S E Z I O N E II

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE DELLE FTG

§ II.1.- Le formule di ricorrenza nell'integrazione dei monomi in A e T.

In questa Sezione verrà trattato più estesamente un argomento appena accennato in I, che, pur non essendo particolarmente importante dal punto di vista concettuale, può invece essere assai utile nelle applicazioni pratiche: e cioé l'integrazione delle FTG.

Infatti le FTG si prestano ad essere usate per sostituzione in numerosi integrali abeliani di tipo opportuno, in analogia con i casi in cui si introducono le funzioni trigonometriche per semplificare, ad esempio, espressioni del tipo $\sqrt{1-x^2}$. Gli stessi integrali ellittici, in alcuni casi, possono essere trattati più convenientemente introducendo le FTG di ordine 3 o 4 (eventualmente estese) anziché usando i metodi già noti. L'interesse di introdurre le FTG nella risoluzione degli integrali sta nel fatto che è possibile sfruttare le proprietà di simmetria delle funzioni stesse in modo da ottenere in modo rapido delle semplificazioni che riconducono classi estese di integrali a pochi tipi fondamentali.

Il caso più interessante consiste nell'integrazione dei monomi in A e T, cioé degli integrali (indefiniti) di tipo

$$\int A^p(x)\ T^q(x)dx \tag{16}$$

ove si suppone fissato l'ordine n delle FTG, e p,q, sono numeri interi, eventualmente negativi. (Tuttavia, molte delle formule che saranno trovate nel seguito mantengono la loro validità anche nel caso di p,q qualsiasi). Si può vedere infatti che tutti gli integrali di tipo (16) sono immediatamente riconducibili gli uni agli altri quando gli esponenti sono fatti variare per multipli di n.

A tale scopo è sufficiente ricondursi alla forma (16) partendo, p. es., dall'integrale $\int A^p\ T^{q+n}\ dx$ [15]. Integrando per parti si ottiene (per $p \neq -1$):

$$\int A^p\ T^{q+n} dx = \frac{A^{p+1}\ T^{q+1}}{p+1} + \frac{q+1}{p+1} \int A^{p+n}\ T^q dx \qquad (17)$$

D'altro canto, dalla relazione $T^n = 1-A^n$ si ha:

$$\int A^p\ T^{q+n}\ dx = \int A^p\ T^q\ dx - \int A^{p+n}\ T^q\ dx \qquad (18)$$

Confrontando la (17) con la (18), e moltiplicando il tutto per $p+1$, si ottiene la formula di ricorrenza

$$(p+q+2) \int A^{p+n}\ T^q\ dx = (p+1) \int A^p\ T^q\ dx - A^{p+1}\ T^{q+1} \qquad (19)$$

che resta valida anche nel caso $p = -1$.

Procedendo in modo del tutto analogo a partire dall'integrale $\int A^{p+n}\ T^q\ dx$ si ottiene

$$(p+q+2) \int A^p\ T^{q+n}\ dx = (q+1) \int A^p\ T^q\ dx + A^{p+1}\ T^{q+1} \qquad (20)$$

che è immediatamente riconducibile alla (19) con la sostituzione di x

---

15) In tutte le formule che seguiranno si deve tener presente che gli integrali indefiniti, in quanto tali, contengono sempre una costante arbitraria (che non viene indicata esplicitamente per ragioni di semplicità).

con $m-x$ (cf. eq. (4)).

La risoluzione delle (19) e/o (20) rispetto al primo membro permette quindi di diminuire di quanti multipli di n si voglia gli esponenti dei monomi in A e T.

L'unica eccezione si ha quando $p+q+2 = 0$. Tuttavia in tal caso l'integrale da risolvere risulta (p.es., nel caso della (19)) della forma:

$$\int A^{p+n} T^{-2-p} dx = \int S^p A^n dS = \int \frac{S^{p+n}}{1+S^n} dS \qquad (21)$$

e, per p intero, l'ultimo integrale nella (21) è sempre risolubile elementarmente.

Poiché è evidente la convenienza di riferire gli integrali di tutti i monomi in A e T a un gruppo di integrali standard in cui gli esponenti p,q siano quanto più è possibile piccoli (in pratica, compresi tra 0 e $n-1$) deve essere anche contemplata la possibilità di aumentare gli esponenti di multipli di n, il che significa, di fatto, risolvere le (19) e (20) rispetto a $\int A^p T^q dx$. Tuttavia ciò non è possibile se l'esponente da aumentare è uguale a -1; ne segue che i monomi in cui uno (o entrambi) gli esponenti sono uguali a -1 non sono riconducibili ad integrali con esponenti non negativi, e quindi il gruppo di integrali standard deve contenere anche alcuni tra essi (I gruppi standard per esponenti interi saranno esplicitamente riportati più avanti per $n=3$ e $n=4$).