Tuttavia l'espressione generale assume una forma preferibile, perché più compatta, sostituendo nella (24) k a (k-1), con il che si ottiene:

$$m = \lim_{k\to\infty} \frac{(kn+2)^{(n)}!\,(kn)^{(n)}!}{[(kn+1)^{(n)}!]^2} \qquad (25)$$

Specificando la (25) per $n = 3$, e tenendo presente che $(3k)!!! \cdot (3k+1)!!!\,(3k+2)!!! = (3k+2)!$ (ove il simbolo !!! sta per $\overset{(3)}{!}$) si ottiene:

$$m_3 = \lim_{k\to\infty} \frac{(3k + 2)!}{[(3k+1)!!!]^3} \qquad (26)$$

Come già fatto notare per la formula di Wallis, la convergenza verso il limite delle successioni (25) e (26) è molto lenta.

§ II.3.- L'integrazione delle FTG di ordine 3 e 4.

Nelle tabelle II e III è riportata una scelta di integrali indefiniti [16] concernenti le FTG di ordine rispettivamente 3 e 4. In particolare

---

16) Come già accennato in precedenza [15], per ragioni di semplicità non è indicata la costante di integrazione implicitamente contenuta in ogni integrale indefinito. Ne segue che, quando per un certo integrale sono riportate due o più funzioni, esse differiscono tra loro per una costante.

sono riportati gli integrali di tutti quei monomi che, mediante le formule di ricorrenza descritte nel § II.1, permettono di risalire all'integrale di un qualsiasi monomio in A e T. Per l'ordine 4 praticamente tali monomi esauriscono la tabella, mentre per l'ordine 3 sono riportati anche pareccchi altri integrali di tipo più complicato, in quanto le corrispondenti FTG, a causa delle loro notevoli proprietà di simmetria, risultano essere assai più "versatili" per quanto riguarda l'integrazione. In ogni caso è evidente che le tabelle suddette hanno soprattutto un valore indicativo, e che una trattazione esauriente dell'integrazione delle FTG di ordine 3 e 4 richiede uno studio ben più approfondito.

Tornando di nuovo agli integrali riportati nelle tabelle, si noterà che in essi, oltre alle funzioni elementari, alle stesse FTG e alle loro funzioni inverse (indicate impropriamente con la notazione "arc": si veda al proposito il § I-3 di I), si trova una nuova funzione indicata con il simbolo $\mathfrak{J}$ (e con un indice 3 o 4 che si riferisce all'ordine ma che, in certe circostanze, potrà essere omesso senza generare ambiguità).

In particolare, considerando i monomi di FTG di ordine 3, si vede che tale nuova funzione deve essere introdotta solo per l'integrazione della funzione AT; e ciò non deve sorprendere, in quanto (cf. eq. (I-38)) AT è sostanzialmente una $\wp u$ di Weierstrass, ed è ben noto che per l'integrale $-\int \wp u\, du$ si richiede una nuova funzione trascendente indicata con ζu. Nel contesto delle FTG l'introduzione della ζu (singolare nell'origine) non è conveniente, ed è meglio sostituirla con un'altra funzione $\mathfrak{J}_3(x)$, definita appunto come l'integrale di AT per l'ordine 3:

$$\mathfrak{J}_3(x) = \int_0^x A_3(y)\, T_3(y)\, dy \qquad (27)$$

Dalla definizione (27), considerata insieme al legame tra FTG di ordine 3 e funzioni di Weierstrass equianarmoniche [17], si trova:

$$\mathfrak{J}_3(x) = \sqrt{3}\ \zeta(u|0,1)+A(x)-T(x) - \frac{2\ \pi}{3\sqrt{3}m}$$

ove $u = \frac{x+m}{\sqrt{3}}$, e la costante che figura a secondo membro assicura la condizione di normalizzazione $\mathfrak{J}_3(0) = 0$.

In maniera analoga, per le FTG di ordine 4 si definisce:

---

17) Ricordiamo che per le due costanti η,η' , caratteristiche delle funzioni di Weierstrass e abbondantemente citate dal Tricomi [2], nel caso della $\wp u$ equianarmonica con $g_3 = 1$ si ha

$\eta = \eta'^{*} = \frac{\pi}{3m}\ e^{\,i\,\frac{\pi}{3}}$.

$$\mathfrak{I}_4(x) = \int_0^x A_4^2(y)\, T_4^2(y)dy \tag{28}$$

e il legame con la $\zeta(x|-4,0)$ è il seguente [18].

$$\mathfrak{I}_4(x) = \frac{1}{2}\left[\zeta(x|-4,0) - \frac{T^3(x)}{A(x)}\right] \tag{29}$$

Poiché, come già accennato, nelle tabelle figurano anche le funzioni inverse delle FTG, per esse si deve fare attenzione al problema della determinazione dei loro valori anche per argomento reale; per non appesantire le tabelle, la ricerca della corretta determinazione di tali funzioni è lasciata all'attenzione del lettore. In termini di integrali ellittici, le suddette funzioni inverse corrispondono ad integrali di prima specie. Quando tali funzioni figurano come argomento della funzione $\mathfrak{I}$, ciò significa che entrano in gioco anche integrali ellittici di seconda specie. Nei casi semplici presentati nelle tabelle II e III non figurano integrali ellittici di terza specie; tuttavia essi interverranno (per l'ordine 4) nello studio degli integrali delle FTG estese (v. prossimo paragrafo).

---

18) Sfruttando il legame tra le funzioni di Weierstrass con $g_2 = -4$, $g_3 = 0$ e quelle con $g_2 = 1$, $g_3 = 0$ (che risulta essere un caso particolare della trasformazione di second'ordine sui periodi estesamente discussa in I) si può esprimere $\mathfrak{I}_4$ anche in termini di $\zeta(x|1,0)$. L'argomento verrà ripreso, in forma più generale, nel prossimo paragrafo.

T A B E L L A   II

INTEGRALI CONTENENTI LE FTG DI ORDINE 3

$$\int (A+T)\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{2} (A+T)^{3/2}; \quad \int (T-A)\,dx = \log(A+T)$$

$$\int A^2 dx = -T; \quad \int T^2 dx = A; \quad \int AT\,dx = \mathfrak{J}_3(x)$$

$$\int A^2 T\,dx = -\frac{T^2}{2}; \quad \int AT^2\,dx = \frac{A^2}{2}$$

$$\int (T^3 - A^3)\,dx = AT; \quad \int A^2 T^2\,dx = \frac{A^3}{3} = -\frac{T^3}{3}$$

$$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{2} \log \frac{1-T}{A} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2T}{\sqrt{3}}; \quad \int \frac{dx}{T} = -\frac{1}{2} \log \frac{1-A}{T} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2A}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{S} = \frac{1}{2} \log \frac{1-T}{A} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2T}{\sqrt{3}}; \quad \int S\,dx = -\frac{1}{2} \log \frac{1-A}{T} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2A}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{A^2}{T}\,dx = -\log T; \quad \int \frac{T^2}{A}\,dx = \log A; \quad \int \frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int \frac{dx}{T^2} = S; \quad \int \frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S}; \quad \int S^2 dx = \frac{1}{T}; \quad \int \frac{dx}{S^2} = -\frac{1}{A}$$

$$\int \frac{A-T}{A+T}\,dx = \frac{1}{A+T}; \quad \int \frac{dx}{(A+T)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{A-T}{A+T} = -\frac{1}{1+S}; \quad \int \frac{dx}{(T-A)^2} = \frac{1}{1-S}$$

$$\int \frac{dx}{1-A} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{T}{1-A}\right); \quad \int \frac{dx}{1-T} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{A}{1-T}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1+S} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{A+T}\right); \quad \int \frac{dx}{1+1/S} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{A+T}\right)$$

$$\int \frac{dx}{T(T\pm A)} = \pm\log(1\pm S); \quad \int \frac{dx}{A(A\pm T)} = \mp \log\left(1\pm \frac{1}{S}\right)$$

$$\int \frac{dx}{A+T} = A-T-\mathfrak{J}_3(x); \quad \int \frac{dx\,A}{1-T} = -\frac{A^2}{1-T} - \mathfrak{J}_3(x); \quad \int \frac{dx\,T}{1-A} = \frac{T^2}{1-A} - \mathfrak{J}_3(x)$$

$$\int \frac{dx}{T^2+A^2} = \operatorname{arctg} S; \quad \int \frac{dx}{T^2 - A^2} = \log \frac{A+T}{T-A}$$

$$\int \operatorname{arc} A(x)\,dx = x \operatorname{arc} A(x) + \frac{1}{2} \log\left[x+(1-x^3)^{1/3}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2(1-x^3)^{1/3}}{x} - 1\right]$$

$$\int \mathrm{arc}\ T(x)dx = x\ \mathrm{arc}\ T(x) - \frac{1}{2}\log\left[x+(1-x^3)^{1/3}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2(1-x^3)^{1/3}}{x} - 1\right]$$

$$\int \mathrm{arc}\ S(x)dx = x\ \mathrm{arc}\ S(x) - \frac{1}{2}\log\left[(1+x^3)^{1/3} - x\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2x}{(1+x^3)^{1/3}} + 1\right]$$

$$\int \frac{dx}{T-A} = 2^{-4/3}\left[-\frac{3}{2}\log(1-2^{-2/3}(A+T)) + \frac{1}{2}\log(A+T)(A-T)^2 + \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2^{1/3}(A+T))\right]$$

$$\int \frac{T+A}{T-A}\,dx = 2^{-2/3}\left[-\frac{3}{2}\log(1-2^{-2/3}(A+T)) + \frac{1}{2}\log(A+T)(A-T)^2 - \sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2^{1/3}(A+T))\right]$$

$$\int T^{1/2}dx = 2^{2/3}\ \mathrm{arc}\ AT\left[2^{-2/3}A\right]\ ;\ \int A^{1/2}dx = -2^{2/3}\mathrm{arc}\ AT\left[2^{-2/3}T\right]$$

$$\int T^{-1/2}dx = -2^{2/3}\mathrm{arc}\ AT\left[-2^{-2/3}S\right]\ ;\ \int A^{-1/2}dx = 2^{2/3}\mathrm{arc}\ AT\left[-\frac{2^{-2/3}}{S}\right]$$

$$\int S^{1/2}dx = -2^{2/3}\ 3^{-1/2}\ \mathrm{arc}(A+T)\left[2^{2/3}T\right];\ \int S^{-1/2}dx = 2^{2/3}\ 3^{-1/2}\mathrm{arc}(A+T)\left[2^{2/3}A\right]$$

$$\int (AT)^{1/2}dx = \frac{2}{3}\arcsin A^{3/2} = \frac{2}{3}\ \mathrm{arctg}\ S^{3/2};\int (AT)^{-1/2}\ dx = 2^{1/3}\ 3^{-1/2}\mathrm{arc}(A+T)\left[2^{4/3}AT\right]$$

$$\int (AT)^{3/2}dx = 2^{-4/3}\ 3^{-1/2}\mathcal{J}_3\left(\mathrm{arc}(A+T)\left[2^{4/3}AT\right]\right) - \frac{1}{12}(T^3-A^3)(AT)^{-1/2}$$

$$\int AT^{1/2}dx = 2^{4/3}\mathcal{J}_3\left(\mathrm{arc}(A+T)\left[2^{-2/3}A\right]\right);\ \int TA^{1/2}dx = -2^{4/3}\mathcal{J}_3\left(\mathrm{arc}\ AT\left[2^{-2/3}T\right]\right)$$

$$\int \frac{T^{1/2}}{A}dx = \frac{2}{3}\ \mathrm{tgh}^{-1}(T^{3/2}) = -\frac{2}{3}\cosh^{-1}(A^{-3/2});\ \int \frac{A^{1/2}}{T}dx = -\frac{2}{3}\ \mathrm{tgh}^{-1}(A^{3/2}) = \frac{2}{3}\cosh^{-1}(T^{-\frac{3}{2}})$$

$$\int (A+T)^{1/2}dx = 2^{1/3}\ 3^{1/2}\mathrm{arc}\ AT\left[2^{-4/3}(A+T)\right];\int (A+T)^{-1/2}dx = 3^{-1/2}\cosh^{-1}\left[2(A+T)^{-3/2}\right]$$

$$\int (A+T)^{3/2}dx = 2^{5/3}\ 3^{1/2}\mathcal{J}_3\left(\mathrm{arcAT}\left[2^{-4/3}(A+T)\right]\right);\int (A+T)^{5/2}dx = 2(A-T)(A+T)^{1/2}$$

$$\int (A-T)(A+T)^{1/2}dx = -2(A+T)^{1/2}$$

$$\int (A^2+T^2)^{1/2}dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2(A^2+T^2)}-(T-A)}{\sqrt{2(A^2+T^2)}+(T-A)} + \frac{2}{3}\ \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{A^2+T^2}}{T-A}$$

$$\int (T^2-A^2)^{1/2}dx = 2^{1/2}\ 3^{-3/4}\left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\ 3^{1/4}(T^2-A^2)^{1/2}}{\sqrt{3}(T-A)-(T+A)} + \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2}\ 3^{1/4}(T^2-A^2)^{1/2}}{\sqrt{3}(T-A)+(T+A)}\right]$$

$$\int \operatorname{arc} AT(x)dx = x \operatorname{arc} AT(x) - \mathfrak{J}_3\left[\operatorname{arc} AT(x)\right]$$

T A B E L L A III

INTEGRALI CONTENENTI LE FTG DI ORDINE 4

$$\int A\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}T}{A^2}\right)\ ;\quad \int T\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}\,A}{T^2}\right)$$

$$\int S\,dx = \frac{1}{2}\log(1+A^2)-\log T\ ;\quad \int\frac{dx}{S} = -\frac{1}{2}\log(1+T^2)+\log A;\quad \int\frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int AT\,dx = \frac{1}{2}\ \text{arc sin}\ A^2 = \frac{1}{2}\ \text{arcos}\ T^2$$

$$\int(A^2+T^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\ \frac{\sqrt{2}\,AT}{T^2-A^2}\ ;\quad \int(T^2-A^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{tgh}^{-1}\ \frac{\sqrt{2}\,AT}{T^2+A^2}$$

$$\int A^3T^k\,dx = -\frac{T^{k+1}}{k+1}\ ;\quad \int T^3A^k dx = \frac{A^{k+1}}{k+1}\qquad (k\neq -1)$$

$$\int\frac{A^3}{T}dx = -\log T;\quad \int\frac{T^3}{A}dx = \log A;\quad \int A^2T^2dx = \mathfrak{J}_4(x);\quad \int(T^4-A^4)dx = AT$$

$$\int A^2T\,dx = \sqrt{2}\,\mathfrak{J}_4\left[\text{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}A}{T^2}\right)\right] - \frac{A^3T^2}{1+A^4}\ ;\quad \int AT^2dx = -\sqrt{2}\,\mathfrak{J}_4\left[\text{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}T}{A^2}\right)\right]+\frac{A^2T^3}{1+T^4}$$

$$\int\frac{dx}{T^2} = S;\quad \int\frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S}\ ;\quad \int S^2dx = \frac{A^3}{T} - 2\mathfrak{J}_4(x);\quad \int\frac{dx}{S^2} = -\frac{T^3}{A} - 2\,\mathfrak{J}_4(x)$$

$$\int\left(\frac{1}{T}+\frac{A^2}{T}\right)dx = \text{tgh}^{-1}A;\quad \int\left(\frac{1}{A}+\frac{T^2}{A}\right)dx = -\ \text{tgh}^{-1}T$$

$$\int\left(\frac{1}{T}-\frac{A^2}{T}\right)dx = \text{arctg}\ A\ ;\quad \int\left(\frac{1}{A}-\frac{T^2}{A}\right)dx = -\ \text{arctg}\ T$$

$$\int\frac{dx}{(A+T)^2} = -\frac{1}{1+S}\ ;\quad \int\frac{dx}{(T-A)^2} = \frac{1}{1-S};\quad \int\frac{dx}{T(T\pm A)} = \pm\log(1\pm S);\quad \int\frac{dx}{A(A\pm T)} = \mp\log\left(1\pm\frac{1}{S}\right)$$

$$\int\frac{dx}{1\mp A} = \frac{2}{3}x\pm\frac{1}{3}\int A\,dx\pm\frac{1}{3}\ \frac{T}{1\mp A}\ ;\quad \int\frac{dx}{1\mp T} = \frac{2}{3}x\pm\frac{1}{3}\int T\,dx\mp\frac{1}{3}\ \frac{A}{1\mp T}$$

$$\int\frac{dx}{1\pm A^2} = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\ \frac{AT}{1\pm A^2}\ ;\quad \int\frac{dx}{1\pm T^2} = \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\ \frac{AT}{1\pm T^2}$$

TABELLA IV

INTEGRALI CONTENENTI LE FTG ESTESE DI ORDINE 4

$$\int A\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{arc} S\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4}\, T}{A^2+\lambda T^2} \Big| 0\right) \qquad (|\lambda|<1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^2-1)^{-1/4} \operatorname{Sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4}\, T}{A^2+\lambda T^2} \Big| 0\right) \qquad (|\lambda|>1)$$

$$\int T\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{arc} S\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4}\, A}{T^2+\lambda A^2} \Big| 0\right) \qquad (|\lambda|<1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^2-1)^{-1/4} \operatorname{Sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4}\, A}{T^2+\lambda A^2} \Big| 0\right) \qquad (|\lambda|>1)$$

$$\int S\, dx = \frac{1}{2}\log(1+A^2+\lambda T^2) - \log T; \quad \int \frac{dx}{S} = -\frac{1}{2}(1+T^2+\lambda A^2) + \log A; \quad \int \frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int AT\, dx = \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \arcsin(\sqrt{1-\lambda^2}A^2) = \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \arccos\,(T^2+\lambda A^2) \qquad (|\lambda|<1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \sinh^{-1}(\sqrt{\lambda^2-1}\, A^2) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \cosh^{-1}(T^2+\lambda A^2) \qquad (|\lambda|>1)$$

$$\int (A^2+T^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(1+\lambda)}AT}{T^2-A^2} \quad (\lambda>-1)\;; \; = \frac{1}{2\sqrt{(-\lambda-1)}} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2(-\lambda-1)}AT}{T^2-A^2} \quad (\lambda<-1)$$

$$\int (T^2-A^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda-1)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(\lambda-1)}AT}{(T^2+A^2)} \quad (\lambda>1)\;; \; = \frac{1}{\sqrt{2(1-\lambda)}} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2(1-\lambda)}AT}{T^2+A^2} \quad (\lambda<1)$$

$$\int AT^3 dx = \frac{1}{2(1-\lambda^2)}(A^2+\lambda T^2) \quad ; \; \int A^3 T dx = -\frac{1}{2(1-\lambda^2)}(T^2+\lambda A^2) \qquad (\lambda \neq \pm 1)$$

$$\int \frac{T^3}{A} dx = \log A - \lambda \int AT dx; \quad \int \frac{A^3}{T} dx = -\log T - \lambda \int AT dx\;; \; \int A^2 T^2 dx = \mathcal{J}_4(x)$$

$\int(T^4-A^4)dx = AT$; $\int(T^4+A^4)dx = x-2\lambda\mathcal{J}_4(x)$; $\int \frac{dx}{T^2} = S$; $\int \frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S}$

$\int S^2 dx = \frac{A^3}{T} - 2(1-\lambda^2)\mathcal{J}_4(x)+\lambda(AT-x)$; $\int \frac{dx}{S^2} = -\frac{T^3}{A}-2(1-\lambda^2)\mathcal{J}_4(x)-\lambda(AT+x)$

$$\int A^2Tdx = \sqrt{2}(1-\lambda^2)^{3/4}\mathcal{J}_4\left(\mathrm{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4}A}{T+\lambda A^2}\Big|\ 0\right)\Big|0\right) - \frac{A^3(T^2+\lambda A^2)}{1+(1-\lambda^2)A^4} \qquad (|\lambda|<1)$$

$$\int AT^2dx = -\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{3/4}\mathcal{J}_4\left(\mathrm{arc}\ S\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4}T}{A^2+\lambda T^2}\Big|\ 0\right)\Big|0\right) + \frac{T^3(A^2+\lambda T^2)}{1+(1-\lambda^2)T^4} \qquad (|\lambda|<1)$$

[N.B. Per $|\lambda|>1$, sostituire $(1-\lambda^2)^{1/4}$ con $(\lambda^2-1)^{1/4}$ e arc S con Sh^{-1}]

$\int T^3dx = A-\lambda\int A^2Tdx$; $\int A^3dx = -T-\lambda\int AT^2dx$

$\int A^2T^3dx = \frac{1}{3(1-\lambda^2)}(A^3+\lambda AT^2-\lambda\int dx)$; $\int A^3T^2dx = -\frac{1}{3(1-\lambda^2)}(T^3+\lambda A^2T+\lambda\int Adx)$

$\int A^3T^3dx = \frac{1}{8(1-\lambda^2)}(A^4-T^4) + \frac{1}{2(1-\lambda^2)}\int AT\ dx$

$$\int dx\ \frac{T}{T^2+\lambda A^2}(1\mp\sqrt{1-\lambda^2}A^2) = (1-\lambda^2)^{-1/4}\mathrm{arctg}\left[(1-\lambda^2)^{1/4}A\right]\ (-);=(1-\lambda^2)^{-1/4}\mathrm{tgh}^{-1}\left[(1-\lambda^2)^{1/4}A\right](+)$$

$$\int dx\ \frac{A}{A^2+\lambda T^2}(1\mp\sqrt{1-\lambda^2}T^2) = -(1-\lambda^2)^{-1/4}\mathrm{arctg}\left[(1-\lambda^2)^{1/4}T\right](-);=-(1-\lambda^2)^{-1/4}\mathrm{tgh}^{-1}\left[(1-\lambda^2)^{1/4}T\right](+)$$

(per $|\lambda|<1$);

$$\int dx\ \frac{T}{T^2+\lambda A^2}(1\pm\sqrt{\lambda^2-1}A^2) = \frac{(\lambda^2-1)^{-1/4}}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4}A}{1-\sqrt{\lambda^2-1}\ A^2}\right](-);=\frac{(\lambda^2-1)^{-1/4}}{\sqrt{2}}\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4}A}{1+\sqrt{\lambda^2-1}\ A^2}\right](+)$$

$$\int dx\ \frac{A}{A^2+\lambda T^2}(1\pm\sqrt{\lambda^2-1}\ T^2) = -\frac{(\lambda^2-1)^{-1/4}}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left[\frac{2(\lambda^2-1)^{1/4}T}{1-\sqrt{\lambda^2-1}\ T^2}\right](-);= -\frac{(\lambda^2-1)^{-1/4}}{\sqrt{2}}\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4}T}{1+\sqrt{\lambda^2-1}\ T^2}\right](+)$$

(per $|\lambda|>1$)

Si noti anche che gli integrali esprimibili come funzioni della sola S hanno lo stesso aspetto per gli ordini 3 e 4; tale fatto è un'immediata conseguenza delle (3), e si verifica per tutti gli ordini (e anche per le FTG estese di ordine 4 trattate nel prossimo paragrafo).

Per le proprietà di simmetria delle FTG (e delle funzioni ζu di Weierstrass) anche le funzioni $\mathfrak{J}$ definite in precedenza godono di alcune interessanti proprietà: su di esse torneremo, in un contesto più generale, nel prossimo paragrafo.

§ II.4.- L'integrazione delle FTG estese di ordine 4.

Come già richiamato nell'introduzione di questo lavoro, una descrizione completa delle funzioni ellittiche si può ottenere in termini delle FTG estese di ordine 4, caratterizzate da un parametro λ (esse riproducono le FTG ordinarie per $\lambda = 0$, e le funzioni trigonometriche e iperboliche per λ rispettivamente uguali a $+1$ e -1 (casi degeneri)).

E' quindi immediato porsi il problema di generalizzare le formule di integrazione date precedentemente in modo da coprire il caso di λ generico. La prima cosa da fare è di generalizzare le relazioni di ricorrenza (19) e (20), che permettono di variare, sotto il segno di integrale, le potenze dei monomi in A e T per multipli di 4. Senza sviluppare la dimostrazione, riportiamo qui direttamente le formule ottenute:

$$(1-\lambda^2)(p+q+2)\int A^{p+4}T^q dx =$$

$$=(p+1)\int A^pT^q dx -\lambda(q-1)\int A^{p+2}T^{q-2}dx - A^{p+1}T^{q-1}(T^2+\lambda A^2)$$

$$(1-\lambda^2)(p+q+2)\int A^p\, T^{q+4}dx = \tag{30}$$

$$=(q+1)\int A^p\, T^q\, dx -\lambda(p-1)\int A^{p-2}\, T^{q+2}dx + A^{p-1}\, T^{q+1}(A^2+\lambda T^2).$$