Se V è di classe C^1 in B, V è detta funzione di Liapunov.

Il teorema sussiste formalmente identico anche per un sistema dinamico discreto P purché la 2) venga sostituita dalla

2') $V(P^n(y)) < V(y)$ per ogni $y \notin \Omega$, per ogni $n > 0$.

§ 2. Metodi a p-passi.

Supponiamo inizialmente che sia $m = 1$ e che sia $f(0) = 0$.

Poiché ricerchiamo metodi A-stabili si considera la 1.1 sotto l'ulteriore ipotesi che f sia di classe C^1 in B e che risulti $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$.

In questo caso si ha che è $\Omega = \{y \in B : f(y) = 0\}$ e che Ω è compatto. Denotato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in R e scelta come funzione di Liapunov

$$V : y \in B \quad \rightarrow \quad (f(y),f(y)) = f^2(y) \in R,$$

dal teorema 1 si deduce che Ω è asintoticamente stabile per il sistema dinamico continuo u. (Risulta infatti $\dot{V}(y) = 2f^2(y)\, f'(y) < 0$ per ogni $y \notin \Omega$)

Si consideri ora l'equazione alle differenze

2.1 $\sum_{i=o}^{p} \alpha_i y_{n+p-i+1} + h\, G(h, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, f(y_{n+1}), \ldots, f(y_{n+p}), f'(y_{n+1}), \ldots, f'$

per $p > 1$, $n \in N_o$, $h \in H = (0,1)$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_o \neq 0$. Sia $G(h, y_{n+1}, \ldots, f'(y_{n+p}))$ (che nel seguito indicheremo brevemente con G_n) una funzione continua non linear nelle sue variabili.

Indicheremo nel seguito $f(y_{n+j}), f'(y_{n+j})$, rispettivamente con f_{n+j}, f'_{n+j}

$j = 1,2,\ldots,p$.

Richiediamo inoltre che sia

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 0.$$

Posto $\alpha_0 = -1$, $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j - 1$ per $i = 1,\dots,p-1$ risulta $\beta_p=0$ e la 2.1 si può scrivere nella forma

$$2.2 \qquad y_{n+p+1} = y_{n+p} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i (y_{n+p+1-i} - y_{n+p-i}) + h\, G_n$$

Nell'ipotesi che siano noti i valori $y_1,\dots,y_p$, si vede facilmente che la 2.2 definisce una funzione di iterazione P_h, continua, tale che

$$y_{n+p+1} = P_h(y_{n+p}) = P_h^{n+1}(y_p) \qquad h \in H$$

e quindi una famiglia di sistemi dinamici ad un paramentro che indichiamo ancora con $(P_h)_{h\in H}$.

(la condizione iniziale $y(0) = y_1$, associata alla 1.1, non è sufficiente ad innescare il procedimento, oltre al punto y_1 occorrono i valori $y_2,\dots$ che devono essere calcolati a partire da y_1, con un metodo ad un passo, che abbia ordine di convergenza almeno s affinché la convergenza del metodo $\mathcal{T}$ ottenuto dalla 2.2 non dipenda dai valori $y_2,\dots,y_p$. [5]).

Indichiamo rispettivamente con Y_n e $\bar{G}_n$ i vettori colonna

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+p} \\ y_{n+p-1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ y_{n+2} \end{pmatrix} \qquad e \qquad \bar{G}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e con A la matrice quadrata di ordine $p-1$

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{p-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si prova facilmente che l'equazione 2.2 è equivalente alle equazioni matriciali

2.3 $$Y_{n+1} = Y_n + A(Y_n - Y_{n-1}) + h\,\bar{G}_n$$

2.4 $$Y_{n+1} = Y_{n-1} + (E+A)(Y_n - Y_{n-1}) + h\,\bar{G}_n$$

Nel seguito denoteremo con E la matrice unitaria di ordine $p-1$ e si intenderà che le matrici abbiano ordine $p-1$ e che i vettori abbiano dimensione $p-1$.

Denotiamo con Ψ la funzione vettoriale tale che

$$\Psi : Y = (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}) \in B^{p-1} \to (\psi_1(y_1, \dots, y_{p-1}), \dots, \psi_{p-1}(y_1 \dots y_{p-1})) =$$

$$= (f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_{p-1})) \in R^{p-1} \quad .$$

Poniamo d'ora in poi per brevità $\Psi_n = \Psi Y_n$. Il teorema di Lagrange assicura allora l'esistenza di una matrice diagonale $J_\delta = \text{diag}(f'(\delta_1), \dots, f'(\delta_{p-}$

$\delta_j \in (y_{n+p+1-j}, y_{n+p+2-j})$ tale che $\Psi_{n+1} - \Psi_n = J_\delta(Y_{n+1} - Y_n)$.

Siano C e Γ matrici definite positive e sia K una matrice tale che

KJ_δ sia definita negativa. Ne segue che la matrice

$$R = (C - hKJ_\delta + \frac{h^2}{\alpha} J_\delta \Gamma J_\delta) \qquad \text{per} \quad \alpha > 0$$

è definita positiva [(3)] e quindi è invertibile.

Posto $A = R^{-1}C$ e $\bar{G}_n = -h\, R^{-1} J_\delta \Gamma \Psi_n$ nella 2.3 si ottiene

2.5 $$Y_{n+1} = Y_n + R^{-1}(C(Y_n - Y_{n-1}) - h^2 J_\delta \Gamma \Psi_n) .$$

La 2.5 per le ipotesi fatte definisce la funzione di iterazione

$$Q_h : Y = (y_1, \ldots, y_{p-1}) \to (q_1(y_1, \ldots, y_{p-1}), \ldots, q_{p-1}(y_1, \ldots, y_{p-1}))$$

$$= (P_h(y_1), y_2, y_3, \ldots, y_{p-1}) .$$

Affinché la 2.2 definisca una famiglia di sistemi dinamici discreti $(P_h)_{h \in H}$ su B, per la quale Ω sia asintoticamente stabile, è sufficiente richiedere che la 2.5 definisca una famiglia $(Q_h)_{h \in H}$ di sistemi dinamici discreti su B^{p-1}, per la quale Ω^{p-1} sia asintoticamente stabile [2].

Denotato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in R^{p-1}, fissato $h \in H$, siano V' e V'' due funzioni tali che

---

(3) Poiché abbiamo fatto l'ipotesi che $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$. J_δ è definita negativa.

$$V' : Y \in B^{p-1} \to V'Y \quad = \quad \frac{1}{h^2}\,(Q_hY - Y, C(Q_hY - Y)) \in R$$

$$V'' : Y \in B^{p-1} \to V''Y = (\Psi Q_hY, \Gamma\Psi Q_hY) \in R.$$

Poniamo $V = V' + V''$. V soddisfa la 1) del teorema 1; inoltre indicato VY_n con V_n si ha

$$\Delta V_n = V_n - V_{n-1} \leq$$

$$2.6 \quad \leq \frac{2}{h^2}(Y_{n+1} - Y_n, C(Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1})) + (\Psi_{n+1} - \Psi_n, \Gamma(\Psi_{n+1} + \Psi_n)).$$

Dalla 2.6 e dalla 2.5 per $\alpha = 2$ si ha

$\Delta V_n \leq \frac{2}{h}\,(Y_{n+1} - Y_n, KJ_\delta(Y_{n+1} - Y_n)) < 0$ cioé è soddisfatta la 2) del teorema 1 e quindi anche la c).

La 2.5 per $\alpha = 2, p = 2, C = E$, $\Gamma = \gamma E$ per $\gamma > 0$, $K = kE$ per k diviene

$$2.\mathrm{I} \qquad y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{y_{n+2} - y_{n+1} - h^2\gamma f'(\delta_1)f_{n+2}}{1 - h\,k\,f'(\delta_1) + \frac{h^2}{2}\,\gamma f'^2(\delta_1)}$$

La 2.I fornisce un metodo A-stabile a due passi che soddisfa alle condizioni a),b) e c).

Maggiorando opportunamente la 2.6 e per $\alpha = 1$ si ottengono i metodi già trovati nell'ambito della stessa teoria da D. Trigiante (cfr. [7], [8]).

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{y_{n+2} - y_{n+1} - h^2\gamma f'(\delta_1)f_{n+2}}{1 - h\,k\,f'(\delta_1) + h^2\gamma f'^2(\delta_1)} \qquad (\delta_1 \in (y_{n+2}, y_{n+3}))$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h\gamma f_{n+2}}{k - h\,\frac{\gamma}{2}\,f'(\delta_1)}$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h\gamma f_{n+2}}{k - h\gamma f'(\delta_1)}$$

Un'altra classe di metodi si ottiene come segue.

Sia $\gamma > 0$, scelta $\Gamma = \mathrm{diag}\,(1,0,\dots,0)$, sia K una matrice tale che risulti KJ_η definita negativa (4).

Sia C una matrice definita positiva allora

$$R = (C - hKJ_\eta + h^2\gamma J_\eta \Gamma J_\eta) \text{ è invertibile.}$$

Posto $A = 2\,R^{-1}C - E$ e $\bar{G}_n = -2h\gamma R^{-1} J_\eta \Gamma \Psi_{n-1}$ nell'equazione 2.3 si ha

(4) Analogamente esiste una matrice $J_\eta = \mathrm{diag}(f'(\eta_1),\dots,f'(\eta_{p-1}))$ di ordine $p-1$ tale che $\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1} = J_\eta\,(Y_{n+1} - Y_{n-1})$ per $\eta_j \in (y_{n+p-j}, y_{n+p+2-j})$ è definita negativa se $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$

$$Y_{n+1} = Y_{n-1} + 2R^{-1}(C(Y_n - Y_{n-1}) - h^2 \gamma J_n \Gamma \Psi_{n-1}) \quad . \tag{2.7}$$

Sia

$$V''' : Y \in R^{p-1} \to (\Psi Y, \Psi Y) \in R.$$

La funzione $W = V' + \gamma(V'' + V''')$ soddisfa la 1 del teorema 1.

Indicato WY_n con W_n si ha

$$\Delta W_n = W_n - W_{n-1} = \frac{1}{h^2} (Y_{n+1} - Y_{n-1}, C(Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1})) + (\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}, \gamma\Gamma(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}))$$

$$= \frac{1}{h}(Y_{n+1} - Y_{n-1}, K\, J_n (Y_{n+1} - Y_{n-1})) < 0$$

ed è così soddisfatta anche la 2) del teorema 1.

Per $p = 3$ posto $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \Gamma + hk_1\, f'(\eta_2)M \quad K = (-k_1\, f'(\eta_2)L + k\, f'(\eta_1)\Gamma)J_n^{-1} \qquad k > 0,\ k_1 < 0$

si ottiene dalla 2.7 il metodo A-stabile a tre passi.

$$y_{n+4} = y_{n+2} + 2\, \frac{y_{n+3} - y_{n+2} + h\, k_1(f_{n+3} - f_{n+1}) - h^2\gamma f'(\eta_1) f_{n+2}}{1 - hk\, f'(\eta_1) + 2h\, k_1\, f'(\eta_2) + h^2 \gamma f'^2(\eta_1)} \tag{2.II}$$

$$\eta_1 \in (y_{n+2}, y_{n+4}) \quad , \qquad \eta_2 \in (y_{n+1}, y_{n+3})$$

Per $p = 2$, $C = E, K = k\, E$ per $k > 0$, si ritrovano dalla 2.7 i metodi a due passi (cfr. [7]).

$$y_{n+3} = y_{n+1} + 2\,\frac{y_{n+2}-y_{n+1}-h^2\gamma f'(\eta_1)f_{n+1}}{1 - h\,k\,f'(\eta_1) + \gamma h^2 f'^2(\eta_1)} \qquad \eta_1 \in (y_{n+1},y_{n+3}).$$

$$y_{n+3} = y_{n+1} + \frac{2\,h\,f_{n+1}}{k - h\,f'(\eta_1)}$$

Metodi ad un passo dello stesso tipo sono stati trovati da Rosenbrock (cfr. [12])

§ 3. Ordine dei metodi.

Se $f'(y)$ non è rapidamente variabile (5) in B approssimando $f'(\eta_1)$ con $f'(y_{n+3})$, $f'(\delta_1)$ e $f'(\eta_2)$ con $f'(y_{n+2})$ nei metodi descritti sono [7] ancora soddisfatte le 1) e 2) del teorema 1.

Per $k = 2$, $\gamma = 1$ il metodo 2.I è del 2° ordine.

Per $k = \frac{5}{8}$, $\gamma = \frac{1}{8}$, $k_1 = -h^r$ il metodo 2.II è del 3° ordine, per $r \geq 1$.

§ 4. Applicabilità ai sistemi.

Quanto detto nel §.2 e nel §.3 si può estendere ai sistemi di equazioni differenziali del 1° ordine. In questo caso se $y \in R^m$, E è la matrice unitaria di ordine m, f'_{n+1} la matrice Jacobiana calcolata nel punto $y_{n+1} \in R^m$ e f_n è il vettore $f(y_n) \in R^m$ i metodi 2.I e 2.II, per $r = 2$, assumono rispettivamente la forma

---

(5) E' sempre possibile trovare un intervallo in cui sia verificata questa condizione prendendo $h \in H' \subset H$.