$$y_{n+3} = y_{n+1} + 2 \quad \frac{y_{n+2}-y_{n+1}-h^2\gamma f'(\eta_1)f_{n+1}}{1 - h\,k\,f'(\eta_1) + \gamma h^2 f'^2(\eta_1)} \quad \eta_1 \in (y_{n+1},y_{n+3}).$$

$$y_{n+3} = y_{n+1} + \frac{2\,h\,f_{n+1}}{k - h\,f'(\eta_1)}$$

Metodi ad un passo dello stesso tipo sono stati trovati da Rosenbrock (cfr. [12])

§ 3. Ordine dei metodi.

Se $f'(y)$ non è rapidamente variabile (5) in B approssimando $f'(\eta_1)$ con $f'(y_{n+3})$, $f'(\delta_1)$ e $f'(\eta_2)$ con $f'(y_{n+2})$ nei metodi descritti sono [7] ancora soddisfatte le 1) e 2) del teorema 1.

Per $k = 2$, $\gamma = 1$ il metodo 2.I è del 2° ordine.

Per $k = \frac{5}{8}$, $\gamma = \frac{1}{8}$, $k_1 = -h^r$ il metodo 2.II è del 3° ordine, per $r \geq 1$.

§ 4. Applicabilità ai sistemi.

Quanto detto nel §.2 e nel §.3 si può estendere ai sistemi di equazioni differenziali del 1° ordine. In questo caso se $y \in R^m$, E è la matrice unitaria di ordine m, f'_{n+1} la matrice Jacobiana calcolata nel punto $y_{n+1} \in R^m$ e f_n è il vettore $f(y_n) \in R^m$ i metodi 2.I e 2.II, per $r = 2$, assumono rispettivamente la forma

---

(5) E' sempre possibile trovare un intervallo in cui sia verificata questa condizione prendendo $h \in H' \subset H$.

$$3.\mathrm{I} \qquad y_{n+3} = y_{n+2} + \left(E - 2hf'_{n+2} + \frac{h^2}{2} f'^2_{n+2}\right)^{-1} \left(y_{n+2} - y_{n+1} - h^2 f'_{n+2} f_{n+2}\right)$$

$$3.\mathrm{II} \qquad y_{n+4} = y_{n+2} + 2\left(E - \frac{5}{8} h\, f'_{n+3} + h^2\left(\frac{1}{8} f'^2_{n+3} - 2h\, f'_{n+2}\right)\right)^{-1} \left(y_{n+3} - y_{n+2} - \right.$$

$$\left. - h^3 (f_{n+3} - f_{n+1}) - \frac{h^2}{8} f'_{n+3}\, f_{n+2}\right).$$

§ 5. Risultati numerici.

Sono stati applicati i metodi 3.I e 3.II a due sistemi stiff

$$S1 \quad \begin{cases} y_1' = -2000\, y_1 + 1000\, y_2 + 1000 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = y_1 - y_2 & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$S2 \quad \begin{cases} y_1' = 0.01 - [1 + (y_1 + 1000)(y_1 + 1)]\,[0.001 + y_1 + y_2] & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 0.01 - (1 + y_2^2)(0.01 + y_1 + y_2) & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

I risultati sono stati confrontati con la soluzione teorica per il sistema S1 e con la soluzione numerica ottenuta applicando un metodo Runge-Kutta del quarto ordine con $h = 0.0002$, per il sistema S2.

I metodi hanno dato buoni risultati.

Nelle tabelle 1,2 sono riportati i risultati numerici ottenuti con il metodo 3.I e 3.II applicati al sistema S1.

Tutti i valori sono moltiplicati per 10.

Nelle tabelle 3,4 vi sono gli analoghi risultati relativi al sistema S2.

Accettato per la pubblicazione su

proposta del Prof. Donato TRIGIANTE