Lo sviluppo del modello avviene per periodi elementari successivi a partire da un istante iniziale prestabilito. Conveniamo inoltre di assumere come periodo elementare t, l'intervallo di tempo compreso fra due decisioni successive dell'Impresa, D_t, D_{t+1}. Dobbiamo ancora osservare che l'Impresa, non appena presa la decisione D_t, passa dallo stato aleatorio a quello noto; cioè dallo stato S_t ad s_t. Ma nel momento in cui l'Impresa è sul punto di prendere la decisione D_t, supponiamo, per ipotesi, che questa conosca:

a) la serie passata degli stati del mondo:

$$s_1, s_2, \ldots, s_{t-1} \qquad \text{cioè} \qquad {}_p s_t$$

b) la serie passata delle proprie decisioni:

$$D_1, D_2, \ldots, D_{t-1} \qquad \text{cioè} \qquad {}_p D_t$$

L'insieme dei dati a) e b) lo indicheremo con ${}_p h_t$. A ciascun insieme di informazioni ${}_p h_t$, a ciascuno degli s_t ed a ciascuna delle D_t, l'Impresa assicurativa può far corrispondere una spesa totale d'esercizio ben definita, che indichiamo con $C_t({}_p h_t, s_t, D_t)$, sostenuta durante l'esercizio nel periodo t in funzione dei prezzi di mercato, dei tassi, dei sinistri risarciti, ecc. . Conveniamo ancora di indicare le variabili aleatorie con le lettere maiuscole e queste, una volta divenute note, le indicheremo con le lettere minuscole corrispondenti.

4. - FORMULAZIONE DEL MODELLO DI STRATEGIA. -

Cominciamo con il dire che l'Impresa assicurativa trovandosi a scegliere tra decisioni condizionate da informazioni che abbiamo indicato come "dati del momento di decisione", deve scegliere una strategia $\sigma = \sigma_t({}_p h_t)$ cui corrisponde una decisione D_t che rende minimo il danno medio (13) (rischio) dato dalla relazione:

$$(6) \qquad R(S_t^i, \sigma) = \mathfrak{M}[f_t(S_t)] \{\ell[S_t^i \; \sigma_t^i]\}$$

dove con ℓ abbiamo indicato il danno medio, $\mathfrak{M}[f_t(S_t^i \; \sigma_t^i]$ è la speranza matematica di $f_t(S_t)$, essendo f_t funzione della variabile aleatoria S_t, σ_t^i rappresentano le componenti della strategia $= \sigma_t^i({}_p h_t)$.

Introduciamo ancora i seguenti simboli:

Δ_t, decisioni aleatorie dell'Assicuratore all'inizio del tempo t

Δ_t^i , componenti aleatorie delle decisioni, che poi divengono D_t^i

${}_p h_t = ({}_p s_t \; D_t) = ({}_p h_{t-1}; s_{t-1}; D_{t-1})$ informazioni disponibili alla fine del periodo $t-1$

$G_t({}_p h_t; \; s_t; \; D_t)$ spesa di gestione nel periodo t.

Siano inoltre I_t il tasso di interesse posticipato annuo aleatorio fra t e $t+1$, i_t sia il tasso noto a $\sigma = \sigma_t({}_p h_t)$, la strategia.

Assumiamo come dato iniziale quello che si trova realizzato alla fine del periodo $t-1$, dove l'insieme delle informazioni attuali risulta:

$$(7) \qquad {}_p h_t = ({}_p h_{t-1}; s_{t-1}; \; D_{t-1})$$

Consideriamo il periodo t. Osserviamo che a ${}_p h_t$ la strategia σ_t porta ad una decisione:

(8) $$D_t = \sigma_t({}_p h_t) \quad .$$

In virtù dell'ipotesi b) l'Impresa può far corrispondere a ciascuno stato eventuale S_t una probabilità ed una spesa (o costo). L'Impresa può quindi calcolare la speranza matematica relativa al periodo t e attualmente alla fine del periodo $t-1$ attraverso il fattore di attualizzazione [8],[15] $\frac{1}{1-i_{t-1}}$

Passiamo adesso al tempo $t+1$, continuiamo a porci sempre alla fine del periodo $t-1$. L'insieme delle informazioni che saranno disponibili alla fine del periodo t, è allora un vettore aleatorio:

(9) $${}_p H_{t+1} \equiv ({}_p h_t ; D_t ; S_t)$$

con la legge di probabilità nota, essendo nota la legge di S_t. A tale vettore, la strategia σ fa corrispondere una eventuale decisione $\Delta_{t+1} = \sigma_{t+1}({}_p H_{t+1})$; alla coppia $({}_p H_{t+1} ; E_{t+1})$ corrisponderà quindi una spesa C_{t+1}. La probabilità di realizzazione della coppia precedente è data dalla relazione

(10) $$\mathrm{Prob}({}_p H_{t+1} ; S_{t+1}) = \mathrm{Prob}({}_p H_{t+1}) \ \mathrm{Prob}(S_{t+1})$$

quando siano dati ${}_p H_{t+1}$ e $\sigma_{t+1}({}_p H_{t+1})$, possiamo calcolare con una sommatoria su tutte le eventuali coppie $({}_pH_{t+1};S_{t+1})$ la speranza matematica relativa al periodo $t+1$ ed attualizzarla al tempo t sempre tramite il fattore aleatorio di attualizzazione $\frac{1}{1+I_t}$ tenuto conto che $I \in S_t \in {}_pH_{t+1}$. La speranza matematica così ottenuta, la si attualizza ancora al tempo $t-1$, ma questa volta tramite il fattore $\frac{1}{1+i_{t-1}}$.

Continuando con lo stesso procedimento al tempo $t+2$, avremo che le informazioni disponibili alla fine del periodo $t+1$, forniscono un vettore aleatorio del tipo:

$$(11) \qquad {}_pH_{t+2} \cong ({}_pH_{t+1};\ \Delta_{t+1};\ S_{t+1})$$

con legge di probabilità nota e sul quale operiamo come nel periodo precedente, e così via. Otteniamo così una strategia per il calcolo degli elementi della speranza matematica dell'impresa assicurativa nei tempi suc succevi $t+1;t+2;\ldots$. Ad ogni strategia, poi, potendo calcolare il danno medio, fornito dalla (6) possiamo associare la speranza matematica di questo danno medio (o rischio), tramite la relazione:

$$B(\sigma_t) = \sum_{t=1}^{n} R(S_t,\sigma)\ \mathrm{Prob}(S_t)\ .$$

La speranza matematica attualizzata dell'Impresa assicurativa risulta così la somma di una serie, in generale convergente a causa della presenza del fattore di attualizzazione $\frac{1}{1+i_{t-1}}$.

Questa speranza matematica è proprio un funzionale del tipo (5) dipendendo esso dalla funzione o dall'insieme delle funzioni, determinanti la strategia σ.

In conclusione, siamo in grado di confrontare le strategie adottate e diremo che la strategia σ è migliore di una strategia σ^1 se porta ad una speranza attualizzata, delle spese totali e del livello di rischiosità, meno alta; mentre una strategia ottimale σ_0 per un Impresa assicurativa deve essere tale da migliorare ogni altra strategia σ. La strategia σ_0 deve essere inoltre in grado di far corrispondere ad ogni trasporto elementare di probabilità una diminuzione della spesa o un aumento del guadagno medio. Solo così essa potrà costituire una preferibilità assoluta di decisione per l'impresa assicurativa.

Accettato per la pubblicazione su
parere favorevole del Prof. Giuseppe CHIASSINO