2. La struttura $(\mathbb{R}^J, \epsilon_F, =_F)$.

Sia J un insieme infinito e sia F un ultrafiltro di sottoinsiemi di J (non vuoto), cioé un insieme non vuoto di sottoinsiemi di J tale che:
1) $\emptyset \notin F$; 2) $x \in F$, $y \in F \Longrightarrow x \cap y \in F$; 3) $x \in F$, $x \subset y \subset J \Longrightarrow y \in F$;
4) $x \subset J \Longrightarrow x \in F$ aut $J - X \in F$.

Denotiamo con $\mathbb{R}^J$ l'insieme di tutte le applicazioni da J in $\mathbb{R}$. Se consideriamo l'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$ definita da ${}^*a(i) = a$ $\forall i \in J$, $\mathbb{R}$ viene identificato in $\mathbb{R}^J$ dalle applicazioni costanti. Si estendono ad $\mathbb{R}^J$ le relazioni di ϵ e $=$ di $\mathbb{R}$ nel modo seguente:

Def. Se α e β sono elementi di $\mathbb{R}^J$:

1) $\alpha =_F \beta$ se e solo se $\{i \in j : \alpha(i) = \beta(i)\} \in F$
2) $\alpha \in_F \beta$ se e solo se $\{i \in j : \alpha(i) \in \beta(i)\} \in F$.

Si ha che: $\forall\, a,b \in R$:

1') $(a = b) \Longleftrightarrow ({}^*a =_F {}^*b)$

2') $(a \in b) \Longleftrightarrow ({}^*a \in_F {}^*b)$

Infatti se $a = b$: ${}^*a(i) = {}^*b(i)$ $\forall i \in J \in F$ e quindi ${}^*a =_F {}^*b$; se ${}^*a =_F {}^*b$: $J_1 = \{i \in j : {}^*a(i) = {}^*b(i)\} \in F$ che, pertanto, non è vuoto, sicché $\exists i \in J$ t.c. $a = {}^*a(i) = {}^*b(i) = b$ cioé $a = b$ (poiché ${}^*a(i) = a$ e ${}^*b(i) = b$ $\forall i \in J$). Analogamente per 2').

Pertanto le relazioni "$=_F$" e "ϵ_F" sono F-estensione di "$=$" e "ϵ" di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$. Tale definizione è giustificata dal fatto che $\forall \alpha, \beta$ elementi di $\mathbb{R}^J$ risulta: $\alpha =_F \beta$ oppure $\alpha \neq \beta$ ed $\alpha \in_F \beta$ oppure $\alpha \notin \beta$.
Infatti sia $J_1 = \{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}$, $J_2 = \{i \in J : \alpha(i) \neq \beta(i)\}$; poiché $J_1 \cup J_2 = J$, si ha che $J_1 \in F$ oppure (aut) $J_2 = J - J_1 \in F$. Analogamente per $\alpha \in_F \beta$. La relazione $=_F$ è di equivalenza, come è facile verificare.