quad \forall a, b \in S.$$

Dimostrazione. -

Poiché S è commutativa $ax = xa$ per ogni $x \in S$, da cui $S_a = T_a$. Proviamo ora che $S_a \cap S_b = S_{ab}$.

Sia $x \in S_a \cap S_b$ allora $x = ax$ e $x = bx$, da cui

$$abx = a(bx) = ax = x, \quad \text{cioè} \quad x \in S_{ab}.$$

Sia ora $x \in S_{ab}$ allora $abx = x$, ne segue che

$$ax = a(abx) = a^2bx = abx = x$$

$$bx = b(abx) = (ba)bx = abbx = abx = x$$

per cui $x \in S_a \cap S_b$. In conclusione $S_a \cap S_b = S_{ab}$.

Dal lemma precedente si deduce che ogni elemento di una banda commutativa è caratterizzato da un solo insieme e che la moltiplicazione (tra elementi) è rappresentata dall'intersezione tra i relativi insiemi.

Definiamo ora in una banda S due relazioni R e L come segue:

$$\forall a, b \in S \quad \begin{array}{l} a R b \iff ab = b \quad \text{e} \quad ba = a \\ a L b \iff ab = a \quad \text{e} \quad ba = b \end{array}$$

Lemma 1.5. - In una banda S risulta:

- 1) $a R b \iff S_a = S_b \quad \forall a, b \in S.$
- 2) $a L b \iff T_a = T_b$

Dimostrazione. -

1) Proviamo che la condizione è necessaria.

Presi $a, b \in S$

$$aRb \iff ab = b \quad \text{e} \quad ba = a$$

Consideriamo

$$x \in S_a \iff ax = x, \text{ ma } a = ba \text{ da cui } (ba)x = x \text{ inoltre}$$

$$(ba)x = b(ax) = bx \text{ quindi } x = bx, \text{ cioè } x \in S_b \quad (S_a \subseteq S_b)$$

Ancora

$$x \in S_b \iff bx = x, \text{ ma } b = ab \text{ da cui } (ab)x = x \text{ ed essendo}$$

$$(ab)x = a(bx) = ax \text{ si ha } ax = x \text{ cioè } x \in S_a \quad (S_b \subseteq S_a)$$

E così si è provato che $S_a = S_b$.

Viceversa siano $S_a = S_b$, vogliamo provare che $ab = b$ e $ba = a$.

Infatti da $a \in S_a$, $S_a = S_b$ segue che $a \in S_b$, cioè $ba = a$ e

da $b \in S_b$, $S_b = S_a$ segue che $b \in S_a$, cioè $ab = b$.

Analogamente si prova la 2).

Le relazioni R e L sono relazioni di equivalenza, lo si vede immediatamente applicando il lemma 1.5. Infatti

$$aRa \text{ in quanto } S_a = S_a$$

$$aRb \implies bRa \text{ in quanto } S_a = S_b \implies S_b = S_a$$

$$aRb, bRc \implies aRc \text{ perché } S_a = S_b, S_b = S_c \implies S_a = S_c$$

Analogamente per L.

Lemma 1.6. -

- 1) $aRb \implies caRcb$ (compatibilità a sinistra di R)
2) $aLb \implies acLbc$ (compatibilità a destra di L)

Dimostrazione. -

- 1) Dobbiamo provare che $(ca)(cb) = cb$ e $(cb)(ca) = ca$

Infatti dall'ipotesi $ab = b$ e $ba = a$ quindi $cab = cb$
e $cba = ca$. Allora

$$(ca)(cb) = (ca)(cab) = (ca)(ca)b = cab = cb$$
$$(cb)(ca) = cb(cba) = (cb)(cb)a = cba = ca \quad \text{come volevamo.}$$

- 2) Dobbiamo provare che $(ac)(bc) = ac$ e $(bc)(ac) = bc$

Dall'ipotesi $ab = a$ e $ba = b$ quindi $abc = ac$ e
 $bac = bc$.

Allora

$$(ac)(bc) = (abc)(ac) = a(bc)^2 = abc = ac$$
$$(bc)(ac) = (bac)ac = b(ac)^2 = bac = bc \quad \text{come volevamo.}$$

Definiamo ora in S un'altra relazione P come segue:

$$a, b \in S \quad \underline{aPb \iff aba = a \quad e \quad bab = b.}$$

Lemma 1.7. - aRb e $bLc \implies aPc$ $\forall a, b, c \in S$.

Dimostrazione. -

Per il lemma 1.6. (aRb e $bLc \implies caRcb$ e $baLca$) e per ipotesi
 $ba = a$ e $cb = c$; ne segue che $caRc$ e $aLca$, quindi $(ca)c = c$

e $a(ca) = a$ cioè aPc .

Lemma 1.8 -

aLb o $aRb \implies aPb$ e $caPcb$ e $acPbc$.

Dimostrazione. -

Dobbiamo provare che $aba = a$, $bab = b$

$$(ca)(cb)(ca) = ca, (cb)(ca)(cb) = cb \quad e$$

$$(ca)(bc)(ac) = ac, (bc)(ac)(bc) = bc$$

nell'ipotesi che $ab = a$ e $ba = b$ oppure $ab = b$ e $ba = a$

Infatti sia aLb allora $aba = (ab)a = a^2 = a$, $bab = (ba)b = b^2 = b$,

inoltre per il Lemma 1.6 si ha che $acLbc$ cioè

$$ac(bc) = ac \quad e \quad (bc)(ac) = bc \quad \text{Ne segue che}$$

$$(ca)(cb)(ca) = c[(ac)(bc)]a = c(ac)a = (ca)^2 = ca$$

$$(cb)(ca)(cb) = c[(bc)(ac)]b = c(bc)b = (cb)^2 = cb$$

$$(ac)(bc)(ac) = (ac)^2 = ac$$

$$[(bc)(ac)](bc) = (bc)^2 = bc$$

Sia invece aRb allora $aba = (ab)a = ba = a$ e $bab = (ba)b = ab = b$

inoltre per il lemma 1.6: $caRcb$ cioè

$$(ca)(cb) = cb \quad e \quad (cb)(ca) = ca. \quad \text{Ne segue che}$$

$$\overline{(ca)(cb)}(ca) = (cb)(ca) = ca$$

$$\overline{(cb)(ca)}(cb) = (ca)(cb) = cb$$

$$ac(bc)ac = a\overline{[(cb)(ca)]}c = a(ca)c = (ac)^2 = ac$$

$$bc(ac)bc = b\overline{[(ca)(cb)]}c = b(cb)c = (bc)^2 = bc$$

Lemma 1.9 -

$$\underline{aPb \implies aRab \quad e \quad bLab \quad e \quad bRba \quad e \quad aLba .}$$

Dimostrazione. -

Per ipotesi è $aba = a$ e $bab = b$, allora

$$a(ab) = a^2b = ab \quad e \quad (ab)a = aba = a \quad \text{quindi } aRab;$$

$$b(ab) = bab = b \quad e \quad (ab)b = ab^2 = ab \quad \text{quindi } bLab,$$

$$b(ba) = b^2a = ba \quad e \quad (ba)b = bab = b \quad \text{quindi } bRba;$$

$$a(ba) = aba = a \quad e \quad (ba)a = ba^2 = ba \quad \text{quindi } aLba$$

La relazione \underline{P} è una relazione d'equivalenza, infatti vale la proprietà riflessiva in quanto $aaa = a$ (aPa). vale la proprietà simmetrica in quanto $aba = a$ e $bab = b \implies bab = b$ e $aba = a$ ($aPb \implies bPa$)

La proprietà transitiva sarà provata nel seguente

Lemma 1.10. -

$$aPb, bPc \implies aPc$$

Dimostrazione. -

Se aPb e bPc dal lemma 1.9 segue che $bRba, bRbc,$
 $bLab, bLcb$

e poiché R ed L sono relazioni d'equivalenza esse sono simmetriche e transitive quindi

$$\begin{aligned} bRba \implies baRb & \ ; \ baRb, bRbc \implies baRbc \\ bLab \implies abLb & \ ; \ abLb, bLcb \implies abLcb \ . \end{aligned}$$

In conclusione $abLcb$ e $baRbc$, per il lemma 1.6 risulta: $abaLcba$, $cbaRcbc$, ma per ipotesi $aba = a$, $cba = c$ quindi $aLcba$, $cbaRc$ e per il lemma 1.7 si ha aPc , come volevamo.

Lemma 1.11.-(Compatibilità a sinistra e a destra della P).

$$aPb \implies caPcb \text{ e } acPbc.$$

Dimostrazione. -

Per il lemma 1.9 : $aPb \implies aRab$ e $bLab$ e per il lemma 1.8 ; $caPcab$ e $cbPcab$, $acPabc$ e $bcPabc$, e per la simmetria di P : $cabPcb$ e $abcPcb$, da cui applicando la transitività della P : $caPcb$ e $acPbc$, come volevamo.

Lemma 1.12. -

Sia Q una relazione d'equivalenza definente un omomorfismo di una banda S t.c. $\forall a, b \in S : abQba$.

$$\text{Allora} \quad aPb \implies aQb.$$

Dimostrazione. -

$$aPb \implies a = aba \text{ e } b = bab, \text{ da cui } a = (ab)(ba) \text{ e } b = (ba)(ab).$$

Ora, essendo $abQba$ per ogni $a, b \in S$, si avrà anche per ab e ba , cioè $(ab)(ba)Q(ba)(ab)$ e quindi aQb .

Abbiamo già visto che i semigrupp zero-sinistri (destri) sono rettangolari.

Viceversa vale il seguente:

Lemma 1.13.-^(*)

Un semigruppo rettangolare è il prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro e di un semigruppo zero-destro. Inoltre questa fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. - Sia S un semigruppo rettangolare. Consideriamo gli insiemi A e B di tutti i sottoinsiemi di S della forma xS e Sx , cioè $A = \{xS/x \in S\}$, $B = \{Sx/x \in S\}$, e facciamo vedere che A è un semigruppo zero-sinistro e che B è zero-destro, cioè proviamo che $\forall xS, yS \in A$.
 $(xS)(yS) = xS$ e $\forall Sx, Sy \in B : (Sx)(Sy) = Sy$.

Proviamo intanto che
$$\begin{cases} xyS = xS \\ Sxy = Sy \end{cases}$$

Da $yS \subseteq S$ segue che $xyS \subseteq xS$. Inoltre $xS = (xyx)S = (xy)(xS) \subseteq xyS$.
Quindi $xyS = xS$.

Analogamente $Sxy = Sy$. Ne segue che

$(xS)(yS) = (xS)(yxS) = x(Syx)S = (xSx)S = xS$. Analogamente

$(Sx)(Sy) = Sy$ cioè vale
$$\begin{cases} (xS)(yS) = xS \\ (Sx)(Sy) = Sy \end{cases}$$

Proviamo ora che S è prodotto diretto di A e B .

Siano $p : S \rightarrow A, q : S \rightarrow B$ due applicazioni così definite

$$p(x) = xS, \quad q(x) = Sx.$$

Proviamo che p e q sono epimorfismi. Intanto sono banalmente suriettive.

^(*) Recentemente, è stato dimostrato (v. [4] (Bibl.)) il seg. Teorema più generale:
TEOREMA.- Un semigruppo S è fattoriabile come $S=AB$, con A semigruppo zero-sinistro e B semigruppo zero-destro se e solo se S è completamente semplice non banale (né gruppo destro né gruppo sinistro) ed esiste un idemo potente k tale che $kSk = k$.

Inoltre sono omomorfismi in quanto:

$$p(xy) = xy_S = x_S = x_S y_S = p(x)p(y). \text{ (Analogamente per } q).$$

Consideriamo ora il prodotto diretto $A \times B$ e sia $r : S \rightarrow A \times B$ l'applicazione così definita $r(x) = (p(x), q(x))$.

La r è un omomorfismo, infatti:

$$r(xy) = (xy_S, Sxy) = (x_S, Sy)$$

$$r(x)r(y) = (x_S, Sx) (y_S, Sy) = ((x_S)(y_S), (Sx)(Sy)) = (x_S, Sy).$$

La r è suriettiva, infatti:

$$\forall (x_S, Sy) \in A \times B \exists xy \in S \ni r(xy) = (xy_S, Sxy) = (x_S, Sy).$$

La r è iniettiva, cioè $r(x) = r(y) \implies x = y$, infatti:

$$r(x) = r(y) \implies (x_S, Sx) = (y_S, Sy) \implies x_S = y_S, Sx = Sy \text{ e per la rettangolarità di } S \text{ si ha che } \{x\} = x_S x = y_S x = y_S y = \{y\}, \text{ da cui } x = y.$$

In conclusione S è isomorfo al prodotto diretto di A e B .

Proviamo ora che la precedente fattorizzazione di S è unica a meno di isomorfismi, cioè presa un'altra fattorizzazione di S questa è isomorfa alla prima, più precisamente se $A' \times B'$ è un'altra fattorizzazione di S faremo vedere che esiste un isomorfismo tra A ed A' e un isomorfismo fra B e B' .

Sia $r' : S \rightarrow A' \times B'$ un isomorfismo, dove A' è un semigruppone zero-sinistro e B' è un semigruppone zero-destro, e $A' \times B'$ il loro prodotto diretto.

Definiamo due applicazioni come segue:

$$p' : S \rightarrow A' \text{ e } q' : S \rightarrow B' \text{ da } r'(x) = (p'(x), q'(x)).$$

Le due applicazioni sono suriettive, infatti essendo r' sopra, cioè

$$\forall (a', b') \in A' \times B' \exists x \in S \ni r'(x) = (p'(x), q'(x)) = (a', b'), \text{ risulta che:}$$

$$\forall a' \in A' \exists x \in S \ni p'(x) = a' \text{ e } \forall b' \in B' \exists x \in S \ni q'(x) = b'$$

Inoltre p' e q' sono omomorfismi, infatti da $r'(xy) = r'(x)r'(y)$ e da $r'(xy) = (p'(xy), q'(xy))$, $r'(x)r'(y) = (p'(x), q'(x))(p'(y), q'(y))$ si deduce che

$$(p'(xy), q'(xy)) = (p'(x), q'(x))(p'(y), q'(y)) = (p'(x)p'(y), q'(x)q'(y))$$

e quindi

$$p'(xy) = p'(x)p'(y) \quad \text{e} \quad q'(xy) = q'(x)q'(y).$$

Proviamo ora che $p(x) = p(y) \implies p'(x) = p'(y)$.

Infatti se $p(x) = p(y)$, cioè $xS = yS$, risulta $p'(xS) = p'(x)p'(S) = p'(x)$ (essendo A' un semigrupp zero-sinistro) e analogamente $p'(yS) = p'(y)$, e quindi $p'(x) = p'(y)$. (Analogamente per q').

Esistono perciò due epimorfismi $f: A \rightarrow A'$ e $g: B \rightarrow B'$ tali che $p = fp$ e $q = gq$. La f e la g sono anche iniettive, infatti siano $xS \neq yS$ e supponiamo per assurdo che $f(xS) = f(yS)$.

Essendo $xyS = xS$ si avrebbe $xyS \neq yS$ quindi $xy \neq y$.
Ma $p'(xy) = fp(xy) = f(xyS) = f(xS) = f(yS) = fp(y) = p'(y)$ e
 $q'(xy) = gq(xy) = g(Sxy) = g(Sy) = gq(y) = q'(y)$.

Quindi avremmo $r'(xy) = r'(y)$: assurdo perché r' è un isomorfismo e quindi iniettivo e $xy \neq y$. Quindi f e g sono biunivoche.

In conclusione se S è isomorfo, tramite r' , al prodotto diretto $A' \times B'$ essendo A' isomorfo ad A tramite f e B' isomorfo a B tramite g , la nuova fattorizzazione di S è isomorfa alla precedente, così il lemma è completamente provato

Osservazione 1.1.-

Gli insiemi A e B precedentemente definiti sono gli insiemi di tutti gli ideali minimali destri e sinistri di S rispettivamente.

Infatti per ogni $x \in S$ xS è un ideale destro di S in quanto

$(xS)S \subseteq xS$. Inoltre è minimale; infatti supponiamo che esista un altro ideale destro K t.c. $K \subseteq xS$, allora preso $xs \in xS$, essendo K non vuoto e incluso in xS , risulterà ogni suo elemento del tipo $x\bar{s}$, ora preso $x\bar{s} \in K$, si ha che $x\bar{s}x = x$ (poiché S è rettangolare) e $xs = (x\bar{s}x)s = x\bar{s}s = x\bar{s}$, $(xs \in KS \subseteq K$, quindi ogni elemento xs di xS è anche elemento di K , per cui $K = xS$ e xS è minimale.

Osservazione 1.2.-

Abbiamo visto in un lemma precedente l'equivalenza tra le due identità $abc = ac$ e $aba = a \quad \forall a,b,c \in S$, dove S è una banda. Quindi ciascuna di esse può definire la rettangolarità di una banda. Diamo ora altre identità in bande che sono equivalenti alla rettangolarità:

- 1 $ax_1x_2 \dots x_n a = a \quad (n \geq 1)$
- 2 $ax_1x_2 \dots x_{i-1}ax_ix_{i+1} \dots x_{j-1}ax_j \dots x_n a = a \quad (1 < i < j < \dots < n)$
- 3 $ax_1x_2 \dots x_n b = ab \quad (n \geq 1)$
- 4 $ax_1 \dots x_{i-1}c_1x_i \dots x_{j-1}c_2x_j \dots x_n b = ab$
dove c_k è a oppure $b \quad \forall k \quad (1 < i < j < \dots < n)$
- 5 $ax_1x_2 \dots x_n b = ax_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_r} b \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n, r \leq n)$

Sorge ora il problema di determinare le condizioni perché tali identità siano equivalenti alla rettangolarità. Ciò sarà discusso successivamente e troveremo che l'equivalenza delle precedenti identità con la rettangolarità è solo un caso particolare del Teorema 6.2.

Osservazione 1.3.

Le due identità, $aba = a$ e $abc = ac$, non sono equivalenti per semigruppî qualsiasi. La prima infatti definisce una banda rettangolare, ma

la seconda definisce una classe un poco più ampia di semigrupperi che contengono bande rettangolari.

Esempio di banda.-

Sia S un semigruppero commutativo.

Per ogni elemento a di S definiamo il seguente sottinsieme:

$$K_a = \{b \in S / b^n = ca, a^m = db, \text{ per qualche } c, d \in S, \text{ con } m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si vede facilmente che la relazione ρ ,

$$a \rho b \iff b \in K_a \quad (a, b \in S),$$

è una relazione di equivalenza in S .

Infatti, evidentemente $a \rho a$; e $a \rho b$ implica $b \rho a$.

Inoltre, se $b \in K_a$ e $c \in K_b$ ($a, b, c \in S$), esistono $x, y \in S$ ed $m, n \in \mathbb{N}$,

tali che $b^n = xa$, $c^m = yb$, dunque $c^{mn} = y^n b^n = (y^n x)a$. Analogamente

si dimostra che esistono un elemento $z \in S$ ed un $t \in \mathbb{N}$ tali che

$a^t = zc$, e pertanto $c \in K_a$. Dunque se $a \rho b$ e $b \rho c$ ne segue $a \rho c$.

I sottinsiemi K_a ($a \in S$) sono detti componenti archimedee di S .

Proposizione 1.-

Se $x \in K_a$, $y \in K_b$, allora $xy \in K_{ab}$ ($a, b \in S$).

Dimostrazione. - Sia $x \in K_a$, $y \in K_b$; allora è $x^m = va$, $y^n = zb$,

per opportuni $v, z \in S$, $m, n \in \mathbb{N}$. Supposto $m \geq n$, abbiamo

$$(xy)^m = x^m y^m = v a y^{m-n} z b = w a b.$$

Analogamente si prova che esistono un elemento $w' \in S$ ed un $k \in \mathbb{N}$ tale

che $(ab)^k = w'xy$. Perciò $xy \in K_{ab}$.

Sia $E = \{K_a, a \in S\}$; per la Proposizione 1 è lecito definire in E la seguente moltiplicazione:

$$K_a \cdot K_b = K_{ab}.$$

Tale moltiplicazione, evidentemente, è associativa, dunque E è un semigrupp

Proposizione 2. -

Ogni $K_a \in E$ è un sottosemigrupp

Dimostrazione. -

Siano $x, y \in K_a$; allora, per la Proposizione 1., $xy \in K_{a^2}$; ma, evidentemente, $a^2 \in a$, dunque $xy \in K_a$, onde K_a è un sottosemigrupp

Infine $K_a \cdot K_a = K_{a^2} = K_a$, dunque E è idempotente.

2.- Teorema di decomposizione. -

Teorema 2.1.-

Data una banda S esiste un omomorfismo θ di S su una banda commutativa T tale che l'immagine inversa di ogni elemento di T è una banda rettangolare. L'omomorfismo θ è il più debole, nel senso che ogni altra immagine omomorfa commutativa di S è anche un'immagine omomorfa di

Dimostrazione. -

Dalla transitività e dalla compatibilità a sinistra e a destra della θ (Lemmi 1.10 e 1.11) segue che P è compatibile, cioè definisce un omomorfismo θ , precisamente l'epimorfismo canonico di S su S/P ; per la compatibilità di P risulta che S/P è un semigrupp.

Proviamo che S/P è commutativo e idempotente. Vale la commutatività perché per ogni $a, b \in S$:

$$ab(ba)ab = ab^2 a^2 b = (ab)(ab) = ab \quad \text{e}$$

$$ba(ab)ba = ba^2 b^2 a = (ba)(ba) = ba, \quad \text{cioè } abPba.$$

Inoltre $\forall a \in S: a^2 Pa$, perché $a^2 a a^2 = a$ e $a a^2 a = a$, quindi S/P è idempotente.

Proviamo ora che l'immagine inversa di ogni elemento di S/P (cioè ogni classe di equivalenza mod. P) è una banda rettangolare (cioè una banda anticommutativa).

Infatti presi due elementi $a, b \in S$ in una stessa classe d'equivalenza, il loro prodotto sta ancora nella stessa classe, cioè $aPb \implies aPab$, in quanto, per i lemmi 1.9 e 1.8, risulta $aPb \implies aRab \implies aPab$. Inoltre aPa^2 e $a^2 = a$ quindi ogni classe è una banda.

Proviamo che è anche anticommutativa. Infatti presi a, b nella stessa classe (cioè aPb) con $a \neq b$ risulta:

$$(ab)(ba) = abba = aba = a \quad \text{e} \quad (ba)(ab) = b a a b = b a b = b,$$

se fosse $a b = b a$ sarebbe anche $(ab)(ba) = (ba)(ab)$ cioè $a = b$, contro l'ipotesi, per cui $ab \neq ba$.

Proviamo ora che l'omomorfismo \emptyset è il più debole, nel senso che ogni altra immagine omomorfa commutativa di S è anche immagine omomorfa di S/P .

Sia Q un'altra relazione d'equivalenza compatibile, Q quindi definisce l'epimorfismo canonico di S sulla banda commutativa S/Q (stiamo supponendo per ipotesi che S/Q sia commutativa).

Siano $ab \in S$ t.c. aPb , ora poiché per ogni $a, b \in S$ $a b Q b a$ (in quanto S/Q è commutativa), dal lemma 1.12 segue che è anche aQb , cioè $P \subseteq Q$. Allora, per il terzo teorema di omomorfismo sulle strutture, i semi-

gruppi S/Q e $\frac{S/P}{Q/P}$ sono isomorfi, possiamo perciò considerare l'epimorfismo di S/P su S/Q che ad ogni classe mod. P associa la classe mod. Q che la contiene. Si è così trovato che un'altra qualsiasi immagine omomorfa commutativa S/Q di S è anche immagine omomorfa di S/P e quindi \emptyset è l'omomorfismo più debole.

Una versione di tale teorema più chiara e moderna è la seguente:

Teorema 2.1.-

Una banda è un "semireticolato" di bande rettangolari.

Infatti data una banda S esiste un semireticolato Γ ed una famiglia disgiunta di bande rettangolari di S , con insieme di indici in Γ , $\{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, t.c.:

$$1) S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$$

$$2) S_\gamma \cap S_\delta \subseteq S_{\gamma \cap \delta} \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma.$$

Osserviamo che il semireticolato Γ è il semigruppato T del Teorema precedente in quanto ogni banda commutativa è un semireticolato; gli S_γ sono le immagini inverse degli elementi di T stesso, infatti esse costituiscono una partizione di S e, essendo bande anticommutative, sono semigruppato rettangolari.

Inoltre, presi $t, q \in T$ si prova facilmente che

$$\phi^{-1}(t) \cap \phi^{-1}(q) \subseteq \phi^{-1}(tq), \text{ e quindi è vera anche la seconda proprietà sugli } S_\gamma.$$

3. - Semigruppato totali. -

Diamo ora una definizione interessante che è una generalizzazione della definizione di banda.

Un semigruppato S si dice totale se ogni suo elemento può essere scritto come prodotto di due elementi di S stesso, cioè $S^2 = S$, quindi

$$\forall a \in S \exists b, c \in S \quad \exists' \quad a = bc.$$

Vale la seguente implicazione: S banda $\implies S$ semigrupp. totale.
 Infatti $\forall a \in S$ con S banda $\exists a, a \in S \quad \exists' \quad a = a \cdot a$, quindi
 S è totale. Non vale naturalmente il viceversa.

Lemma 3.1.- Un semigrupp. totale S è rettangolare se e solo se è soddisfatta l'identità $abc = ac \quad \forall a, b, c \in S$.

Dimostrazione.-

Sufficienza.

Sia S totale. Supponiamo per ipotesi che $abc = ac \quad \forall a, b, c \in S$.
 Preso allora $a \in S : a = xy$ per qualche elemento x, y di S . Allora
 $a^2 = (xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)x = xy = a$. Cosicché S è una banda, da cui,
 per il lemma 1.2. S è rettangolare.

Necessità:

Ovvia, perché ogni semigrupp. rettangolare, per il lemma 1.2., soddisfa l'identità $abc = ac$, e quindi anche un semigrupp. totale la soddisfa.

Teorema 3.1.-

Sia S un semigrupp. che soddisfa l'identità $abc = ac$. Allora esiste un sottosemigrupp. rettangolare R di S e una partizione di S , con R come insieme di indici tale che

$$S = \bigcup_{r \in R} S_r$$

dove $S_r \cap S_t = \emptyset$ se $r \neq t$

$$r \in S_r$$

e $S_r S_t = \{r, t\}$

Dimostrazione. -

Sia S un semigruppò che soddisfi l'identità $abc = ac$. Consideriamo l'applicazione $f : S \rightarrow S$ definita da $f(x) = x^2$. Allora f è un omomorfismo di S in S , infatti $f(xy) = (xy)^2 = x(yx)y = xy = x(xy)y = x^2 y^2 = f(x) f(y)$.

Sia R l'immagine di S tramite f :

$$R = f(S) = \{x^2 / x \in S\}$$

Risulta che $R^2 \subseteq R$, infatti preso $a^2 b^2 \in R^2 : a^2 b^2 = (ab)^2$ essendo f un omomorfismo, quindi $a^2 b^2 \in R$, inoltre $R \subseteq S^2$ perché $x^2 \in S^2 \forall x^2 \in R$. Quindi $R^2 \subseteq R \subseteq S^2$.

Viceversa $S^2 \subseteq R \subseteq R^2$, infatti ogni elemento xy di S^2 è idempotente, perché $(xy)^2 = x(yx)y = xy$, quindi $xy \in R$; e $R \subseteq R^2$, in quanto $x^2 = xx = xx^2 x = x^2 x^2$. In conclusione $R^2 = R = S^2$.

Ora $R^2 = R$ ci dice che R è totale, e per il lemma 3.1. è rettangolare. Allora preso $r \in R$ è definito S_r come segue $S_r = \{x \in S. x^2 = r\}$, S si decompone nel seguente modo:

$S = \bigcup_{r \in R} S_r$, dove $r \in S_r$ e $S_r S_t = \{rt\}$. Infatti essendo R idempotente, in quanto rettangolare, risulta $r^2 = r$, da cui $r \in S_r$; e se $x \in S_r, y \in S_t$ allora $x^2 = r, y^2 = t$ e quindi $xy = x(xy)y = x^2 y^2 = rt$, cioè $S_r S_t = \{rt\}$.

4. - Bande regolari. -

Una banda S si dice:

- 1) regolare a sinistra se $aba = ab$
- 2) regolare a destra se $aba = ba$
- 3) regolare se $abaca = abca$

per ogni $a, b, c \in S$

Seguono dalle definizioni i seguenti lemmi:

Lemma 4.1. -

Una banda S regolare a sinistra (destra) è regolare. Infatti per ogni $a, b \in S$ $aba = ab$ per ipotesi, presi dunque $a, b, c \in S$: $abaca = (aba)ca = abca$. Analogamente a destra.

Lemma 4.2. -

Il prodotto diretto di bande regolari (a sinistra, a destra) è anch'esso regolare (a sinistra, a destra).

Basta tener conto infatti della definizione di prodotto diretto tra semigruppoidi e della definizione di bande regolari (a sinistra, a destra).

Lemma 4.3. -

Ogni sottosemigruo di una banda regolare (a sinistra, a destra) è anch'esso regolare (a sinistra, a destra).

Lemma 4.4. -

Una banda S zero-sinistra (zero-destra) è regolare a sinistra (a destra). Infatti $\forall a, b \in S$:

$$ab = a \quad (ba = a) \implies aba = (ab)a = ab \quad (aba = a(ba) = ba)$$

Lemma 4.5. -

Una banda rettangolare S è regolare.

Per il lemma 1.2. una banda rettangolare soddisfa l'identità $abc = ac$, allora $abaca = (ab)a(ca) = abca$, $\forall a, b, c \in S$.

Lemma 4.6.-

Una banda è zero-sinistra (zero-destra) se e solo se è rettangolare e regolare a sinistra (a destra).

La condizione è sufficiente, infatti $\forall a,b \in S$:

$aba = a, aba = ab \implies ab = a$. Analogamente a destra.

La condizione è necessaria, infatti per il lemma 4.4. ogni banda zero-sinistra è regolare a sinistra, e ogni banda zero-sinistra è rettangolare. Analogamente a destra.

Lemma 4.7.-

Una banda S è commutativa se e solo se è regolare a sinistra e a destra.

Infatti $\forall a,b \in S$.

$$ab = ba \iff (aba = ab \quad \text{e} \quad aba = ba)$$

Lemma 4.8.-

Un semigrupp totale S è una banda regolare a sinistra (a destra) se e solo se soddisfa all'identità $aba = ab$ ($aba = ba$).

Dimostrazione. -

La condizione è necessaria banalmente.

La condizione è sufficiente, basterà provare che S è idempotente.

Infatti per ipotesi è $S^2 = S$ e quindi preso $x \in S$ risulta $x = ab$ con $a,b \in S$. Allora $x^2 = (ab)(ab) = a(bab) = a(ba) = aba = ab = x$, quindi S è idempotente.

Diamo ora altre definizioni.

Sia S una banda. Allora per il Teorema 2.1 esiste un semireticolato e una famiglia disgiunta di sottosemigrupp rettangolari di S , con insieme degli indici in Γ , $S_{\alpha} \forall \alpha \in \Gamma$, tale che

$$(i) \quad S = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} S_{\alpha}$$

(ii) $S_{\gamma} S_{\delta} \subseteq S_{\gamma\delta} \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma$

Inoltre Γ è unico a meno di isomorfismi e di conseguenza così è per gli S_{γ} .

Diremo S semireticolo strutturale, e S_{γ} il γ -nucleo.

Un omomorfismo $p : S \rightarrow \Gamma$, tale che $p(S_{\gamma}) = \gamma$, detto omomorfismo naturale; p è un omomorfismo, infatti, essendo $S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_{\gamma}$, per ogni $x, y \in S$ esistono $S_{\gamma}, S_{\delta} \subseteq S$ t.c. $x \in S_{\gamma}, y \in S_{\delta}$, allora $p(x) = \gamma, p(y) = \delta$, e poiché $xy \in S_{\gamma} S_{\delta} \subseteq S_{\gamma\delta}$ risulta $xy \in S_{\gamma\delta}$ e quindi $p(xy) = \gamma\delta$. Allora $p(x)p(y) = p(xy)$.

In questo caso scriveremo $S \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} S_{\gamma}$ e la diremo decomposizione strutturale di S .

Diamo ora alcuni corollari relativi al Teorema 2.1.

Corollario 4.1.-

Ogni nucleo S_{γ} è un sottosemigruppò rettangolare massimale di S .

Inoltre ogni sottosemigruppò rettangolare di S è contenuto in uno ed un solo nucleo.

Dimostrazione. -

Sia $S \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} S_{\gamma}$ la decomposizione strutturale di S e sia $p : S \rightarrow \Gamma$

l'omomorfismo naturale. Se R è un sottosemigruppò rettangolare di S , allora $p(R)$ è anche un sottosemigruppò rettangolare di Γ , essendo p un omomorfismo. Poiché Γ è un semireticolo, $p(R)$ è ridotto ad un solo elemento, infatti consideriamo due elementi α, β di $p(R)$ e supponiamo per assurdo che sia $\alpha \neq \beta$. Γ , essendo un semireticolo, è ordinato rispetto alla relazione \leq così definita: $\alpha \leq \beta \iff \alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$. Ora si possono ver-

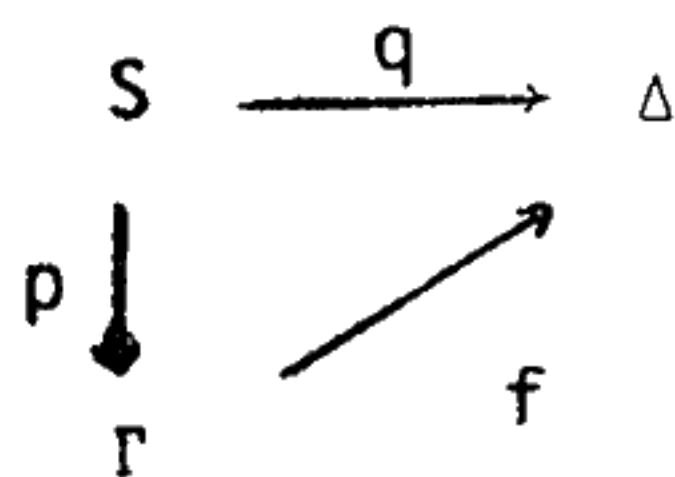
ficare due casi per gli elementi α, β di $p(R)$ prima considerati: che α e β siano confrontabili, o che non lo siano. Nel primo caso può accadere, per esempio, che $\beta \leq \alpha$, allora $\alpha\beta = \beta\alpha = \beta$ e $\alpha(\beta\alpha) = \alpha\beta = \beta$, d'altra parte $\alpha\beta\alpha = \alpha$ (essendo $p(R)$ rettangolare), quindi avremmo $\alpha = \beta$, che è assurdo.

Supponiamo ora invece che α e β non siano confrontabili, allora $\alpha \not\leq \beta$ e $\beta \not\leq \alpha$, cioè $\alpha\beta \neq \beta$ e $\alpha\beta \neq \alpha$, ma $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e $\alpha\beta\alpha = \alpha(\beta\alpha) = \alpha(\alpha\beta) = \alpha\alpha\beta = \alpha\beta$ (perché Γ è un semigruppone idempotente commutativo), quindi sarebbe $\alpha\beta = \alpha$, assurdo.

Diciamo allora γ l'unico elemento di $p(R)$, cioè $\gamma = p(R)$; si ha allora che $R \subseteq p^{-1}(\gamma) = S_\gamma$. Cioè R è contenuto in uno ed un solo S_γ , poiché gli S_γ sono disgiunti. D'altronde S_γ è rettangolare per ogni $\gamma \in \Gamma$ (per il Teorema 2.1), quindi ogni nucleo S_γ è un sottosemigruppone rettangolare massimale, perché ogni altro sottosemigruppone rettangolare R di S è incluso in S_γ .

Corollario 4.2.-

Per ogni omomorfismo (suriiettivo) $q : S \rightarrow \Delta$, dove Δ è un semireticollo, esiste un unico omomorfismo (suriiettivo) $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ tale che $q = fp$, dove $p : S \rightarrow \Gamma$ è l'omomorfismo naturale; cioè f rende commutativo il seguente diagramma



Dimostrazione. -

Poiché $q(S_\gamma)$ è rettangolare, in quanto S_γ è rettangolare e q è un

omomorfismo, esso è ridotto ad un unico elemento in Δ . Allora esiste un'applicazione $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ definita da $f(\gamma) = q(S_\gamma)$; f è un omomorfismo, infatti $f(\gamma\delta) = q(S_{\gamma\delta})$; $f(\gamma) \cdot f(\delta) = q(S_\gamma) \cdot q(S_\delta)$, $q(S_\gamma) \cdot q(S_\delta) = q(S_\gamma S_\delta) \subseteq q(S_{\gamma\delta})$ e poiché $q(S_{\gamma\delta})$ ha un solo elemento: $q(S_\gamma S_\delta) = q(S_{\gamma\delta})$.

Inoltre q associa ad S_γ l'unico elemento di Δ $q(S_\gamma)$, $p(S_\gamma) = \gamma$ e $f(\gamma) = q(S_\gamma)$ quindi $f(p(S_\gamma)) = q(S_\gamma)$, se ne conclude che $q = fp$. L'unicità della f è immediata.

Corollario 4.3.-

Sia $q: S \rightarrow \Delta$ un omomorfismo suriettivo, dove Δ è un semireticolo. Se $q^{-1}(\delta)$ è rettangolare per ogni $\delta \in \Delta$, allora l'applicazione f definita prima è un isomorfismo. Più precisamente possiamo considerare Δ come il semireticolo strutturale di S , $q^{-1}(\delta)$ come il δ -nucleo e q come l'omomorfismo naturale, cioè $S \sim \Sigma\{q^{-1}(\delta)/\delta \in \Delta\}$

Dimostrazione. -

Poiché $q^{-1}(\delta)$ è rettangolare, esiste un unico $\gamma \in \Gamma$ t.c. $q^{-1}(\delta) \subseteq S_\gamma$ per il Corollario 4.1. Ora abbiamo $\gamma = p((S_\gamma) \supseteq pq^{-1}(\delta) = p(fp)^{-1}(\delta) = pp^{-1}f^{-1}(\delta)f^{-1}(\delta)$. Cioè $\forall \delta \in \Delta \exists! \gamma \in \Gamma$ t.c. $\gamma \supseteq f^{-1}(\delta)$, da cui $f(\gamma) \supseteq \delta$, con $f(\gamma) = q(S_\gamma)$; e quindi $q(S_\gamma) \supseteq \delta$, ma $q(S_\gamma)$ è ridotto ad un solo elemento perciò $q(S_\gamma) = \delta$. In conclusione $\forall \delta \in \Delta \exists! \gamma \in \Gamma$ t.c. $f(\gamma) = \delta$, cioè f è bigettiva.

Teorema 4.1.-

Una banda è regolare a sinistra (a destra), se e solo se i suoi nuclei sono tutti zero-sinistri (zero-destri).

Dimostrazione. -

Condizione necessaria.

Sia S una banda regolare a sinistra. Poiché ciascun nucleo, S_γ di S è rettangolare, esso è anche regolare a sinistra per il lemma 4.3.. Inoltre ogni S_γ deve essere zero-sinistro per il lemma 4.6. .

Condizione sufficiente.

Sia ogni nucleo di S zero-sinistro. Siano $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Allora $ab, ba \in S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$, in quanto $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ e Γ è commutativo.

Perciò, essendo $S_{\alpha\beta}$ zero-sinistro, abbiamo $aba = ab^2a = (ab)(ba) = ab$, il che prova che S è regolare a sinistra.

Sia Γ un semireticolato, siano A e B bande aventi Γ come loro semireticolato strutturale. Siano $A \sim \Sigma \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ e $B \sim \Sigma \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ le loro decomposizioni strutturali. Costruiamo il prodotto diretto $D = A \times B$. Allora i $C = A_\gamma \times B_\gamma$ possono essere considerati come sottosemigruppi rettangolari di D . Anche $C = \cup \{C_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ è un sottosemigruppo di D . Inoltre la decomposizione strutturale di C è $C \sim \Sigma \{C_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Siano $p : A \rightarrow \Gamma$ e $q : B \rightarrow \Gamma$ gli omomorfismi naturali. Allora

$$\text{risulta } C = \{(x,y) : x \in A, y \in B, p(x) = q(y)\},$$

in quanto $p(A_\gamma) = \gamma$ e $q(B_\gamma) = \gamma$, e $r : C \rightarrow \Gamma$ definito da $r((x,y)) = p(x) = q(y)$ è l'omomorfismo naturale.

Diciamo C il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ e notiamo che tale prodotto dipende non solo da A, B e Γ ma anche dagli omomorfismi naturali p e q .

Lemma 4.9.-

Il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è regolare.

Dimostrazione.-

Poiché il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è un sottosemigruppato del loro prodotto diretto, la tesi segue dai lemmi 4.1, 4.2, 4.3. .

Proveremo ora l'inverso di questo lemma, esso svolge un ruolo essenziale nel teorema fondamentale delle bande regolari.

Lemma 4.10.-

Sia $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ una banda regolare. Allora esistono una banda regolare a sinistra $A \sim \Sigma \{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e una banda regolare a destra $B \sim \Sigma \{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ che hanno lo stesso semireticolo strutturale Γ , tali che S sia isomorfo al prodotto retratto di A e B rispetto a Γ .

Dimostrazione. -

Sia $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ una banda regolare. Poiché ogni γ -nucleo S_γ è rettangolare possiamo assumere, per il lemma 1.1, che $S_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma$, dove A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro. Siano $A = U\{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, $B = U\{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$, $T = A \times B$. Allora S può essere identificato con un sottoinsieme di T . Proveremo che A e B possono essere considerati come semigruppato idempotenti.

Siano $a \in A_\alpha$, $c \in A_\beta$, $b, b' \in B_\alpha$, $d, d' \in B_\beta$.

Allora $(a, b), (a, b') \in S_\alpha$, $(c, d), (c, d') \in S_\beta$.

Poniamo $(e,f) = (a,b)(c,d)$, $(e',f') = (a,b')(c,d')$.

Allora $(e,f), (e',f') \in S_{\alpha\beta}$ e precisamente $e, e' \in A_{\alpha\beta}$, $f, f' \in B_{\alpha\beta}$.

Ora poiché $A_{\alpha\beta}$ è zero-sinistro e $B_{\alpha\beta}$ è zero-destro risulta

$$(e,f)(e',f') = (e,f').$$

D'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} (e,f)(e',f') &= (a,b)(c,d)(a,b')(c,d') = \\ &= (a,b'b)(c,d'd)(a,bb')(c,d') = (\text{essendo } B_{\alpha} \text{ e } B_{\beta} \text{ zero-destri}) \\ &= (a,b')(a,b)(c,d')(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') = \\ &= (a,b')(a,b)(a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b)(a,b')(c,d') = (\text{usando ripetutamente} \\ &\quad \text{la rettangolarità}) \\ &= (a,b'bb')(c,d')(a,b)(c,d)(a,bb')(c,d') = \\ &= (a,b')(c,d')(a,b)(c,d)(a,b')(c,d') = \\ &= (e',f')(e,f)(e',f') = (\text{dalla definizione}) \\ &= (e',f') \quad (\text{dalla rettangolarità di } S_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Quindi $(e,f') = (e',f')$ o $e = e'$. Perciò e è determinato soltanto da a e c e non dipende da b o da d . Similmente f è determinato solo da b e d . Ora possiamo definire $m = A \times A \rightarrow A$, $n : B \times B \rightarrow B$ da $(m(a,c), n(b,d)) = (a,b)(c,d) = (e,f)$.

Perciò A e B diventano sistemi moltiplicativi in cui m e n sono le loro moltiplicazioni e A_{γ} e B_{γ} sono sottosistemi con A_{γ} banda zero-sinistra e B_{γ} banda zero-destra. Anche $T = A \times B$ è un sistema moltiplicativo. Consideriamo la proiezione $p : T \rightarrow A$ definita da $p((a,b)) = a$ e la proiezione $q : T \rightarrow B$ definita da $q((a,b)) = b$. Tali applicazioni p e q , con dominio ristretto a $S \subseteq T$, sono evidentemente omomorfismi e risulta $A = p(S)$ e $B = q(S)$. Poiché gli omomorfismi conservano ogni relazione definita da identità, ne consegue che associatività

e idempotenza si conservano in A e B , essendo S una banda. Se ne conclude che A e B sono bande.

Poiché A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro essi sono rettangolari e poiché Γ è un semireticolo $A \sim \Sigma \{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e $B \sim \Sigma \{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ diventano le decomposizioni strutturali di A e B per il Corollario 4.3. relativo al Teorema 2.1. Allora esiste una banda regolare a sinistra A e una banda regolare a destra B tale che S è il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ .

Teorema 4.2.- Una banda è regolare se e solo se essa è il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra.

Dimostrazione. -

Il lemma 4.9 prova che la condizione è sufficiente, e il lemma 4.10 prova che la condizione è necessaria.

Corollario 4.4.- Ogni banda regolare è contenuta nel prodotto diretto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra.

Dimostrazione. -

Segue immediatamente dal Teorema 4.1.

Corollario 4.5.-

Sia S il prodotto retratto delle bande A e B rispetto a Γ e sia T il prodotto retratto delle bande C e D rispetto a Δ , dove $A \sim \Sigma \{A_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e $C \sim \Sigma \{C_\delta / \delta \in \Delta\}$ sono regolari a sinistra e $B \sim \Sigma \{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ e $D \sim \Sigma \{D_\delta / \delta \in \Delta\}$ sono regolari a destra.

Sia $k : S \rightarrow T$ un omomorfismo, allora esiste un omomorfismo $h : \Gamma \rightarrow \Delta$ e due omomorfismi $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ soddisfacenti le seguenti condizioni:

$$(1) \quad k(a,b) = (f(a),g(b))$$

(2) $hp = rf$ e $hq = sg$, cioè tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{p} & \Gamma & \xleftarrow{q} & B \\ f \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{r} & \Delta & \xleftarrow{s} & D \end{array}$$

sia analitico, dove p,q,r,s sono gli omomorfismi naturali.

Dimostrazione. -

(1) Sia dunque $k : S \rightarrow T$ un omomorfismo e siano $u : S \rightarrow \Gamma$, $v : T \rightarrow \Delta$ gli omomorfismi naturali. Allora poiché $vk : S \rightarrow \Delta$ è un omomorfismo, per il Corollario 4.2, esiste un unico omomorfismo $h : \Gamma \rightarrow \Delta$ t.c. $vk = hu$

Quindi $v(k(S_\gamma)) = hu(S_\gamma) = h(\gamma)$, e così $k(S_\gamma) \subseteq v^{-1}(\delta) = T_\delta$, dove

$h(\gamma) = \delta$. Ora l'omomorfismo $k_\gamma : S_\gamma \rightarrow T_\delta$ definisce in modo unico gli

omomorfismi $f_\gamma : A_\gamma \rightarrow C_\delta$ e $g_\gamma : B_\gamma \rightarrow D_\delta$, tali che $k_\gamma(a,b) =$

$(f_\gamma(a), g_\gamma(b))$, dove k_γ è l'omomorfismo k col suo dominio ristretto a S_γ

Poiché A e B sono rispettivamente l'unione disgiunta degli A_γ e dei B_γ , con $\gamma \in \Gamma$, f_γ e g_γ determinano univocamente le applicazioni $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ t.c.

$$f(a) = f_\gamma(a) \quad \text{se } a \in A_\gamma$$

$$g(b) = g_\gamma(b) \quad \text{se } b \in B_\gamma$$

Ne segue che $k(a,b) = (f(a), g(b))$ infatti, se $a \in A_\gamma$ e $b \in B_\gamma$,

si ha: $k(a,b) = k_\gamma(a,b) = (f_\gamma(a), g_\gamma(b)) = (f(a), g(b))$.

Quindi se $(a,b) \in S$ e $(a',b') \in S$, essendo $S_\gamma S_\delta \subseteq S_{\gamma\delta}$ per $\gamma, \delta \in \Gamma$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} (f(aa'), g(bb')) &= k(aa', bb') = k((a,b)(a',b')) = k(a,b) k(a',b') = \\ &= (f(a), g(b))(f(a'), g(b')) = (f(a)f(a'), g(b)g(b')), \end{aligned}$$

il che prova che f e g sono omomorfismi.

(2) Presa ora la coppia $(a,b) \in S_\gamma$ ne segue che $(f(a), g(b)) = k(a,b) \in S_\delta$ dove $\delta = k(\gamma)$, e quindi $rf(a) = \delta \cdot h(\gamma) = hp(a)$, cioè $rf = hp$. Analogamente si prova che $sg = hq$.

Corollario 4.6.-

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'omomorfismo k del Corollario 4.5 sia 1) iniettivo, 2) suriettivo, 3) biiettivo è che esistono rispettivamente gli omomorfismi h, f, g che siano tutti 1) iniettivi, 2) suriettivi, 3) biiettivi, soddisfacenti tutte le condizioni del Corollario 4.5.

Dimostrazione. -

La condizione è sufficiente, infatti considerati gli omomorfismi h, f, g soddisfacenti tutte le condizioni del Corollario 4.5 e che siano 1) iniettivi, 2) suriettivi, 3) biiettivi, si può considerare l'omomorfismo $k : S \rightarrow T$ definito da $k(a,b) = (f(a), g(b))$; si vede facilmente che k è rispettivamente 1) iniettiva, 2) suriettiva, 3) biiettiva.

La condizione è necessaria, infatti sia 1) k iniettivo. Allora $k^{-1}(T_\delta)$ è rettangolare se non è vuoto, e così esso è contenuto in un solo S_δ per il Corollario 4.1.

Quindi h è iniettivo. Facilmente si prova che anche f e g sono iniettivi.

2) Sia k suriettivo. Allora

$h(\Gamma) = h(u(S)) = v k(S) = v(T) = \Delta$, che prova che k è suriettivo. Ovviamente anche f e g sono suriettivi.

3) la biiettività segue banalmente dall'iniettività e dalla suriettività.

Il caso 3) del precedente Corollario può essere riesposto come segue:

Corollario 4.7.-

La decomposizione di una banda regolare nel prodotto retratto di una banda regolare a sinistra e di una banda regolare a destra è unica a meno di isomorfismi.

5. - Bande normali.

In questo paragrafo daremo il teorema strutturale di bande normali ed alcuni contenuti rilevanti.

Una banda S si dice

(1) normale a sinistra (a destra) se $axy = ayx$ ($xya = yxa$)

(2) normale se $axya = ayxa$

(3) semiregolare a sinistra (a destra) se $axy = axyayxy$ ($xya = yxaxya$)

(4) seminormale a sinistra (a destra) se $axy = axyay$ ($xya = xaxya$)

(5) quasinormale a sinistra (a destra) se $axy = axay$ ($xya = xaya$)

per ogni $a, x, y \in S$.

Valgono i seguenti lemmi:

Lamma 5.1.-

Se S è normale (a sinistra, a destra) allora S è regolare (a sinistra, a destra).

Dimostrazione. -

Presi a, x, y e S , supposta S normale a sinistra, normale, risulta rispettivamente

$$axy = ayx \implies axa = aax = ax$$

$$axya = ayxa \implies axaya = a(xa)ya = ay(xa)a = ayxa = axya$$

E quindi S è rispettivamente regolare a sinistra, regolare.

Lemma 5.2.-

Se S è normale e regolare a sinistra (a destra), allora S è normale a sinistra (a destra).

Dimostrazione. -

Per ogni a, x, y e S risulta:

$$axya = ayxa, axa = ax \implies axy = axya = ayxa = axy.$$

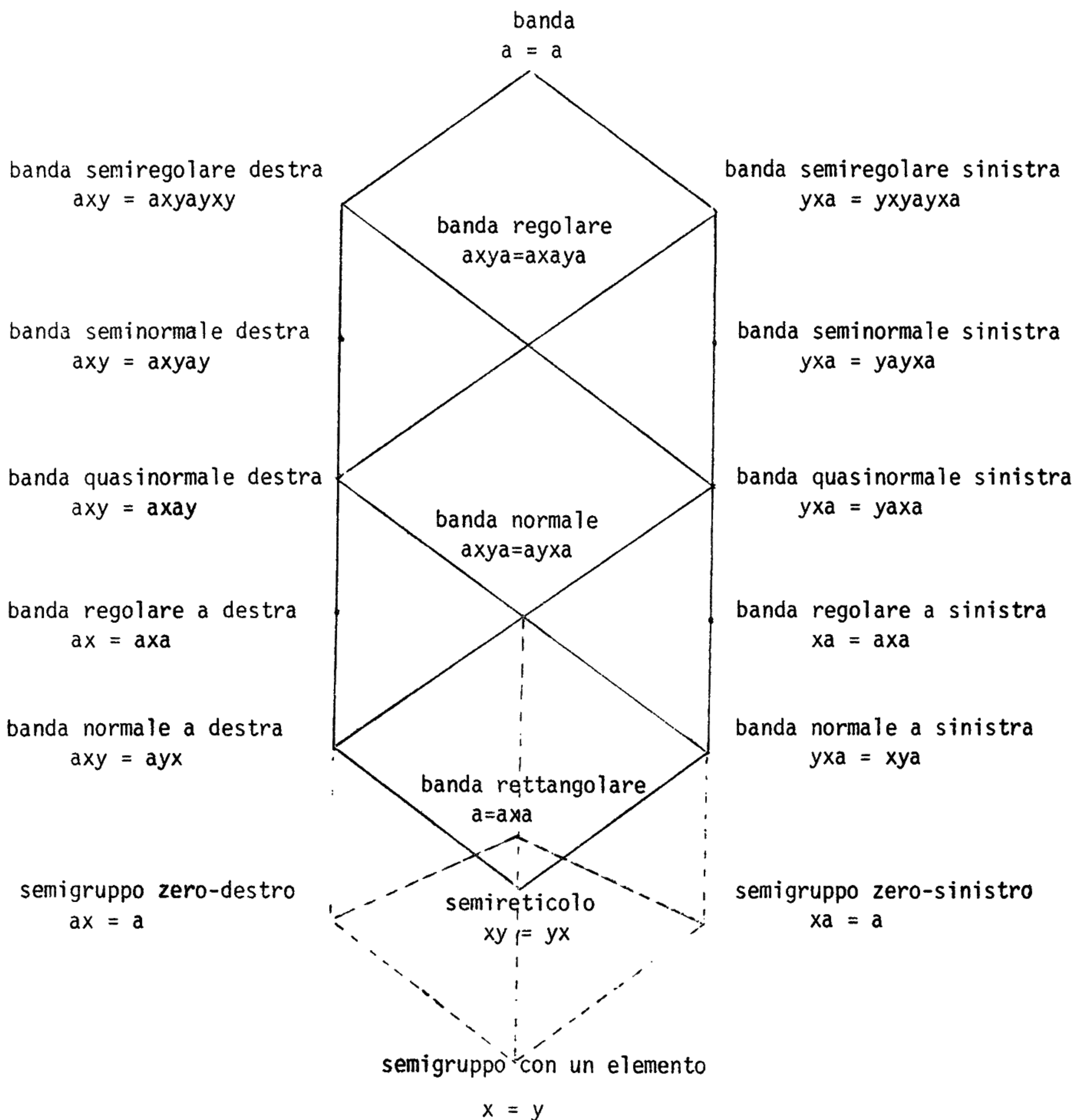
Lemma 5.3.-

Una banda è regolare se e solo se è contemporaneamente semiregolare a sinistra e a destra.

Lemma 5.4.-

Una banda è normale se e solo se è contemporaneamente quasi-normale a sinistra e a destra.

La precedente classificazione delle bande può essere rappresentata dalla seguente Tavola 1:



TAV. 1

Teorema 5.1.-

Una banda $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ è normale a sinistra (a destra) se e solo se ogni S_γ è zero-sinistro (zero-destro) ed esiste una famiglia di funzioni $\Phi = \{\phi_\beta^\alpha : \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in \Gamma\}$ soddisfacente le seguenti condizioni:

- 1) $\phi_\beta^\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ per $\alpha \geq \beta$
- 2) ϕ_α^α è l'applicazione identica
- 3) $\phi_\gamma^\beta \phi_\beta^\alpha = \phi_\gamma^\alpha$ per $\alpha \geq \beta \geq \gamma$
- 4) $ab = \phi_{\alpha\beta}^\alpha(a)$ ($ab = \phi_{\alpha\beta}^\beta(b)$) per $a \in S_\alpha$,

Dimostrazione. -

Sia $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ normale a sinistra. Allora per il Lemma 5.1. S è regolare a sinistra. Perciò ogni S_γ è zero-sinistro per il Teorema 4.1. Consideriamo ora $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$, $x, y \in S_\beta$. Allora dalla normalità a sinistra di S e dal fatto che ogni S_γ è zero-sinistro si ha:

$$ax = axy = ayx = ay$$

$$(\beta \leq \alpha \iff \alpha\beta = \beta\alpha = \beta, \text{ quindi } S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta)$$

Possiamo considerare allora l'applicazione $\phi_\beta^\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ così definita

$a \rightarrow \phi_\beta^\alpha(a) = a S_\beta$, e siamo sicuri che è un'applicazione perché $a S_\beta$ è ridotto ad un solo elemento, per quanto visto prima.

E' facile così provare le condizioni 2),3),4) della tesi.

$$2) \phi_{\alpha}^{\alpha}(a) = aS_{\alpha} = a \quad \text{perché } S_{\alpha} \text{ è zero-sinistro.}$$

$$3) \phi_{\gamma}^{\beta}(\phi_{\beta}^{\alpha}(a)) = \phi_{\gamma}^{\beta}(aS_{\beta}) = aS_{\beta}S_{\gamma} \underline{c} aS_{\beta\gamma} = aS_{\gamma} = \phi_{\gamma}^{\alpha}(a)$$

$$4) \phi_{\alpha\beta}^{\alpha}(a) = aS_{\alpha\beta} = aS_{\beta} = ab$$

Così la condizione necessaria del teorema è provata; la condizione sufficiente è contenuta nel seguente teorema:

Teorema 5.2.-

Sia Γ un semireticolo. Sia $\{S_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ una famiglia disgiunta di insiemi. Sia $\phi = \{\phi_{\beta}^{\alpha} : \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in \Gamma\}$ una famiglia di applicazioni soddisfacenti le condizioni 1),2),3) del Teorema 5.1.

Sia $S = U\{S_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$. Allora S con la moltiplicazione definita da 4) del teorema 5.1 diventa una banda normale a sinistra (a destra), la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\{S_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$. Inoltre una qualunque banda normale a sinistra (destra) si può ottenere mediante questo procedimento a meno di isomorfismi.

Teorema 5.3.

Una banda normale a sinistra (a destra) è isomorfa al prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro (zero-destro) e di un semireticolo se e solo se ciascuna funzione di ϕ del Teorema 5.2. è biiettiva.

Teorema 5.4.

Una banda è normale se e solo se essa è il prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra.

Dimostrazione. -

Proviamo prima la condizione necessaria:

Sia S una banda normale, essa è regolare per il Lemma 5.1. Perciò per il Teorema 4.2. S è il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ , dove Γ è il semireticolo strutturale di S e A (B) è un semigruppone regolare a sinistra (a destra), avente Γ come suo semireticolo strutturale. Poiché $A(B)$ è normale e regolare a sinistra (a destra), esso deve essere normale a sinistra (a destra) per il Lemma 5.2.

La condizione sufficiente è ovvia.

Teorema 5.5.-

Una banda $S \sim \Sigma \{A_\gamma \times B_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ è normale se e solo se esistono due famiglie di funzioni $\phi = \{\phi_\beta^\alpha : \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in \Gamma\}$, $\psi = \{\psi_\beta^\alpha : \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in \Gamma\}$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

1) $\phi_\beta^\alpha : A_\alpha \rightarrow A_\beta$, $\psi_\beta^\alpha : B_\alpha \rightarrow B_\beta$, $\alpha \geq \beta$

2) ϕ_α^α e ψ_α^α sono le funzioni identiche

3) $\phi_\gamma^\beta \phi_\beta^\alpha = \phi_\gamma^\alpha$, $\psi_\gamma^\beta \psi_\beta^\alpha = \psi_\gamma^\alpha$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

4) $(a,b)(a',b') = \left(\phi_{\alpha\beta}^\alpha(a), \psi_{\alpha\beta}^\beta(b') \right)$ se $(a,b) \in A_\alpha \times B_\alpha$, $(a',b') \in A_\beta \times B_\beta$

Dimostrazione. -

La condizione necessaria segue dai Teoremi 5.1 e 5.4. La sufficiente è contenuta nel Teorema 5.7 successivo.

Teorema 5.6.-

Una Banda $S \sim \Sigma \{S_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ è normale se e solo se esiste una famiglia di funzioni $\theta = \{\theta_\beta^\alpha : \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in \Gamma\}$, tale che :

1) $\theta_\beta^\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\beta$, $\alpha \geq \beta$

2) θ_α^α è l'identità.

$$3) \theta_{\gamma}^{\beta} \theta_{\beta}^{\alpha} = \theta_{\gamma}^{\alpha}, \quad \alpha \geq \beta \geq \gamma$$

$$4) ab = \theta_{\alpha\beta}^{\alpha}(a) \theta_{\alpha\beta}^{\beta}(b) \quad \text{se } a \in S_{\alpha}, \quad b \in S_{\beta}$$

Dimostrazione. -

La condizione necessaria segue dal Teorema 5.5 precedente. La condizione sufficiente è contenuta nel Teorema 5.8 seguente.

Teorema 5.7.-

Sia Γ un semireticolato. Siano $\{A_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$, $\{B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ due famiglie disgiunte di insiemi. Siano ϕ, ψ due famiglie di funzioni soddisfacenti le condizioni 1),2),3) del Teorema 5.5. Allora con la moltiplicazione definita dalla proprietà 4) del Teorema 5.5, $S = U\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ diventa una banda normale, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$.

Dimostrazione. -

Per il Teorema 5.2 $A = U\{A_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ e $B = U\{B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ risultano rispettivamente una banda normale a sinistra e una banda normale a destra le cui decomposizioni strutturali sono rispettivamente $A \sim \Sigma\{A_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\{B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$.

Per il Teorema 5.4 la banda $S = U\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma\{A_{\gamma} \times B_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ è una banda normale, in quanto è prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra.

Teorema 5.8.-

Sia Γ un semireticolato. Sia $\{S_{\gamma}/\gamma \in \Gamma\}$ una famiglia disgiunta di semigruppini rettangolari. Sia θ una famiglia di funzioni soddisfacente alle condizioni 1),2),3) del Teorema 5.6. Allora con la moltiplicazione definita

dalla proprietà 4) del Teorema 5.6 , $S = U\{S_\gamma/\gamma \in \Gamma\}$ diventa una banda normale, la cui decomposizione strutturale è $S \sim \Sigma \{S_\gamma/\gamma \in \Gamma\}$.

Dimostrazione. -

La dimostrazione segue facilmente dal Teorema 5.2.

Teorema 5.9.-

Una banda normale è isomorfa al prodotto diretto di un semigrupp rettangolare e di un semireticolo se e solo se ogni funzione di ϕ e $\psi(\theta)$ del Teorema 5.5. (5.6) è biiettiva.

Dimostrazione. -

Segue facilmente dal Teorema 5.3.

CAPITOLO II - IDENTITÀ

6. Caratterizzazioni mediante identità eterotipiche.

Sia $X = \{x, y, \dots\}$ un insieme i cui elementi saranno detti variabili (o generatori), una parola è una sequenza finita di variabili. L'insieme di tutte le parole $F = F(X)$ con l'operazione digiustapposizione forma un semigruppato, il semigruppato generato da X , che viene detto semigruppato libero generato da X . Se identifichiamo l'elemento x e X con la sequenza (x) di lunghezza 1, allora risulta:

$(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1)(x_2) \dots (x_m) = x_1 x_2 \dots x_m$, per cui ogni parola può essere riguardata come il prodotto delle sue variabili. Se l'insieme X delle variabili ha cardinale n , allora si dice che F è il semigruppato libero su n generatori, e se n è finito allora si dice che F è finitamente generato.

Una coppia di parole (P, Q) si dice identità e si scrive $P = Q$.

Sia S una banda. Diremo che S soddisfa un'identità $P = Q$, se per ogni omomorfismo $f : F \rightarrow S$ risulta $f(P) = f(Q)$.

Diremo che un'identità $P = Q$ implica un'identità $P' = Q'$, se ogni banda che soddisfa $P = Q$ soddisfa anche $P' = Q'$. Così ogni identità implica l'identità $x^2 = x$ (cioè l'idempotenza) perché una banda è un semigruppato idempotente, quindi soddisfa sempre l'identità $x^2 = x$.

Diremo che le identità $P = Q$ e $P' = Q'$ sono equivalenti se $P = Q$ implica $P' = Q'$ e $P' = Q'$ implica $P = Q$.

Sia X' un altro insieme di variabili. Sia $t_0 : X \rightarrow X'$ una qualsiasi trasformazione di X in X' , si ha allora un omomorfismo $t : F(X) \rightarrow F(X')$ che coincide con t_0 su X .

E' facile provare ora i seguenti lemmi:

Lemma 6.1. -

$P = Q$ implica $t(P) = t(Q)$ per una qualsiasi trasformazione di variabili t .

Dimostrazione. -

Sia S una banda che soddisfa $P = Q$, dobbiamo provare che tale banda soddisfa anche $t(P) = t(Q)$, cioè, preso un qualsiasi omomorfismo $g : F(X') \rightarrow S$, risulta $g(t(P)) = g(t(Q))$, infatti $g(t(P)) = g \circ t(P)$ e $g(t(Q)) = g \circ t(Q)$ e poiché $g \circ t$ è un omomorfismo da $F(X)$ in S ed S soddisfa $P = Q$, allora sarà $g \circ t(P) = g \circ t(Q)$ e quindi $g(t(P)) = g(t(Q))$.

Lemma 6.2. -

Se $P = Q$ implica $P = P'$ e $Q = Q'$ allora $P = Q$ implica $P' = Q'$.

Lemma 6.3. -

Se $P = Q$ implica $P' = Q'$ allora $P = Q$ implica $PP' = QQ'$ e $P'P = Q'Q$.

OSSERVAZIONE 6.1. -

Se consideriamo il semigruppone idempotente libero generato da X invece del semigruppone libero generato da X non ci sono differenze sostanziali nella trattazione.

Diamo ora alcune definizioni:

Una identità $P = Q$ si dice che è omotipica se P e Q contengono entrambe le stesse variabili esplicitamente, altrimenti si dice eterotipica. Al esempio un'identità $xy = x$ è eterotipica, mentre un'identità $xy = yx$ è omotipica.

Se P è una parola $x_1x_2\dots x_n$, allora diremo x_1 la testa di P e x_n la coda.

Teorema 6.1.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla singolarità sinistra (destra) (cioè all'identità $xy = x$ ($xy = y$)) se e solo se valgono contemporaneamente :

- (1) $P = Q$ è eterotipica,
- (2) P e Q hanno le stesse (differenti) teste,
- (3) P e Q hanno differenti (le stesse) code.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata a destra dopo la dimostrazione del Lemma 6.4.

Proviamo la condizione sufficiente. Supponiamo che $P = Q$ soddisfi ad (1),(2),(3). Allora le parole P e Q sono espresse da $x...x_1$ e $x...x_2$ rispettivamente, dove x_1 è diverso da x_2 e l'uno o l'altro, ma non entrambi, possono essere uguali a x . Dalla (1) segue che o P o Q contengono una variabile y , che non sta nell'altra parola. Supponiamo che P contenga y . Una trasformazione $t_0 : X \rightarrow X$ che porta y in y e tutte le altre variabili in x , manda le parole P, Q in P', Q' dove P' è $x...y...x$ se $x_1 \neq y$, oppure P' è $x...y$, se $x_1 = y$ (al posto dei puntini ci può essere x o y o niente), e Q' è x^n , per qualche intero positivo n (cioè $t(P)$ è P' e $t(Q)$ è Q').

Ora una qualsiasi banda soddisfa l'identità $P' = xyx$ o $P' = xy$, in accordo col fatto che P' è $x..y...x$ o $x...y$, e l'identità $Q' = x$.

Allora per il Lemma 6.1 $P = Q \implies P' = Q'$, e per il Lemma 6.2.:

$(P' = Q' \implies P' = xyx, Q' = x) \implies (P' = Q' \implies xy = x)$ oppure
 $(P' = Q' \implies P' = xy, Q' = x) \implies (P' = Q' \implies xy = x)$, in conclusione

$P = Q \implies$ (i) $xyx = x$ opp.
(ii) $xy = x$

La (i) è la rettangolarità, quindi per il Lemma 1.2. $(xyx = x \iff xyz = xz)$
 la (i) implica contemporaneamente $P = xx_1, Q = xx_2$, in quanto P è $x \dots x_1$
 e Q è $x \dots x_2$; ne segue che $P = Q \implies P = xx_1, Q = xx_2$, e per il lem-
 ma 6.2. risulta:

$$P = Q \implies xx_1 = xx_2.$$

Proviamo ora che l'identità $xx_1 = xx_2$ implica la singolarità sinistra.
 Infatti consideriamo la trasformazione $t_0 : X \rightarrow X$ che porta x_1 in x_1
 e tutte le altre variabili in x , allora tale trasformazione manda le paro-
 le xx_1 in xx_1 e xx_2 in xx , e per il Lemma 6.1.: $xx_1 = xx_2 \implies xx_1 = xx$;
 inoltre in ogni banda è vera l'identità $xx = x$; ora poiché $(xx_1 = xx \implies xx_1 = xx_1, xx = x)$
 applicando il Lemma 6.2., risulta

$$(xx_1 = xx \implies xx_1 = x).$$

La singolarità sinistra quindi è vera nell'ipotesi (i).

La (ii) è proprio la singolarità sinistra.

In conclusione da $P = Q$ discende in entrambi i casi la singolarità sini-
 stra, così l'implicazione verso destra della condizione sufficiente è comple-
 tamente provata. Proviamo ora l'implicazione verso sinistra della condizione
 sufficiente.

Consideriamo l'identità $xy = x$, essa implica una qualsiasi identità della
 forma $x \dots y = x \dots x$ o $x \dots y = x \dots z$

dove x, y, z sono tutti differenti e i puntini stanno per una qualsiasi
 sequenza di variabili.

Così $xy = x$ implica una qualsiasi identità soddisfacente le condizioni
 del teorema.

Teorema 6.2.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla rettangolarità (cioè all'identità $xyx = x$) se e solo se

- 1) $P = Q$ è eterotipica,
- 2) P e Q hanno le stesse teste,
- 3) P e Q hanno le stesse code.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata dopo la dimostrazione del Lemma 6.4. Proviamo la condizione sufficiente.

Sia $P = Q$ una identità soddisfacente 1),2),3). Allora possiamo assumere che la parola P sia $x \dots y \dots z$ e Q sia $X \dots z$, dove Q non deve contenere la variabile y , e z può coincidere con x .

Consideriamo la trasformazione che porta y in y e tutte le altre variabili in x , essa manda P in P' e Q in Q' , dove P' è $x \dots y \dots x$ e Q' è x^n , per qualche intero positivo n . Ora una qualsiasi banda soddisfa l'identità $P' = xyx$ e $Q' = x$, allora per i Lemmi 6.1 e 6.2. si ha che $P = Q \implies xyx = x$, che è equivalente alla rettangolarità.

Viceversa la rettangolarità $xyx = x$ implica una qualsiasi identità della forma $x \dots y \dots z = x \dots z$ per il Lemma 1.2.

Così la rettangolarità implica una qualsiasi identità soddisfacente le precedenti condizioni.

Osservazione 6.2. -

E' facile verificare che tutte le identità menzionate nell'Osservazione 1.2. soddisfano le precedenti tre condizioni.

Teorema 6.3.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla trivialità, cioè all'identità $x = y$, se e solo se

- 1) $P = Q$ è eterotipica,
- 2) P e Q hanno teste diverse,
- 3) P e Q hanno code diverse.

Dimostrazione. -

La condizione necessaria sarà provata dopo la dimostrazione del Lemma 6.4.. Proviamo la condizione sufficiente.

Sia $P = Q$ un'identità soddisfacente le precedenti condizioni e sia z una variabile che non è contenuta in entrambe P e Q . Allora per il Lemma 6.3. è vera la seguente implicazione in quanto l'ipotesi è vera:
 $(P = Q \implies z = z) \implies (P = Q \implies zP = zQ \quad \text{e} \quad Pz = Qz)$.

Per il Teorema 6.1 si ha che $zP = zQ$ è equivalente alla singolarità sinistra, mentre $Pz = Qz$ è equivalente alla singolarità destra. Così $P = Q$ implica contemporaneamente $xy = x$ e $yx = x$ e ciò implica la trivialità.

Viceversa $x = y$ implica una qualsiasi identità.

Lemma 6.4.-

Un qualsiasi semireticolo soddisfa una qualsiasi identità omotipica.

Dimostrazione.-

Sia S un semireticolo. Sia $P = Q$ un'identità omotipica le cui variabili siano x_1, \dots, x_n . Allora S , essendo una banda commutativa, soddisfa entrambe le identità $P = x_1 x_2 \dots x_n$ e $x_1 x_2 \dots x_n = Q$ e quindi soddisfa l'identità $P = Q$.

Dimostriamo ora la necessità dei Teoremi 6.1,6.2,6.3, cioè proviamo che un'identità $P = Q$, equivalente rispettivamente alla rettangolarità, alla singularità sinistra (destra), alla trivialità verifica le condizioni 1),2),3) dei rispettivi teoremi.

Sia $P = Q$ un'identità siffatta, e sia S il semireticolo di due elementi $S = \{a,b\}$. Se la $P = Q$ fosse omotipica, per il Lemma 6.4., il semireticolo S la soddisferebbe e quindi S sarebbe rispettivamente rettangolare, zero-sinistro (destra), triviale, ma ciò è assurdo perché:

1) se S fosse rettangolare, per il Lemma 1.2, si avrebbe $\forall x,y,z \in S$ $xyz = xz$ e, per il Lemma 1.1, S sarebbe anticommutativo, mentre S è una banda commutativa,

2) se S fosse zero-sinistro (destra) si dovrebbe avere: $\forall x,y \in S$ $xy = x$ ($xy = y$), mentre si ha che $ba = ab = a$,

3) se S fosse triviale tutti i suoi elementi dovrebbero coincidere, mentre S ha due elementi distinti.

In tutti e tre i casi quindi risulta che $P = Q$ è eterotipica e allora verifica la condizione 1) dei tre teoremi.

Sia A la banda zero-sinistra di due elementi e B la banda zero-destra di due elementi, allora A non è zero-destra, B non è zero-sinistra, e nessuna delle due è triviale.

Infatti in $A = \{a,b\}$ risulta: $ab = a$, $ba = b$; se A fosse anche zero-destra si avrebbe: $ab = b$, $ba = a$, da cui seguirebbe che $a = b$, assurdo. Analogamente per B si prova che non è zero-sinistra.

Né A né B sono triviali perché entrambe hanno due elementi distinti. Proviamo ora che la banda A soddisfa una qualunque identità $P = Q$ se le teste di P e di Q coincidono (la banda B soddisfa una qualunque

identità $P = Q$ se le code di P e di Q coincidono). Infatti sia $P = Q$ una identità, dove P è la parola $x_1 \dots x$, e Q è la parola $x_1 \dots y$, allora se consideriamo un qualsiasi omomorfismo $f : F(X) \rightarrow A$ risulta:

$$f(x_1) \dots f(x) = f(x_1)(\dots f(x)) = f(x_1)$$

$$f(x_1) \dots f(y) = f(x_1)(\dots f(y)) = f(x_1)$$

in quanto A è zero-sinistra, ne segue che

$f(x_1) \dots f(x) = f(x_1) \dots f(y)$, cioè A soddisfa la $P = Q$ in quanto $f(P) = f(Q)$, per ogni omomorfismo f .

Analogamente ragionando in B si prova che B soddisfa un'identità $P = Q$, se P e Q hanno le code coincidenti.

(i) Sia $P = Q$ equivalente alla trivialità. Le parole P e Q devono avere teste e code differenti perché se ciò non fosse le bande A, B , prima considerate, soddisferebbero la $P = Q$ e sarebbero quindi triviali, ma ciò è assurdo perché A e B sono non triviali.

Così le condizioni 2) e 3) del Teorema 6.3. sono provate.

(ii) Supponiamo che $P = Q$ sia equivalente alla singolarità sinistra (destra). Allora le code (le teste) di P e Q devono essere differenti. Infatti se ciò non accadesse la banda $B(A)$, che non è zero-sinistra (zero-destra), soddisferebbe questa identità e sarebbe quindi zero-sinistra, il che è assurdo.

Questo prova la condizione 3) del Teorema 6.1.

Si ha inoltre che le teste (le code) di P e di Q devono coincidere. Infatti se fossero diverse la $P = Q$ sarebbe equivalente alla trivialità per il Teorema 6.3. che è già stato provato completamente. Allora la banda

$A(B)$ zero-sinistra (zero-destra), che per ipotesi soddisfa la $P = Q$, sarebbe triviale, il che è assurdo.

Ciò prova la condizione 2) del Teorema 6.1.

Supponiamo ora che $P = Q$ sia equivalente alla rettangolarità. Si ha allora che le teste e le code di P e di Q coincidono. Infatti se ciò non accadesse l'identità $P = Q$ sarebbe equivalente alla trivialità o alla singolarità sinistra o alla singolarità destra, per quanto visto prima, e la banda $A \times B$, prodotto diretto di A e di B , che è rettangolare, ma non è zero-sinistra né zero-destra né triviale, sarebbe equivalente alla singolarità sinistra o alla singolarità destra o alla trivialità e ciò è assurdo.

Sono vere perciò le condizioni 2) e 3) del Teorema 6.2.

Abbiamo così completato la classificazione di tutte le identità eterotipiche in quattro casi distinti.

7. - Caratterizzazioni mediante identità omotipiche. -

Teorema 7.1.-

Una identità $P = Q$ è equivalente alla commutatività se soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) $P = Q$ è omotipica
- 2) P e Q hanno teste differenti
- 3) P e Q hanno code differenti.

Dimostrazione. -

Sia $P = Q$ un'identità soddisfacente le precedenti condizioni 1),2),3), possiamo supporre che la parola P sia $x\dots$, e Q sia $y\dots$, con $x \neq y$.

Allora poiché $P = Q \implies xy = xy$, per il Lemma 6.3.: $P = Q \implies Pxy = Qxy$.

Consideriamo ora la trasformazione che porta y in x e tutte le altre variabili in x , essa per il Lemma 6.1 porta la seconda identità nell'identità $xy = yxy$, che è equivalente alla regolarità a destra, in conclusione $P = Q$ implica la regolarità a destra. Analogamente se supponiamo che P sia la parola $\dots x$, Q sia $\dots y$ e applichiamo la trasformazione considerata prima all'identità $yxP = yxQ$, la $P = Q$ implica la regolarità a sinistra.

Allora l'identità $P = Q$ implica la commutatività, in quanto per il Lemma 4.7 una banda è commutativa se e solo se è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra.

Viceversa la commutatività implica una qualunque identità omotipica.

Stabiliamo ora una condizione sufficiente affinché un'identità sia equivalente alla regolarità sinistra o destra, dopo aver introdotto il concetto di parte iniziale e parte finale, per mezzo del quale possiamo ridurre entrambi i membri di un'identità a forme più semplici.

Sia $x_1 x_2 \dots x_n$ la parola P e sia $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ la parola P' ot-

tenuta scrivendo tutte le variabili distinte della parola P successivamente da sinistra, allora diremo che P' è la parte iniziale di P e la denoteremo con $q(P)$. Analogamente possiamo definire la parte finale di P , che indicheremo con $r(P)$, come quella parola ottenuta scrivendo successivamente da destra le variabili distinte di P .

Così se la parola P è $xyxzx$, allora la sua parte iniziale $q(P)$ è xyz e la sua parte finale $r(P)$ è yzx .

Quando P e Q hanno la stessa parte iniziale diremo che l'identità $P = Q$ è coiniziale, e quando P e Q hanno la stessa parte finale diremo che la $P = Q$ è cofinale.

Osservazione 3.2.-

Se un'identità è coiniziale o cofinale allora essa è omotipica.

Teorema 7.2.-

Un'identità $P = Q$ è equivalente alla regolarità sinistra (destra) se soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) $P = Q$ è coiniziale (cofinale)
- 2) P e Q hanno code differenti (teste differenti)

Dimostrazione. -

Supponiamo che $P = Q$ soddisfi le due precedenti condizioni. Allora per la 1) P e Q hanno la stessa parte iniziale e quindi la stessa testa, chiamiamola x ; per la 2) P e Q hanno code differenti e quindi o P o Q ha una coda che è diversa da x , sia allora $P = x \dots y$, con $y \neq x$, e sia $Q = x \dots y \dots x$.

Sia t la trasformazione che porta y in x e tutte le altre variabili in x . Applicando il Lemma 6.1 si ha che $P = Q \implies t(P) = t(Q)$ e poiché è vera la seguente implicazione ($t(P) = t(Q) \implies t(P) = xy$ e $t(Q) = xyx$) applicando il Lemma 6.2., si ha che $t(P) = t(Q) \implies xy = xyx$, quindi $P = Q$ implica $xy = xyx$, che è regolarità sinistra.

Viceversa si vede facilmente che la regolarità sinistra implica $P = q(P)$ per una qualunque parola P , dove $q(P)$ è la parte iniziale di P .

Allora se consideriamo una qualunque identità coiniziale $P = Q$, cioè tale che $q(P) = q(Q)$, poiché, per quanto visto prima, $xy = xyx \implies (P = q(P) \text{ e } Q = q(Q))$ se ne deduce che $xy = xyx \implies P = Q$ cioè la regolarità sinistra implica una qualunque identità coiniziale e quindi, in particolare, implica un'identità coiniziale che soddisfa anche la condizione 2).

Segnaliamo ora un problema ancora aperto: "Quale è l'identità $P = Q$ che equivale alla regolarità della banda?".

Consideriamo ora l'identità:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a_{p_1} \cdot a_{p_2} \cdot \dots \cdot a_{p_n} \quad (*)$$

dove (p_1, p_2, \dots, p_n) è una permutazione non banale di $(1, 2, \dots, n)$.

Abbiamo il seguente:

Teorema 7.3.-

Una banda soddisfacente l'identità (*) è

- 1) normale se $p_1 = 1; p_n = n$,
- 2) normale a sinistra se $p_1 = 1; p_n \neq n$,
- 3) normale a destra se $p_1 \neq 1; p_n = n$
- 4) commutativa se $p_1 \neq 1, p_n \neq n$.

Dimostrazione.-

Evidente.

*Accettato per la pubblicazione su
parere favorevole del Prof. F. MIGLIORINI*

B I B L I O G R A F I A

- [1] Mc Lean D. *Idempotent semigroups*, Amer.Math. Monthly (1954)
- [2] Kimura N. *The structure of idempotent semigroups (I)* Pacific J. Math. 8 (1958)
- [3] Yamada M-Kimura N. *Note on idempotent semigroups (II)*, Proc. Japan Acad. 34(1958).
- [4] Catino-Dell'Anna-Miccoli *Alcuni risultati sulla fattorizzazione di semigrupperi*. Quaderno dell'Istituto di Matematica dell'Università di Lecce, 3(1979).
- [5] Kimura N. *Note on idempotent semigroups (I)* Proc. Japan Acad.33 (1957)
- [6] Petrich M. *A construction and a classification of bands* Math. Nachr. 48(1971)
- [7] Clifford-Preston *The algebraic Theory of semigroups*. American Mathematical Society (1961).
- [8] Howie J.M. *An introduction to semigroups Theory*.Academic Press (1976).