§ 1. Approssimazioni con penalizzazioni non convesse per il pdr unidimensionale e teorema di esistenza.

Sia (u_h) una successione di funzioni per cui si abbia

$$u_h \in C^1(\bar{\Omega};R) \quad ; \quad \ddot{u}_h \in L^1(\bar{\Omega};R) \qquad \text{e}$$

$$\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega} \; .$$

Su f e ψ_h (termine di penalizzazione) facciamo le seguenti ipotesi:

(1) $\quad f \in L^1(\bar{\Omega};R)$;

(2) $\quad \psi_h \in C^\circ(R;R)$

$$\psi_h(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per} \quad \xi > 0 \end{cases} ;$$

$(3)_1$ comunque si fissino ξ_1, ξ_2 (con $0 < \xi_1 < \xi_2$)

$$\lim_h \psi_h(\xi) = +\infty \quad \text{uniformemente per} \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 ;$$

$(3)_2$
$$\lim_{\substack{\xi \to 0^+ \\ h}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta)\,d\eta} = +\infty \;^{(1)} .$$

Sussiste il seguente

---

(1) Per esempio si può prendere

$$\psi_h(\xi) = h\left[\xi^3 + |\xi|^3 - \frac{5}{3}(\xi^5 + |\xi|^5) + \xi^7 + |\xi|^7\right].$$

Lemma 1.- *Comunque si fissi una condizione iniziale* (s,b) *ammissibile per il pdr, ogni successione* (u_h) *di soluzioni dei problemi*

$$(P_h)\quad \begin{cases} \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) & in \quad \bar{\Omega} \\ u_h(0) = s \\ \dot{u}_h^+(0) = b \end{cases}$$

verifica le seguenti condizioni

[A] (u_h) *è equilipschitziana (quindi equicontinua) ed equilimitata;*

[B] *posto* $\alpha_h(\xi) = \int_0^\xi \psi_h(\eta)d\eta$,

esiste $c > 0$ *per cui*

$$0 \le \alpha_h(u_h(t)) \le c \qquad \text{per ogni } h \in N \quad e \quad t \in \bar{\Omega} ;$$

[C] *per ogni* $t \in \bar{\Omega}$ *risulta*

$$\max_h \lim u_h(t) \le 0.$$

Dimostrazione.-

[A] Da (P_h) si ottiene l'identità dell'energia

$(\dot{u}_h(t)\ddot{u}_h(t) + \dot{u}_h(t)\ \psi_h(u_h(t)) = f(t)\dot{u}_h(t) \quad$ in $\quad \bar{\Omega}$;

$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \dot{u}_h^2(t) + \dot{u}_h(t)\ \psi_h(u_h(t)) = f(t)\dot{u}_h(t) \quad$ in $\quad \bar{\Omega}$ e quindi)

$$(4)\quad \frac{1}{2}\ \dot{u}_h^2(t) = \frac{1}{2}\ b^2 - \alpha_h(u_h(t)) + \int_0^t \dot{u}_h(\eta)\ f(\eta)d\eta \qquad \text{per } t\in\bar{\Omega} .$$

Allora

$$0 \le \frac{1}{2}\ \dot{u}_h^2(t) \le \frac{1}{2}\ b^2 + \int_0^t |f(\eta)||\dot{u}_h(\eta)|d\eta \le \frac{1}{2}\ b^2 + ||f||_{L^1(\bar{\Omega};R)} \cdot ||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)}$$

per ogni $t \in \bar{\Omega}$ e per ogni $h \in N$.

Quindi

$$||\dot{u}_h||^2_{C^\circ(\bar\Omega;R)} \leq b^2 + 2\,||f||_{L^1(\bar\Omega;R)} \cdot ||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar\Omega;R)}$$ per ogni $h \in N$, pertanto

(5) $||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar\Omega;R)} \leq$ costante (indipendente da h).

Da (5) segue [A] .

[B] Segue da (4) e (5), tenuto conto dell'ipotesi su f.

[C] Supponiamo che per $\bar t \in \bar\Omega$ si abbia

$$\max_h \lim_h u_h(\bar t) > \sigma > 0;$$

ne segue che per una opportuna estratta di $(u_h(\bar t))$, $(u_{h(k)}(\bar t))$, riesce

$$u_{h(k)}(\bar t) > \sigma > 0.$$

Allora, per (2),

$$\int_{\sigma/2}^{\sigma} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi \leq \int_{s}^{u_{h(k)}(\bar t)} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi = \alpha_{h(k)}(u_{h(k)}(\bar t)) \leq c \;;$$

contro l'ipotesi $(3)_1$. ■

<u>Teorema 1</u>.- *Se* (u_h) *(con* u_h *soluzione del problema* (P_h)*) converge uniformemente in* $\bar\Omega$ *ad una funzione* u*, allora* u *è soluzione del pdr.*

La dimostrazione si articola in diversi punti. Intanto u è lipschitziana in $\bar\Omega$ (per [A]) ed è non positiva (per [C]).

Proviamo (ii).

Sia $\phi \in C_0^\infty(\bar\Omega)$, $\phi \geq 0$; per ogni $h \in N$ si ha

$$\int_\Omega [\ddot{u}_h(t) - f(t)]\,\phi(t)\,dt = -\int_\Omega \psi_h(u_h(t))\,\phi(t)\,dt \leq 0,$$

quindi

$$\int_{\bar\Omega} u_h(t)\, \ddot\phi\, (t)\, dt - \int_{\bar\Omega} f(t)\, \phi(t)\, dt \leq 0 \ ;$$

allora, passando al limite rispetto ad h, riesce

$$\int_{\bar\Omega} u(t)\, \ddot\phi(t)\, dt - \int_{\bar\Omega} f(t)\, \phi(t)\, dt \leq 0 \ .$$

Dimostriamo,ora, la condizione (iii).

In ogni compatto $K \subset \{t \in [0,T] \mid u(t) < 0\}$ risulta $u_h(t) < 0$ definitivamente e quindi $\ddot u_h(t) = f(t)$ definitivamente; ne segue $\ddot u(t) = f(t)$.

E' così provata l'esistenza di $\dot u$ per $u(t) < 0$ e l'esistenza di $\dot u^+$ ed $\dot u^-$, per l'osservazione I.

Resta da provare la conservazione dell'energia.

Osserviamo preliminarmente che esiste una costante $c_0 > 0$ (indipendente da $h \in N$) per cui

$$0 \leq \int_{\bar\Omega} \psi_h(u_h(t))\, dt \leq c_0 \ .$$

La funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi)\, d\xi\right) d\eta$$

è limite uniforme della successione di funzioni concave

$$w_h(t) = u_h(t) - \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi) d\xi\right) d\eta \ .$$

Perciò $w(t)$ è concava, derivabile q.o. in $\bar\Omega$ e risulta

$$\lim_h \dot w_h(t) = \dot w(t) \qquad \text{q.o.} \qquad \text{in} \qquad \bar\Omega \ .$$

Ne segue che $\lim_h \dot u_h(t) = \dot u(t)$ q.o. in $\bar\Omega$.

Dalla (4) si deduce che, q.o. in $\bar{\Omega}$, esiste $\lim_h \alpha_h(u_h(t))$.

Proviamo che risulta

$$\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0 \qquad \text{q.o. in} \quad \bar{\Omega} .$$

Osserviamo subito che se $u(t) < 0$ riesce $\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0$.

Basterà allora provare che

$$\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0 \qquad \text{q.o. in} \quad \Omega_o ,$$

essendo $\Omega_o = \{t \in \bar{\Omega} \mid u(t) = 0\}$.

Osservando che è

$$\lim_h \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt = \int_{\Omega_o} \lim_h \alpha_h(u_h(t))dt ,$$

supponiamo che sia

$$\lim_h \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt > p > 0.$$

Fissato $M > 0$, con $Mp > c_o$, esiste, per $(3)_2$, $\delta > 0$ per cui se $0 < \xi < \delta$ riesce

$$M < \frac{\psi_h(\xi)}{\int_o^\xi \psi_h(\eta)d\eta} \qquad \text{definitivamente;}$$

quindi $\xi < \delta : M \int_o^\xi \psi_h(\eta)d\eta \le \psi_h(\xi)$ definitivamente.

Siccome (u_h) converge uniformemente a zero sul compatto Ω_o, si ottiene $|u_h(t)| < \delta$, definitivamente, in Ω_o .

Allora, per $t \in \Omega_o$, è, definitivamente

$$0 \le M \int_o^{u_h(t)} \psi_h(\eta)\, d\eta = M\, \alpha_h(u_h(t)) \le \psi_h(u_h(t)) .$$

Integrando su Ω_o , si ottiene, definitivamente

$$Mp \le M \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt \le \int_{\Omega_o} \psi_h(u_h(t))dt \le \int_{\bar\Omega} \psi_h(u_h(t))dt \le c_o ,$$

il che è un assurdo.

Allora

$$\frac{1}{2} \left[\dot u^{\pm}(t)\right]^2 = \frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta)\, \dot u\, (\eta)d\eta \qquad \text{q.o. in} \quad \bar\Omega .$$

Osservato che, nei punti in cui u non è derivabile, riesce

$$\lim_{t\to\tau^{\pm}} \dot u(t) = \dot u^{\pm}(\tau)$$

(e che tali punti costituiscono un insieme Ω_1 finito o numerabile), ne segue che le funzioni $[\dot u^{\pm}]^2$ sono prolungabili per continuità su tali punti e siccome coincidono con una stessa funzione continua in $\bar\Omega \setminus \Omega_1$ allora vale la (iv). ■

Concludiamo con il seguente

<u>Corollario.</u>

Nelle ipotesi poste, per ogni dato iniziale (s,b) ammissibile per il pdr esiste almeno una soluzione del pdr in $\bar\Omega$ con dati iniziali (s,b); essa è limite uniforme in $\bar\Omega$ di una successione (u_h) di soluzioni del problema (P_h).

Dimostrazione.

Per la [A] del lemma 1, fissata una qualsiasi successione (u_h) (di soluzioni di (P_h)) esiste una estratta uniformemente convergente ad una funzione u, soluzione del pdr in $\bar\Omega$ (per il teorema 1). ■