Inoltre, poiché a è infinito (la sua potenza è $\geq$ di quella di N, conseguentemente contiene un insieme numerabile) esiste una successione b_n di elementi di a tale che $b_n \neq b_m$ $\forall n,m \in N$, $n \neq m$. Sia b l'applicazione di J in a tale che $b(i) = b_1$ $\forall i \in I_1$, $b(i) = b_2$ $\forall i \in I_2, \ldots$ $b(i) = b_n$ $\forall i \in I_n, \ldots$.

Risulta $b \in_F {}^*a$ poiché $\{i \in J : b(i) \in a\} \equiv J \in F$. Ma b non è standard in quanto non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $b =_F {}^*c$. Se esistesse c, $\{i \in J : b(i)=c\} \in F$ contro l'ipotesi che $b(i)$ assume valore costante solo nei sottoinsiemi I_n di J che non appartengono ad F .

6.- Introduzione di un linguaggio formale L; $\mathbb{R}$ come L-struttura; $\mathbb{R}^J$ come ${}^*L$-struttura.

Mediante una corrispondenza biunivoca I fra un sottoinsieme dell'insieme di tutte le costanti di un linguaggio formale L e gli elementi della struttura $\mathbb{R}$ si possono identificare le costanti di tale sottoinsieme con gli elementi di $\mathbb{R}$, sicché $\mathbb{R}$ diviene parte di L: si dice che $\mathbb{R}$ è una L-struttura. Indicato con $K(L)$ (o semplicemente con K) l'insieme di tutte le formule ben formate (wff) di L, che siano "ammissibili"(8), l'insieme di tutti gli enunciati ammissibili veri in $\mathbb{R}$ sarà denotato con K_o ($K_o \subset K$). In modo analogo, si considera $\mathbb{R}^J$ come parte di un linguaggio formale ${}^*L$, cioè $\mathbb{R}^J$ è una ${}^*L$-struttura: una wff di ${}^*L$, ammissibile(9), si dice "interna" (in particolare "standard") se tutte le costanti della formula denotano entità interne (in particolare "standard"). Indicato con ${}^*K$ l'insieme di tutti gli enunciati interni di ${}^*L$, il sottoinsieme di enunciati interni, veri in ${}^*\mathbb{R}$, sarà denotato con ${}^*K_o$.

${}^*V$ è una wff standard di ${}^*L$ che si ottiene da V, wff ammissibile di L, sostituendone tutte le costanti $a_1, \ldots a_p$ con ${}^*a_1, \ldots {}^*a_p$ e lasciando invariate

(8) Una wff è ammissibile se il dominio di ogni quantificatore che figura in essa è una specifica entità di $\mathbb{R}$: $(\forall x)[[x \in a] \Longrightarrow \ldots]$, $(\exists x)[[x \in a] \wedge \ldots]$ con $a \in \mathbb{R}$.

(9) Il dominio di ogni quantificatore, in tal caso, è una specifica entità di $\mathbb{R}^J$.

variabili e parentesi.

${}^*V$ si dice la trasformata di V mediante l'immersione $a \to {}^*a$ propria di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$.

7.- Un'altra importante proprietà dell'immersione: $V \in K_o \iff {}^*V \in {}^*K_o$

LEMMA.- Sia $V(x_1,\dots,x_p)$ una L-wff ammissibile con le variabili libere $x_1 \dots x_p$ e sia $X = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1 \dots x_p) \in a \in \mathbb{R} \wedge V(x_1,\dots x_p)\}$. Allora $X \in \mathbb{R}$ e ${}^*X = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V(y_1,\dots y_p)\}$

Dim.- $X \in \mathbb{R}$ in quanto $X \subset a \in \mathbb{R}$, cfr. f) di p.1.

Supponiamo V atomica, ossia $(x_1,\dots x_p, a_1,\dots a_{q-1}) \in a_q$.

${}^*V(y_1 \dots y_p) \equiv (y_1 \dots y_p, {}^*a_1 \dots {}^*a_{q-1}) \in {}^*a_q$ e significa che

$\{i \in J : (y_1(i),\dots y_p(i), a_1 \dots a_{q-1}) \in a_q)\} \in F$ cioé $\{i \in J : V(y_1(i) \dots y_p(i)\} \in F$.

Si tratta di far vedere che ogni elemento $z \in {}^*X$ è elemento di ${}^*a \wedge {}^*V(z)$ e viceversa. Infatti $z \in {}^*X \iff J_1 = \{i \in J : z(i) \in X\} \in F \iff$

$\iff J_1 = \{i \in J : z(i) \in a \wedge V(z(i))\} \in F \iff [J_1 \subset J_2 = \{i \in J : z(i) \in a\} \in F$ e $J_1 \subset J_3 = \{i \in J : V(z(i))\} \in F] \iff z \in {}^*a \wedge {}^*V(z)$. Il viceversa è ovvio, osservando che se J_2 e $J_3 \in F$, $J_2 \cap J_3 \in F$. Dimostriamo ora che il teorema è valido per tutte le V senza quantificatori: basta far vedere che se è vero per V è vero per $[\neg V]$ e se è vero per V ed W, è vero per $[V \wedge W]$ (10) :

sia $Y = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1 \dots x_p) \in a \in R \wedge \neg V(x_1,\dots x_p)\}$ si avrà

${}^*V = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge \neg {}^*V(y_1 \dots y_p)\}$

---

(10) E' noto, infatti, che gli altri connettivi possono essere espressi in termini di $\neg$ e di $\wedge$.