§ 1. Metodi di discretizzazione A-stabili.

Le notazioni usate nel presente lavoro sono quelle adottate in [1]. Richiamiamo in questo paragrafo alcuni concetti usati nella teoria della discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie (Henrici-Dalquist).

Sia $B = S(0,r) \subset R^m$, $f : B \to R^m$ una funzione localmente lipschitziana.

L'equazione differenziale autonoma (1)

1.1 $$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

considerata per $t \in R^+$ definisce un sistema dinamico continuo su B[2], che indichiamo con u. Denoteremo con $T(t)x_o$, $t \in R^+$ la traiettoria passante per x_o.

Un metodo di discretizzazione $\mathcal{M}$ dipendente dal passo $h \in H=(0,1)$, è applicabile alla 1.1 se[3]

a) definisce una famiglia $(P_h)_{h\in H}$ (2) di sistemi dinamici discreti ad un parametro, su B.

b) L'applicazione $P : h \in H \to P(h) = P_h \in C(B)$ è continua.

c) per ogni $y \in B$ e per ogni $h \in H$, $\omega^+_{P_h}(y)$ ha le stesse proprietà asintotiche di $\omega^+_u(y)$ e se risulta inoltre

$$\bigcup_{y\in B} \omega^+_{P_h}(y) = \bigcup_{y\in B} \omega^+_u(y) \qquad \text{per ogni } h \in H$$

Classificazione per soggetto: AMS(MOS)1970:65L05

(1) Si considera qui il problema di un'equazione differenziale autonoma perché rappresenta il caso più frequente; ad esso inoltre ci si può sempre ricondurre aggiungendo un'equazione opportuna alla 1.1[2].

(2) Per brevità di notazione indichiamo la famiglia $((P_h^k)_{k\in N_o})_{h\in H}$ semplicemente con $(P_h)_{h\in H}$.

d) esiste $s \geq 1$ tale che per ogni $h \in H$, per ogni $n > 0$ e per ogni $y \in B$

$$\| P_h^n(y) - T(nh)y \| = O(h^{s+1})$$

<u>Def. 1.</u> [6] Un metodo di discretizzazione $\mathcal{M}$ è detto A-stabile se applicato all'equazione differenziale test

$$y' = \lambda y \ , \ \mathrm{Re}\ \lambda < 0$$

genera una successione $(y_n)_{n \in N}$, con $y_n = P_h(y_{n-1})$, tale che $y_n \to 0$ quando $n \to \infty$, qualunque sia $h > 0$.

Porremo nel seguito per brevità $\Omega = \bigcup_{y \in B} \omega_u^+(y)$.

Se sono verificate le a),b),c) ed Ω è stabile il metodo di discretizzazione $\mathcal{M}$ si dice stabile; se Ω è asintoticamente stabile il metodo risulta A-stabile.

Se è verificata la d) il metodo è detto consistente di ordine s.

Se sono verificate la c) e la d) il metodo risulta convergente ed s è detto ordine di convergenza del metodo.

Richiamiamo inoltre il seguente teorema di Liapunov.

Teorema 1.[2] - Un insieme compatto $\Omega \subset B$ è asintoticamente stabile per il sistema dinamico continuo u su B, se e solo se esiste una funzione V, continua e a valori reali, definita in un intorno U di Ω tale che:

1) $V(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$

   $V(y) > 0$ per ogni $y \in U$, $y \notin \Omega$

2) $V(T(t)y) < V(T(0)y) = V(y)$ per ogni $y \notin \Omega$, per ogni $t > 0$.

Se V è di classe C^1 in B, V è detta funzione di Liapunov.

Il teorema sussiste formalmente identico anche per un sistema dinamico discreto P purché la 2) venga sostituita dalla

2') $V(P^n(y)) < V(y)$ per ogni $y \notin \Omega$, per ogni $n > 0$.

§ 2. Metodi a p-passi.

Supponiamo inizialmente che sia $m = 1$ e che sia $f(0) = 0$.

Poiché ricerchiamo metodi A-stabili si considera la 1.1 sotto l'ulteriore ipotesi che f sia di classe C^1 in B e che risulti $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$.

In questo caso si ha che è $\Omega = \{y \in B : f(y) = 0\}$ e che Ω è compatto. Denotato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in R e scelta come funzione di Liapunov

$$V : y\in B \rightarrow (f(y),f(y)) = f^2(y)\in R,$$

dal teorema 1 si deduce che Ω è asintoticamente stabile per il sistema dinamico continuo u. (Risulta infatti $\dot{V}(y) = 2f^2(y)\, f'(y) < 0$ per ogni $y\notin\Omega$)

Si consideri ora l'equazione alle differenze

$$2.1 \qquad \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y_{n+p-i+1} + h\, G(h,y_{n+1},\dots,y_{n+p},f(y_{n+1}),\dots,f(y_{n+p}),f'(y_{n+1}),\dots,f'$$

per $p > 1$, $n\in N_0$, $h\in H = (0,1)$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_0 \neq 0$. Sia $G(h,y_{n+1},\dots,f'(y_{n+p}))$ (che nel seguito indicheremo brevemente con G_n) una funzione continua non linear nelle sue variabili.

Indicheremo nel seguito $f(y_{n+j})$, $f'(y_{n+j})$, rispettivamente con f_{n+j}, f'_{n+}

$j = 1,2,\dots,p$.