Ultrafiltri e modelli non standard[(*)]

di Alberto Giannone (Lecce)

Summary.- *The ultrapower* ${}^*\mathbb{R}$ *of* $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ *with respect to the ultrafilter* F *is considered:* $R_0 = R$ *(the set of real numbers),* $R_1 = \wp(R_0)$, $R_2 = \wp(R_0 \cup R_1)$ *etc. etc. In the hypothesis that the ultrafilter is* δ*-incomplete,* $\mathbb{R}$ *is properly imbedded in* ${}^*\mathbb{R}$ *(and all admissible sentences of* $\mathbb{R}$*, which hold in* $\mathbb{R}$ *also hold in* ${}^*\mathbb{R}$*).*

(*) Seminario tenuto presso l'Istituto Matematico dell'Università di Lecce il 5 Maggio e il 4 Giugno 1980 da Alberto Giannone (Università di Lecce).

1. Definizione di un insieme $\mathbb{R}$ e alcune sue proprietà. La struttura $(\mathbb{R},\epsilon,=)$

Sia X un insieme infinito di "atomi": se $a \in X$ è un atomo, non si può scrivere "$x \in a$", cioé a è un elemento di X che, a sua volta, non è un insieme.

Si definiscono induttivamente i seguenti insiemi: $X_o = X$, $X_n = \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{n-1} X_k)$ $\forall n \in N$ e si considera l'insieme $\bigcup_{n=o}^{\infty} X_n$. Se $X = R$ avremo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} R_n$$

Gli elementi di $\mathbb{R}$ che appartengono ad R_o si chiamano gli "individui" di R, mentre gli elementi di $\mathbb{R}$ che appartengono a qualche R_n, $n \geq 1$, si dicono le"entità" di $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R},\epsilon,=)$ dicesi la "superstruttura" costruita sugli atomi di R.

Alcune proprietà di $\mathbb{R}$.

a) ϕ è un'entità: $\phi \in \mathcal{P}(R_o) = R_1$

b) $R_p \subset R_n$ $\forall n \geq p \geq 1$: $x \in \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{p-1} R_k) \Longrightarrow x \subset \bigcup_{k=o}^{p-1} R_k \Longrightarrow x \subset \bigcup_{k=o}^{p} R_k$ $\forall q \geq p-1$

cioé $x \in \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{q} R_k) = R_{q+1}$, $q+1 \geq p$.

c) $\bigcup_{k=o}^{n} R_k = R_o \cup R_n$: si tenga presente che R_o è disgiunto da ogni R_n con $n \geq 1$ e la b).

d) $R_p \in R_n$ $\forall p : 0 \leq p \leq n-1$ e $\forall n \geq 1$: $R_p \subset R_o \cup R_1 \ldots \cup R_{n-1}$, $R_p \subset R_o \cup R_{n-1}$, $R_p \in \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-1}) = R_n$

e) Se $x \in y \in R_n$ $n \geq 1$, $x \in R_o \cup R_{n-1}$:$y \subseteq R_o \cup R_{n-1}$ e quindi $x \in R_o \cup R_{n-1}$, se $n > 1$ si avrà $\bigcup_{x \in y} x \in R_{n-1}$: infatti $x \in R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow x \in R_{n-1}$, poiché $x \notin R_o$ perché non ha senso unione di individui ma unione di parti ed anche $\bigcup_{x \in Y} X \in R_{n-1}$

f) Se $x \subset y \in R_n$, $n \geq 1$, $x \in R_n$; $y \subset R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow x \subset R_o \cup R_{n-1}$, cioé $x \in R_n$

g) Se $(x_1,x_2\dots x_h) \in y \in R_n$ [1], $n \geq 1$, $x_1 \in R_o \cup R_{n-1},\dots,x_h \in R_o \cup R_{n-1}$,

in particolare se b, relazione binaria, $\in \mathbb{R}$ $n \geq 1$, dom $b = \{x:(\exists y)(x,y)\in b\} \in \mathbb{R}$ e anche rang$b = \{y:(\exists x)(x,y)\in b\} \in \mathbb{R}$: infatti, per e) $(x_1,x_2\dots x_h) \in R_o \cup R_{n-1}$ cioé $\{\{x_1\}, \{x_1,(x_2\dots x_n)\}\} \in R_o \cup R_{n-1} = R_o \cup \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-2})$, cioé $\{x_1,(x_2\dots x_h)\} \in R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow x_1 \in R_o \cup R_{n-3} \subset R_o \cup R_1$ ed anche $(x_2\dots x_h) \in R_o \cup R_{n-3} \subset R_o \cup R_{n-1}$ [2] e quindi $x_2 \in R_o \cup R_{n-1},\dots,x_h \in R_o \cup R_{n-1}$

Se $(x_1,x_2) \in b \in R_n$ $n \geq 1$, $x_1 \in R_o \cup R_{n-1}$ e $\{x_1:(\exists x_2)(x_1,x_2)\in b\} \subset R_o \cup R_{n-1}$ e quindi $\{x_1:\dots\dots\} \in \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-1}) = R_n$, cioé dom $b \in \mathbb{R}$. Analogamente per rang$b$.

h) Se x è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; $x = \{x_1,x_2 \dots x_n\}$ con $x_i \in \mathbb{R}$, tutti gli $x_i \in \bigcup_{k=o}^{p} R_k$ cioé $x \subset \bigcup_{k=o}^{p} R_k \Longrightarrow x \in \mathcal{P}(R_o \cup R_p) = R_{p+1}$

i) Se $x \in R_n$ $n \geq 1$, $\mathcal{P}(x) \in R_{n+1}$; $x \in \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-1}) \Longrightarrow x \subset R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \subset R_n \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \subset R_o \cup R_n$, $\mathcal{P}(x) \in R_{n+1}$.

l) Se $x_1,x_2\dots x_h \in \mathbb{R}$, $(x_1,x_2 \dots x_h) \in \mathbb{R}$ e $X_1 \times X_2 \dots \times X_h \in \mathbb{R}$. In particolare ogni relazione Φ, considerata come sottoinsieme di un prodotto cartesiano, $\in \mathbb{R}$ quando domini e rango $\in \mathbb{R}$ [3].

---

(1) Come si vedrà in l) se $x_1,\dots x_h \in R_o$, $(x_1,x_2,\dots x_h) \in R_{2(h-1)}$, per cui n deve essere, almeno, $2h-1$.

(2) $\{\{x_1\}, \{x_2\dots x_h)\}\} \in \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-2}) \Longrightarrow \{\{x_1\},\{x_1(x_2\dots x_h)\}\} \subset R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow$
$\{x_1,(x_2,\dots,x_h)\} \in R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow \{x_1,(x_2\dots x_h)\} \in R_{n-2} = \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-3}) \Longrightarrow$
$\{x_1,(x_2\dots x_h)\} \subset R_o \cup R_{n-3} \Longrightarrow x_1 \in R_o \cup R_{n-3}$ e $(x_2\dots x_h) \in R_o \cup R_{n-3}$

(3) $\text{dom}_i\Phi = \{x_i : \exists x_1,x_2\dots x_{i-1},x_{i+1}\dots x_h$ con $(x_1\dots x_h) \in \Phi\}$

rang $\Phi = \{x_h : \exists x_1,x_2\dots x_{h-1}$ con $(x_1\dots x_h) \in \Phi\}$

Anche le funzioni $\in \mathbb{R}$ se dominio e codominio $\in \mathbb{R}$, infatti $(x,y, x R y) \in \mathbb{R}$.

Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, per h) $\{x_1\}, \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}$ e quindi $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$.
Si noti che se, per es., $x_1 \in R_p$, $x_2 \in R_n$, $n \geq p \geq 0$, $\{x_1\} \in R_{p+1}$ e $\{x_1,x_2\} \in R_{n+1}$ per h) ed allora $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} = (x_1,x_2) \in R_{n+2}$, per la stessa h). In particolare se $n = p = 0$, $(x_1,x_2) \in R_2$ cioé $R^2 \subset R_2$. Analogamente se $x_1,x_2,x_3 \in R_o$, $(x_1,x_2,x_3) = ((x_1,x_2),x_3) \in R_4$ poiché $(x_1,x_2) \in R_2$ e $x_3 \in R_o$, cioé $R^3 \subset R_4 \ldots R^h \subset R_{2(h-1)}$.

La formula è vera $\forall h \geq 1$. Infatti: $(x_1,\ldots x_{h+1}) = ((x_1 \ldots x_h), x_{h+1}) \in R_{2(h-1)+2} = R_{2h}$.

Si osservi che $R^h \subset R_{2(h-1)} \Longrightarrow R^h \in \mathcal{S}(R_{2(h-1)}) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_{2(h-1)}) = R_{2h-1}$ cioé $R^h \in R_{2h-1}$.

Facciamo vedere che $x_1 \times x_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 \in R_p$, $x_2 \in R_n$ $p \geq 1$, $n \geq 1$; x_1 e $x_2 \in R_n$ se $n \geq p$, sicché x_1 e $x_2 \in R_n \in R_{n+1}$ e per la e) $X_1 \cup X_2 \in R_n$ ed anche $\mathcal{S}(x_1 \cup x_2) \in \mathbb{R}$ per la i); se $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, x_1 e $x_2 \in X_1 \cup X_2$ e quindi $\{x_1\}$ e $\{x_1,x_2\} \in \mathcal{S}(X_1 \cup X_2)$ e ciò vuol dire che $(x_1,x_2) =$

$= \{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2))$: in definitiva, $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$
$\Longrightarrow (x_1,x_2) \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2))$ ossia $X_1 \times X_2 \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2)) \in \mathbb{R} \Longrightarrow X_1 \times X_2 \in \mathbb{R}$ per f).

Si osservi che la formula $R^h \subset R_{2(h-1)}$ può essere stabilita come applicazione della formula ora ottenuta:

$$R^2 = R \times R \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R) = \mathcal{S}(R_1) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_1) = R_2.$$
$$R^3 = R^2 \times R \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_1^2)) \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_2) = \mathcal{S}(R_3) \subset R_4. \ \ldots$$

Supposta vera con l'indice h, è vera con l'indice h+1 : $R^h \subset R_{2(h-1)} \Longrightarrow R^{h+1} \subset R_{2h}$:

$R^{h+1} = R \times R^h \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R^h) \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_{2(h-1)}) \subset \mathcal{S}(R_{2h-1}) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_{2h-1}) = R_{2h}$.

2. La struttura $(\mathbb{R}^J, \in_F, =_F)$.

Sia J un insieme infinito e sia F un ultrafiltro di sottoinsiemi di J (non vuoto), cioé un insieme non vuoto di sottoinsiemi di J tale che:
1) $\emptyset \notin F$; 2) $x \in F$, $y \in F \Longrightarrow x \cap y \in F$; 3) $x \in F$, $x \subset y \subset J \Longrightarrow y \in F$;
4) $x \subset J \Longrightarrow x \in F$ aut $J - X \in F$.

Denotiamo con $\mathbb{R}^J$ l'insieme di tutte le applicazioni da J in $\mathbb{R}$. Se consideriamo l'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$ definita da ${}^*a(i) = a$ $\forall i \in J$, $\mathbb{R}$ viene identificato in $\mathbb{R}^J$ dalle applicazioni costanti. Si estendono ad $\mathbb{R}^J$ le relazioni di $\in$ e $=$ di $\mathbb{R}$ nel modo seguente:

<u>Def</u>. Se α e β sono elementi di $\mathbb{R}^J$:

1) $\alpha =_F \beta$ se e solo se $\{i \in j : \alpha(i) = \beta(i)\} \in F$

2) $\alpha \in_F \beta$ se e solo se $\{i \in j : \alpha(i) \in \beta(i)\} \in F$.

Si ha che: $\forall$ a,b $\in$ R:

1') $(a = b) \Longleftrightarrow ({}^*a =_F {}^*b)$

2') $(a \in b) \Longleftrightarrow ({}^*a \in_F {}^*b)$

Infatti se $a = b$: ${}^*a(i) = {}^*b(i)$ $\forall i \in J \in F$ e quindi ${}^*a =_F {}^*b$; se ${}^*a =_F {}^*b$: $J_1 = \{i \in j : {}^*a(i) = {}^*b(i)\} \in F$ che, pertanto, non è vuoto, sicché $\exists i \in J$ t.c. $a = {}^*a(i) = {}^*b(i) = b$ cioé $a = b$ (poiché ${}^*a(i) = a$ e ${}^*b(i) = b$ $\forall i \in J$). Analogamente per 2').

Pertanto le relazioni " $=_F$ " e " $\in_F$ " sono F-estensione di "$=$" e "$\in$" di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$. Tale definizione è giustificata dal fatto che $\forall \alpha, \beta$ elementi di $\mathbb{R}^J$ risulta: $\alpha =_F \beta$ oppure $\alpha \neq \beta$ ed $\alpha \in_F \beta$ oppure $\alpha \notin \beta$.
Infatti sia $J_1 = \{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}$, $J_2 = \{i \in J : \alpha(i) \neq \beta(i)\}$; poiché $J_1 \cup J_2 = J$, si ha che $J_1 \in F$ oppure (aut) $J_2 = J - J_1 \in F$. Analogamente per $\alpha \in_F \beta$. La relazione $=_F$ è di equivalenza, come è facile verificare.

2. Alcune proprietà dell'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$.

(i) ${}^*\phi$ è vuoto. Infatti, qualunque sia a, elemento di $\mathbb{R}^J$: $\{i \in J : x(i) \in \phi\} = \phi \notin F$, ciò vuol dire che $\sim (\exists x \in_F {}^*\phi)$.

(ii) $\forall a,b \in \mathbb{R} : a \subset b \Longleftrightarrow {}^*a \subset {}^*b$; $\Longrightarrow$: si deve far vedere che $z \in_F {}^*a \Longrightarrow z \in_F {}^*b$ nell'ipotesi che $(x \in a) \Longrightarrow (x \in b)$: $z \in_F {}^*a \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in a\} \in F \Rightarrow J_1 \subset J_2 = \{i \in J : z(i) \in b\} \in F$ cioé $z \in_F {}^*b$.

$\Longleftarrow$. E' ovvio; si deve far vedere che $x \in a \Longrightarrow x \in b$ nell'ipotesi che: $z \in_F {}^*a \Longrightarrow z \in_F {}^*b$: se $x \in a$ si ha che ${}^*x \in_F {}^*a$ e per l'ipotesi ${}^*x \in_F {}^*b \Longleftrightarrow x \in b$ poiché x e $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} : {}^*\{a\} = \{{}^*a\}$; $x \in_F {}^*\{a\} \Longleftrightarrow \{i \in J : x(i) \in \{a\}\} \in F \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \{i \in J : x(i) = a\} \in F$
$\Longleftrightarrow x \in_F \{{}^*a\}$ (si tenga presente, per il 1° passaggio, che ${}^*\{a\}(i) = \{a\}\ \forall i \in J$).

(iv) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

${}^*(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i$; basta far vedere che ${}^*(a_1 \cup a_2) = {}^*a_1 \cup {}^*a_2$. Infatti:
$x \in_F {}^*(a_1 \cup a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1 \cup a_2\} \in F$ sicché
$J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1\} \cup \{i \in J : x(i) \in a_2\} \in F$, ciò implica [4] che almeno uno di tali insiemi J_2, J_3 appartiene ad F ; si ha quindi $x \in_F {}^*a_1$ oppure $x \in_F {}^*a_2$, cioé $x \in_F {}^*a_1 \cup {}^*a_2$. Viceversa se $J_2 \in F$ o $J_3 \in F$, $J_1 = J_2 \cup J_3 \in F$.

${}^*(\bigcap_{i=a}^{n} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i$; basta far vedere che ${}^*(a_1 \cap a_2) = {}^*a_1 \cap {}^*a_2$. Infatti:

$x \in_F {}^*(a_1 \cap a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1 \cap a_2\} \in F$ sicché
$J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1\} \cap \{i \in J : x(i) \in a_2\} = J_2 \cap J_3 \in F_1$, ciò implica $J_2 \in F$ e $J_3 \in F$, si ha quindi $x \in_F {}^*a_1$ e $x \in_F {}^*a_2$, cioé

---

(4) Se $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in F$ $(F_i \subset F, i=1,2,\ldots,)$ allora $F_i \in F$ per almeno un indice i: infatti se nessun $F_i \in F$, tutti gli F_i' (complementari di F_i) $\in F$ e quindi $\bigcap F_i' \in F$ e ciò implica $\cup F_i = J = \bigcap F_i' \notin F$ contro l'ipotesi.

$x \in_F {}^*a_1 \cap {}^*a_2$. Viceversa se $J_2 \in F$ e $J_3 \in F$, $J_1 = J_2 \cap J_3 \in F$.

${}^*\{a_1,\dots,a_n\} = \{{}^*a_1,\dots,{}^*a_n\}$; ${}^*\{a_1,a_2\} = {}^*(\{a_1\} \cup \{a_2\}) = {}^*\{a_1\} \cup {}^*\{a_2\} =$

$\{{}^*a_1\} \cup \{{}^*a_2\} = \{{}^*a_1, {}^*a_2\}$; segue che ${}^*(a_1,\dots,a_n) = ({}^*a_1,\dots,{}^*a_n)$.

${}^*(a_1 \times \dots \times a_n) = {}^*a_1 \times \dots \times {}^*a_n$; $z \in_F {}^*(a_1 \times a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in a_1 \times a_2\} \in F \Longleftrightarrow$

$\{i \in J : \exists (x(i),y(i)) = z(i) \in a_1 \times a_2\} \in F$. Sia $\bar{x}$ d R^J t.c. $\bar{x}(i) = x(i)$ $\forall i \in J_1$,

si ha che $J_1 \subset J_2 = \{i \in J : \bar{x}(i) \in a_1\}$, cioé $\bar{x} \in_F {}^*a_1$; analogamente, sia

$\bar{y} \in_F {}^*a_2$ si ha $(\bar{x},\bar{y}) \in_F {}^*a_1 \times {}^*a_2$ ed $(\bar{x},\bar{y}) =_F z$.

(v) $\forall a,b \in R$: ${}^*(a-b) = {}^*a - {}^*b$; $x \in_F {}^*(a-b) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a-b\}^{(5)} \in F \Longrightarrow$

$J_1 \subset J_2 = \{i \in J : x(i) \in a\} \in F$ e $J_1 \subset J_3 = \{i \in J : x(i) \notin b\} \in F$ cioé

$x \in_F {}^*a - {}^*b$. Viceversa se J_2 e $J_3 \in F$, $J_2 \cap J_3 = \{i : x(i) \in a - b\} \in F$

cioé $x \in_F {}^*(a - b)$.

(vi) Se $b \in R$, b relazione binaria : ${}^*(\operatorname{dom} b) = \operatorname{dom} {}^*b$, ${}^*(\operatorname{ran} b) = \operatorname{ran} {}^*b$ e $\forall a \in R$:

${}^*(b(a)) = {}^*\{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\} = {}^*b({}^*a) = \{y : (\exists x)(x \in {}^*a \wedge (x,y) \in {}^*b\}$;

$x \in_F {}^*(\operatorname{dom} b) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in \operatorname{dom} b\} \in F$, vuoldire che $\forall i \in J_1$ $\exists y(i)$

tale che $(x(i),y(i)) \in b \Longleftrightarrow (x,y) \in_F {}^*b \Longleftrightarrow x \in_F \operatorname{dom} {}^*b$. Il viceversa è ovvio.

Analogo discorso per il rango.

$z \in_F {}^*\{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\} \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in \{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\}\} \in F$

$\Longleftrightarrow \{i \in J : (\exists x(i) \in a \wedge (x(i), z(i)) \in b\} = J_1$. Sia $\bar{x}$ di R^J t.c. $\bar{x}(i) = x(i)$

$\forall i \in J_1$: $(\bar{x},z) \in_F {}^*b$ e $\bar{x} \in_F {}^*a$ poiché $J_2 = \{i \in J : \bar{x}(i) \in a\} \supset J_1$.

---

(5) $a-b \subset a \in R_n \Longrightarrow a - b \in R_n$

Il viceversa: se $J_2 \in F$ e $J_1 \in F$, $J_1 \cap J_2 \in F$.

4. L'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto ad F .

Un elemento a di $\mathbb{R}^J$ si dice "interno" se esiste un numero naturale $n \geq 0$ t.c. $a \in_F {}^*R_n$. Sono quindi elementi interni di $\mathbb{R}^J$ quelle applicazioni $(a(i))_{i \in J}$ che assumono valore in qualche R_n. Es. $a(i) = i \in R_o$. Gli elementi a di $\mathbb{R}$ riguardati come elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé le funzioni di costante valore a, sono elementi interni, poiché $a \in R_n \iff {}^*a \in_F {}^*R_n$: si dicono "standard". Un elemento a di $\mathbb{R}^J$ è, quindi, standard quando $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a = {}^*b$. Tutti gli altri elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé quelli che non sono interni, si dicono "esterni". L'unione di tutti gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ si dice l'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto a F e si indica con simbolo ${}^*\mathbb{R}$, cioé:

$$ {}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} {}^*R_n $$

Si osservi che gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ sono gli elementi degli insiemi standard ${}^*R_n$ (${}^*R_n$ è interno, in quanto ${}^*R_n \in {}^*R_{n+1}$ ed è standard poiché $R_n \in \mathbb{R}$).

Gli elementi interni si possono caratterizzare nel seguente modo:

Teorema: Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) a, elemento di $\mathbb{R}^J$, è interno.

2) a è elemento di un'entità standard.

Dim. 1) ==> 2) $a \in_F {}^*R_n$ ed ${}^*R_n$ è standard

2) ==> 1) $a \in_F {}^*b$ con $b \in \mathbb{R}$; $b \in R_n$ per qualche n, cioé $b \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-1})$, $b \subset R_o \cup R_{n-1}$, ${}^*b \subset {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ e quindi $a \in_F {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ cioé a è interno.

Teorema.- Se $a \in_F b \in_F {}^*R_n$ ($n \geq 1$), a è interno (cioé gli elementi di entità interne sono interni): $b \in_F {}^*R_n \iff J_1 = \{i \in J : b(i) \in R_n\} = \{i \in J : b(i) \subset R_o \cup R_{n-1}\} \in F$

e $a \in_F b \Longleftrightarrow J_2 = \{i \in J : a(i) \in b(i))\} \in F$: $\forall i \in J_1 \cap J_2 \in F : a(i) \in R_0 \cup R_{n-1}$,

cioé $a \in_F {}^*R_0 \cup {}^*R_{n-1}$.

5.- <u>L'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$ è propria se F è ultrafiltro δ-incompleto.</u>

In questo paragrafo si dimostra che, nell'ipotesi che F sia δ-incompleto, vi sono elementi interni di $\mathbb{R}^J$ che non sono standard, ciò vuol dire che $\mathbb{R}$ è propriamente immerso in ${}^*\mathbb{R}$.

1° <u>Teorema fondamentale</u>.- Se F è δ-incompleto [6] ed $a \in R$ è un'entità che ha infiniti elementi allora esiste $b \in {}^*a$ che non è standard. (b è interno perché elemento di entità standard).

<u>Dim</u>. - Poiché F è δ-incompleto, esiste una partizione numerabile $\{I_1, I_2, \ldots I_n$ di J tale che, $\forall n \in N : I_n \notin F$ [7].

---

[6] F si dice δ-incompleto se esiste una successione $F_n \in F$ t.c. $\bigcap_{u=1}^{\infty} F_n \notin F$. Si dice δ-completo quando $\forall F_n \in F$ (F_n successione) : $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in F$, cioé quando la 2^a proprietà di filtro vale per un numero infinito di $F_n \in F$. Si ricorda che non si conosce se esistono ultrafiltri δ-completi liberi, mentre ogni δ-incompleto è libero, cioé $\bigcap(G : G \in F) = \emptyset$.

[7] Le seguenti proposizioni sono equivalenti: a) F è δ-incompleto.
b) $\exists \{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1} \ldots\}$ di J tale che $I_n \notin F, \forall n$.

<u>Dim</u>.- Si ricorda che F è δ-completo $\Longleftrightarrow$ μ_F è una misura (cfr. [1])

a $\Longleftrightarrow$ b. Poiché F è δ-incompleto μ_F non è una misura, sicché non vale la completa additività, cioé $\exists F_n$, successione di parti di J, con $F_i \cap F_j = \emptyset\, i \neq j$, tale che $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$, cioé il 1° membro deve essere 1, il 2° membro 0, il che vuol dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in F$ ed $F_n \notin F, \forall n$. Posto $F_0 = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n)'$ si ha che $F_0 \notin F$ ed $\{F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots\}$ è una partizione numerabile di J ed $F_n \notin F$ $\forall n = 0, 1, \ldots$;

b $\Longrightarrow$ a. Se $I_n \notin F$, $I'_n = J - I_n \in F$, inoltre $\bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n = J - \bigcup_{n=1} I_n = \emptyset \notin F$ essendo $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = J$, la successione degli I'_n è quella richiesta.

Inoltre, poiché a è infinito (la sua potenza è $\geq$ di quella di N, conseguentemente contiene un insieme numerabile) esiste una successione b_n di elementi di a tale che $b_n \neq b_m$ $\forall n,m \in N$, $n \neq m$. Sia b l'applicazione di J in a tale che $b(i) = b_1$ $\forall i \in I_1$, $b(i) = b_2$ $\forall i \in I_2, \dots$ $b(i) = b_n$ $\forall i \in I_n, \dots$.

Risulta $b \in_F {}^*a$ poiché $\{i \in J : b(i) \in a\} \equiv J \in F$. Ma b <u>non</u> è standard in quanto non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $b =_F {}^*c$. Se esistesse c, $\{i \in J : b(i)=c\} \in F$ contro l'ipotesi che $b(i)$ assume valore costante solo nei sottoinsiemi I_n di J che <u>non</u> appartengono ad F .

6.- Introduzione di un linguaggio formale L; $\mathbb{R}$ come L-struttura; $\mathbb{R}^J$ come ${}^*L$-struttura.

Mediante una corrispondenza biunivoca I fra un sottoinsieme dell'insieme di tutte le costanti di un linguaggio formale L e gli elementi della struttura $\mathbb{R}$ si possono identificare le costanti di tale sottoinsieme con gli elementi di $\mathbb{R}$, sicché $\mathbb{R}$ diviene parte di L: si dice che $\mathbb{R}$ è una L-struttura. Indicato con $K(L)$ (o semplicemente con K) l'insieme di tutte le formule ben formate (wff) di L, che siano "ammissibili"(8), l'insieme di tutti gli enunciati ammissibili veri in $\mathbb{R}$ sarà denotato con K_o ($K_o \subset K$). In modo analogo, si considera $\mathbb{R}^J$ come parte di un linguaggio formale ${}^*L$, cioè $\mathbb{R}^J$ è una ${}^*L$-struttura: una wff di ${}^*L$, ammissibile(9), si dice "interna" (in particolare "standard") se tutte le costanti della formula denotano entità interne (in particolare "standard"). Indicato con ${}^*K$ l'insieme di tutti gli enunciati interni di ${}^*L$, il sottoinsieme di enunciati interni, veri in ${}^*\mathbb{R}$, sarà denotato con ${}^*K_o$.

${}^*V$ è una wff standard di ${}^*L$ che si ottiene da V, wff ammissibile di L, sostituendone tutte le costanti $a_1, \dots a_p$ con ${}^*a_1, \dots {}^*a_p$ e lasciando invariate

(8) Una wff è ammissibile se il dominio di ogni quantificatore che figura in essa è una specifica entità di $\mathbb{R}$: $(\forall x)[[x \in a] \Longrightarrow \dots]$, $(\exists x)[[x \in a] \wedge \dots]$ con $a \in \mathbb{R}$.

(9) Il dominio di ogni quantificatore, in tal caso, è una specifica entità di $\mathbb{R}^J$.

variabili e parentesi.

${}^*V$ si dice la trasformata di V mediante l'immersione $a \to {}^*a$ propria di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$.

7.- Un'altra importante proprietà dell'immersione: $V \in K_o \iff {}^*V \in {}^*K_o$

LEMMA.- Sia $V(x_1,\dots,x_p)$ una L-wff ammissibile con le variabili libere $x_1\dots x_p$ e sia $X = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1\dots x_p) \in a \in \mathbb{R} \wedge V(x_1,\dots x_p)\}$. Allora $X \in \mathbb{R}$ e ${}^*X = \{(y_1\dots y_p) : (y_1\dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V(y_1,\dots y_p)\}$

Dim.- $X \in \mathbb{R}$ in quanto $X \subset a \in \mathbb{R}$, cfr. f) di p.1.

Supponiamo V atomica, ossia $(x_1,\dots x_p, a_1,\dots a_{q-1}) \in a_q$.

${}^*V(y_1\dots y_p) \equiv (y_1\dots y_p, {}^*a_1\dots {}^*a_{q-1}) \in {}^*a_q$ e significa che

$\{i\in J : (y_1(i),\dots y_p(i), a_1\dots a_{q-1}) \in a_q)\} \in F$ cioé $\{i\in J : V(y_1(i)\dots y_p(i))\} \in F$.

Si tratta di far vedere che ogni elemento $z \in {}^*X$ è elemento di ${}^*a \wedge {}^*V(z)$ e viceversa. Infatti $z \in {}^*X \iff J_1 = \{i\in J : z(i) \in X\} \in F \iff$

$\iff J_1 = \{i\in J : z(i) \in a \wedge V(z(i))\} \in F \iff [J_1 \subset J_2 = \{i\in J : z(i) \in a\} \in F$ e $J_1 \subset J_3 = \{i\in J : V(z(i))\} \in F] \iff z \in {}^*a \wedge {}^*V(z)$. Il viceversa è ovvio, osservando che se J_2 e $J_3 \in F$, $J_2 \cap J_3 \in F$. Dimostriamo ora che il teorema è valido per tutte le V senza quantificatori: basta far vedere che se è vero per V è vero per $[\neg V]$ e se è vero per V ed W, è vero per $[V \wedge W]$ (10) :

sia $Y = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1\dots x_p) \in a \in R \wedge \neg V(x_1,\dots x_p)\}$ si avrà

${}^*V = \{(y_1\dots y_p) : (y_1\dots y_p) \in {}^*a \wedge \neg {}^*V(y_1\dots y_p)\}$

---

(10) E' noto, infatti, che gli altri connettivi possono essere espressi in termini di $\neg$ e di $\wedge$.

con $Y = a - X = \{(x_1,\ldots x_p) : (x_1,\ldots x_p) \in a \wedge \neg V(x_1\ldots x_p)\}$. Basta tener presente $^*Y = {}^*(a-X) = {}^*a - {}^*X$.

Sia $Y = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge [V \wedge W]\}$, si avrà

$$^*Y = \{(y_1\ldots y_p) : (y_1\ldots y_p) \in {}^*a \wedge [{}^*V \wedge {}^*W]\}$$

$$Y = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge V\} \cap \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge W\}$$ e quindi si ha:

$$^*Y = {}^*(\{\ \ldots\ldots\} \cap \{\ldots\ldots\}) = {}^*\{\quad\} \cap {}^*\{\ldots\} = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in {}^*a \wedge [{}^*V \wedge {}^*W]\}$$

Per le wff ammissibili, con quantificatori, si usa il principio di induzione sul numero n dei quantificatori, essendo il teorema dimostrato per $n = 0$. Sia V una wff, ammissibile, con $n+1$ quantificatori.

Può essere scritta nella forma normale prenessa, cioé $V = (qx_{n+1})\ldots(qx_1)W(x_1,\ldots x_{n+1},y_1\ldots y_q)$ dove W non ha quantificatori e $y_1\ldots y_q$ sono le variabili libere di V; supponiamo che qx_{n+1} sia il quantificatore $\exists x_{n+1}$ (altrimenti si considera $\neg V$) e sia b il dominio di $\exists x_{n+1}$ che appartiene ad $\mathbb{R}$ poiché V è ammissibile. Sia:

$$Y = \{((y_1\ldots y_p),x_{n+1}):((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) \in a \times b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W\} \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

Per l'ipotesi induttiva e poiché $^*(a \times b) = {}^*a \times {}^*b$ risulta:

$$^*Y = \{((y_1\ldots y_p),x_{n+1}):((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) \in {}^*a \times {}^*b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^*W\}$$

Il dominio della relazione binaria Y è:

$$X = \text{dom } Y = \{(y_1\ldots y_p):(y_1\ldots y_p) \in a \wedge (\exists x_{n+1})(x_{n+1} \in b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W)\} =$$
$$= \{(y_1\ldots y_p) : (y_1\ldots y_p) \in a \wedge V(y_1\ldots v_p)\}$$

Il dominio della relazione binaria $^*Y$ è:

$$\mathrm{dom}\,{}^*V = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge (\exists x_{n+1})(x_{n+1} \in {}^*b \wedge (qx_n) \dots (ax_1)^*(W)\} =$$

$$= \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V\}$$

ed essendo ${}^*(\mathrm{dom}\ Y) = \mathrm{dom}\ {}^*Y$ si ha: ${}^*X = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V\}$, la tesi.

Si può ora dimostrare il 2° teorema fondamentale.

Un enunciato V di L, ammissibile , è vero in $\mathbb{R}$ se e solo se ${}^*V$ di ${}^*L$ è vero nell'ultrapotenza ${}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}_n$ di $\mathbb{R}$.

Dim.- Nel caso che V è priva di quantificatori: o è atomica cioè del tipo $a \epsilon b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ oppure proviene da altre formule nel modo seguente: $V \equiv [\sim W]$ oppure $V \equiv [V_1 \wedge V_2]$. Dopo di ciò la dimostrazione si ottiene per induzione sul numero di operazioni elementari occorrenti per ottenere la formula da formule atomiche. Per formule atomiche il teorema è dimostrato, poiché, per definizione, $a \epsilon b \iff {}^*a \epsilon_F {}^*b$. Supposto vero per W se $V \equiv [\sim W]$, si ha:

$V \epsilon K_0 \iff [\sim W] \epsilon K_0 \iff W \notin K_0 \iff$ (per l'ipotesi induttiva)

${}^*W \notin {}^*K_0 \iff \sim {}^*W \epsilon {}^*K_0 \iff$ (per definizione ${}^*W$ si ottiene da W sostitudendo solo le costanti a_i con ${}^*a_i$) ${}^*(\sim W) \epsilon {}^*K_0$ cioè ${}^*V \epsilon {}^*K_0$.

Inoltre $V \equiv [V_1 \wedge V_2] \epsilon K_0 \iff V_1 \epsilon K_0 \wedge V_2 \epsilon K_0 \iff$ (per l'ipotesi induttiva) ${}^*V_1 \epsilon K_0 \wedge {}^*V_2 \epsilon {}^*K_0 \iff$ $[{}^*V_1 \wedge {}^*V_2] \epsilon {}^*K_0$ cioè ${}^*[V_1 \wedge V_2] \epsilon {}^*K_0$. Se invece $V \epsilon K_0$ ha la forma normale prenessa $V \equiv (qx_n) \dots (qx_1)W$ dove W non ha quantificatori, si può supporre $(qx_n) = (\exists x_n)$, allora $V \epsilon K_0 \iff \{x_n : x_n \epsilon a \wedge (qx_{n-1}) \dots q(x_1)W\} \equiv A \neq \emptyset$ dove a è il dominio di $(\exists x_n)$; per il lemma, ${}^*A = \{x_n : x_n \epsilon {}^*a \wedge (qx_{n-1}) \dots (qx_1)^*W\}$, sicché $A \neq \emptyset \iff {}^*A \neq {}^*\emptyset \iff {}^*V \epsilon {}^*K_0$.

Tale risultato e l'altro, stabilito col teorema 1° . significano che:

$${}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*\mathbb{R}_n \quad \text{è un modello non standard di } \mathbb{R}.$$

Accettato per la pubblicazione su parere favorevole del Prof. R. Scozzafava

B I B L I O G R A F I A

[1] E. BARONE-A.GIANNONE-R.SCOZZAFAVA : *Atomic,nonatomic and continuous finitely, additive measures results and applications*, Quad.Ist.Mat.Univ. Lecce, Q.6-1978

[2] K.D. STROYAN - W.A.J.LUXEMBURG : *Introduction to the theory of infi nitesimals* Academic Press 1976

[3] W.A.J.LUXEMBURG : *What is Nonstandard analysis?* Amer. Math. Monthly ,80(973) N.6 par. II p.38-67.

I N D I C E