Si noti anche che gli integrali esprimibili come funzioni della sola S hanno lo stesso aspetto per gli ordini 3 e 4; tale fatto è un'immediata conseguenza delle (3), e si verifica per tutti gli ordini (e anche per le FTG estese di ordine 4 trattate nel prossimo paragrafo).

Per le proprietà di simmetria delle FTG (e delle funzioni $\wp u$ di Weierstrass) anche le funzioni $\mathfrak{J}$ definite in precedenza godono di alcune interessanti proprietà: su di esse torneremo, in un contesto più generale, nel prossimo paragrafo.

§ II.4.- L'integrazione delle FTG estese di ordine 4.

Come già richiamato nell'introduzione di questo lavoro, una descrizione completa delle funzioni ellittiche si può ottenere in termini delle FTG estese di ordine 4, caratterizzate da un parametro λ (esse riproducono le FTG ordinarie per $\lambda = 0$, e le funzioni trigonometriche e iperboliche per λ rispettivamente uguali a $+1$ e -1 (casi degeneri)).

E' quindi immediato porsi il problema di generalizzare le formule di integrazione date precedentemente in modo da coprire il caso di λ generico. La prima cosa da fare è di generalizzare le relazioni di ricorrenza (19) e (20), che permettono di variare, sotto il segno di integrale, le potenze dei monomi in A e T per multipli di 4. Senza sviluppare la dimostrazione, riportiamo qui direttamente le formule ottenute:

$$(1-\lambda^2)(p+q+2)\int A^{p+4}T^q dx =$$

$$=(p+1)\int A^pT^q dx -\lambda(q-1)\int A^{p+2}T^{q-2}dx - A^{p+1}T^{q-1}(T^2+\lambda A^2)$$

$$(1-\lambda^2)(p+q+2)\int A^p\, T^{q+4}dx = \tag{30}$$

$$=(q+1)\int A^p\, T^q\, dx -\lambda(p-1)\int A^{p-2}\, T^{q+2}dx + A^{p-1}\, T^{q+1}(A^2+\lambda T^2).$$

Dalle suddette formule si vede che per variare di 4 un esponente dell'integrando è necessaria anche la conoscenza di un ulteriore integrale, per così dire, "intermedio" tra gli altri due (assente per $\lambda = 0$). Anche in questo caso si ritrovano le limitazioni alla possibilità di diminuire l'esponente (si deve avere $p+q+2 \neq 0$) o di aumentarlo (l'esponente da aumentare deve essere $\neq -1$); e, nonostante la maggior complessità delle formule, resta valida la conclusione che gli integrali di tutti i monomi in A e T possano essere calcolati se si conosce l'insieme di integrali base già presentati nella tabella III. Il problema dunque si riduce alla generalizzazione degli integrali della tabella III al caso di λ generico: il risultato è fornito dalla tabella IV. Per una maggiore comprensione della tecnica di integrazione, eventualmente applicabile anche ad altri integrali non elencati nella tabella, è utile accompagnare i risultati ivi contenuti con alcuni commenti.

Il punto di partenza della tecnica usata consiste nel cercare due funzioni a un solo valore che, per $\lambda \neq 0$, giochino lo stesso ruolo di A^2 e T^2 per $\lambda = 0$, nel senso che la somma dei loro quadrati dia 1. Di fatto, è possibile trovare due distinte coppie di funzioni di tale tipo, le quali, nel limite $\lambda = 0$, si riducono entrambe alla coppia A^2, T^2. E' infatti immediato verificare che, in conseguenza della (5), valgono le seguenti relazioni: [19)]

$$\begin{aligned} &(\sqrt{1-\lambda^2}\, A^2)^2 + (T^2+\lambda A^2)^2 = 1 \\ &(\sqrt{1-\lambda^2}\, T^2)^2 + (A^2+\lambda T^2)^2 = 1 \end{aligned} \tag{31}$$

(Si noti che nei casi degeneri $\lambda = \pm 1$ le funzioni considerate si riducono a costanti). Non è difficile rendersi conto che per λ reale, $-1<\lambda<1$, ricavando A dalla prima o T dalla seconda delle (31),

---

19) Dalle relazioni (31) è facile concludere che, quando $|\lambda|<1$, ponendo $\lambda = \sin p$, e indicando con ϕ una variabile opportuna, si può sempre porre $\sqrt{1-\lambda^2}A^2 = \sin\phi$, $\sqrt{1-\lambda^2}T^2 = \cos(\phi+p)$, il che fornisce una parametrizzazione delle FTG estese in termini di seni e coseni (cf. nota 8)).

ci si ritrovi in situazioni analoghe, dal punto di vista dell'integrazione, a quelle già incontrate per $\lambda = 0$, come si può verificare dal confronto tra gli integrali della tabella III e quelli della tabella IV. (Il passaggio al caso $|\lambda| > 1$ si ottiene in forma reale sfruttando ben note proprietà delle funzioni che figurano a secondo membro: i casi degeneri $\lambda=\pm 1$ sono sempre calcolabili semplicemente in modo diretto, e quindi non sono riportati nella tabella).

Si noti che nella tabella IV non sono stati riportati gli integrali $\int \frac{dx}{A}$, $\int \frac{dx}{T}$, $\int \frac{T^2 dx}{A}$, $\int \frac{A^2 dx}{T}$ che invece figurano nella tabella III. Di fatto, gli integrali analoghi a quelli riportati nella tabella III sono di tipo diverso (e si trovano alla fine della tabella IV), mentre gli integrali ora citati coinvolgono, per $\lambda \neq 0$, anche integrali ellittici di terza specie (di tipo particolare, con il parametro k^2 uguale a -1). Anche in questo caso sarebbe probabilmente consigliabile di definire delle funzioni "ad hoc" (come si è già fatto per le funzioni $\mathfrak{J}$) mediante le quali le formule di integrazione siano espresse in maniera particolarmente conveniente; tale problema, tuttavia, non verrà discusso in questo lavoro. Per completezza, riportiamo solo le formule che permettono di risalire a $\int \frac{dx}{T}$ e $\int \frac{A^2 dx}{T}$ in termini dell'integrale ellittico di terza specie già menzionato, espresse in forma reale per $-1<\lambda<1$ [20]: il procedimento di integrazione può essere sviluppato sfruttando le sostituzioni indicate nella precedente nota [19], che si possono

20) Gli altri due integrali precedentemente indicati si ottengono sostituendo nelle (32) x con $m-x$ e utilizzando la (4).

facilmente modificare per coprire anche il caso $|\lambda| > 1$. Le formule in questione sono sintetizzabili nella seguente maniera:

$$\int \frac{dx}{T}(1 \pm A^2) = \left.\begin{matrix} \mathrm{tgh}^{-1} A \\ \mathrm{arctg}\, A \end{matrix}\right\} \pm \lambda \int T\, dx \pm \lambda(1-\lambda^2)^{-1/4}\, \Pi\left((1-\lambda^2)^{1/4} A \,\middle|\, \mp(1-\lambda^2)^{-1/2}, - \right) \quad (32$$

ove

$$\Pi(y|n,k^2) = \int \frac{dy}{(1+ny^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

è l'integrale ellittico di terza specie espresso sotto la forma di Legendre.

Per chiudere questo argomento, ritorniamo di nuovo sulla funzione $\mathfrak{J}_4$, per cui si conserva la definizione (28) anche per $\lambda \neq 0$. La relazione (29) viene ovviamente ad essere modificata. Per fissare le idee, supponiamo che λ sia reale e compreso tra -1 e 1; la generalizzazione per λ qualsiasi è immediata. Dalla trattazione svolta in I, risulta che le FTG pertinenti a un certo valore di λ possono essere messe in corrispondenza con <u>due</u> funzioni di Weierstrass distinte, aventi gli stessi periodi reale e immaginario, l'una con il discriminante $\Delta < 0$ (indicata in I con la notazione $\wp(x|G_2,G_3)$) e l'altra con $\Delta > 0$ (indicata con $\wp(x|\tilde{G}_2,\tilde{G}_3)$), legate tra loro da un'opportuna trasformazione di second'ordine sui periodi. In questo lavoro, seguendo la notazione usata in I, indicheremo coi loro simboli abituali le grandezze relative alla prima di queste due funzioni, mentre contrassegneremo con una tilde le grandezze relative alla seconda di tali funzioni. Senza richiamare tutte le formule riportate in I, esprimeremo qui $\wp x$ e $\tilde{\wp} x$ in funzione delle corrispondenti FTG, il che fornirà immediatamente una semplice relazione tra di loro [21]. In particolare, si ottengono le formule seguenti:

---

21) La derivazione della prima delle (33) non è trattata esplicitamente in I, ma è facilmente deducibile.

$$\wp x = \frac{1+T^2}{2A^2} + \frac{\lambda}{6} \qquad \tilde{\wp} x = \frac{1}{S^2} + \frac{2\lambda}{3} \qquad (33)$$

da cui si ha

$$\wp x - \frac{1}{2}\tilde{\wp} x = \frac{1}{2A^2} - \frac{\lambda}{6}$$

e integrando (e tenendo conto del comportamento delle funzioni per $x = 0$):

$$\zeta x - \frac{1}{2}\tilde{\zeta} x = \frac{1}{2S} + \frac{\lambda x}{6} \qquad (34)$$

L'uso della (34) permette di esprimere il legame tra $\mathfrak{J}_4$ e le funzioni ζ di Weierstrass utilizzando indifferentemente la ζ o la $\tilde{\zeta}$, attraverso la formula [22]:

$$\mathfrak{J}_4(x) = \frac{1}{2(1-\lambda^2)}\left[\tilde{\zeta} x - \frac{T^3}{A} - \lambda AT - \frac{\lambda x}{3}\right] = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\zeta x - \frac{1}{2S}(1+T^2) - \frac{\lambda AT}{2} - \frac{\lambda x}{3}\right] \quad (35)$$

Infine, verranno qui discusse alcune proprietà di ricorrenza della funzione $\mathfrak{J}_4$, legate alle analoghe proprietà delle funzioni ζ di Weiestrass, ma che è più conveniente dedurre direttamente. Dalla definizione (28), con la sostituzione di x con $m-x$, si ricavano facilmente le relazioni: [23]

$$\mathfrak{J}(x) + \mathfrak{J}(m-x) = \mathfrak{J}\left(\frac{m}{2} + x\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{m}{2} - x\right) = \mathfrak{J}(m) = 2\,\mathfrak{J}\left(\frac{m}{2}\right) \qquad (36)$$

e, sostituendo invece nella (28) x con $m+x$ si ottiene

$$\mathfrak{J}(m+x) = \mathfrak{J}(x) + \mathfrak{J}(m)$$

e, più in generale, per k intero qualsiasi

$$\mathfrak{J}(km+x) = \mathfrak{J}(x) + k\,\mathfrak{J}(m) \qquad (37)$$

Ponendo $x = iy$ e ricordando le (I-109) si ottiene

$$\mathfrak{J}(ix|\lambda) = -i\,\mathfrak{J}(x|-\lambda) \qquad (38)$$

---

22)La formula (29) valida per $\lambda=0$ si ottiene dalla (35) scritta in termini di $\tilde{\zeta}$ (Si veda anche nota 18)).

23)Da ora in poi l'indice 4 della $\mathfrak{J}$ verrà omesso. Si noti che la (38) vale anche per la funzione $\mathfrak{J}_3$, e, sostituendo m con 3m, ciò accade pure per la (37).

Aumentando nella (38) l'argomento di un periodo immaginario im' si ottiene

$$\mathfrak{J}(ix+im'|\lambda) = -i\,\mathfrak{J}(x+m|-\lambda) = i(\mathfrak{J}(x|-\lambda) + \mathfrak{J}(m|-\lambda)) =$$
$$= \mathfrak{J}(ix|\lambda) + \mathfrak{J}(im'|\lambda)$$

(ricordando che $m'(\lambda) = m(-\lambda)$); da questa relazione si deduce che, per l'aggiunta di periodi immaginari, vale una formula analoga alla (37).

Calcolando la (35) nel punto m e moltiplicando per m', poi calcolando la stessa formula con $-\lambda$ al posto di λ nel punto m' e moltiplicando per m, e infine sommando si ottiene:

$$m'\,\mathfrak{J}(m) + m\,\mathfrak{J}(m') = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[m'\zeta m + m\zeta m'\right] \tag{39}$$

Nella (39) le funzioni $\mathfrak{J}$ e ζ sono riferite a valori diversi di λ sia a primo che a secondo membro: tuttavia, tenendo presente il fatto che il cambiamento di segno di λ equivale ad una rotazione dell'argomento nel piano complesso di 90°, tali grandezze possono essere espresse in termini della stessa funzione. In particolare, a secondo membro della (39), usando la notazione del Tricomi (Ref. 2) si ha $\zeta m = \eta$, $\zeta m' = i\eta'$, $m = \omega$, $m' = -i\omega'$, e quindi si ottiene:

$$m'\zeta m + m\zeta m' = i(\eta'\omega - \eta\omega') = i\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{40}$$

(sfruttando la formula di Legendre ripetutamente citata nel Tricomi). Inserendo la (40) nella (39), e specificando i valori di λ e di m'

a primo membro, si ottiene infine la relazione:

$$m(-\lambda)\,\mathfrak{J}(m|\lambda) + m(\lambda)\,\mathfrak{J}(m|-\lambda) = \frac{\pi}{2(1-\lambda^2)}$$

che, per $\lambda = 0$, fornisce direttamente il valore di $\mathfrak{J}(m)$:

$$\mathfrak{J}(m|0) = \frac{\pi}{4m}$$

Nel limite $\lambda \to \pm 1$ la stessa formula indica come deve divergere

$\mathfrak{J}(m|-1)$: $$\mathfrak{J}(m|\lambda)_{\lambda\to -1} \approx \frac{1}{2(1+\lambda)} - \frac{m(\lambda)}{8} \qquad (41)$$

Nella (41) entrambi i termini a secondo membro divergono, ma il primo è quello dominante.