

ULTERIORI PROPRIETA' DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE GENERALIZZATE

E. Ferrari

ISTITUTO DI FISICA DELL'UNIVERSITA' - Roma -

INTRODUZIONE.-

Il presente lavoro è la continuazione e il completamento di un lavoro precedente, pubblicato nel 1979 nella collana dei "Quaderni di Lecce"¹⁾. In tale lavoro è stata definita una nuova classe di funzioni di una variabile, chiamate "funzioni trigonometriche generalizzate"(FTG). Tali funzioni sono contraddistinte da un intero positivo n , chiamato "ordine", e indicate con i simboli $A_n(x)$, $T_n(x)$, $S_n(x) = A_n(x)/T_n(x)$ ³⁾. Le relazioni fondamentali a cui soddisfano le suddette funzioni sono l'identità

$$A^n(x) + T^n(x) = 1 \quad (1)$$

-
- 1) E. FERRARI, Definizione e studio di una nuova classe di funzioni, che permettono una presentazione diversa dalle funzioni ellittiche, Quaderni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Lecce Q.2-1979. (Nel seguito tale lavoro verrà indicato con il simbolo I). In tale lavoro è anche contenuto un breve richiamo alle principali proprietà delle funzioni ellittiche, per la cui discussione approfondita ci si è riferiti al noto testo di TRICOMI (Ref. 2).
 - 2) F. TRICOMI , Funzioni ellittiche, Zanichelli (Bologna) 1951.
 - 3) Seguendo la prassi usata in I, l'indicazione esplicita dell'ordine verrà generalmente omessa nei simboli, e, spesso, quando possibile, anche l'indicazione dell'argomento.

con la condizione $A(0) = 0$, $T(0) = 1$, le relazioni differenziali

$$\frac{dA}{dx} = T^{n-1} \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -A^{n-1} \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T^2} \quad ; \quad \frac{d(1/S)}{dx} = -\frac{1}{A^2} \quad (3)$$

e le relazioni di complementarità

$$A(x) = T(m-x); \quad S(x) = 1/S(m-x) \quad (4)$$

ove m è un particolare valore reale (chiaramente dipendente dall'ordine n) per cui $A(m) = 1$, $T(m) = 0$.

In I è stato dato particolare risalto a questi casi ($n = 3,4,6$) in cui si è trovata una connessione tra FTG e funzioni ellittiche.

Lo sviluppo più interessante si è avuto per $n = 4$, ove, estendendo opportunamente la definizione delle FTG in modo da farle dipendere anche da un parametro aggiuntivo λ , si è fornita una nuova maniera di presentare le funzioni ellittiche, mediante la quale sono state messe in luce alcune notevoli proprietà di simmetria, difficilmente riscontrabili nelle formulazioni correnti (quali possono essere trovate, p. es. in Ref. 2). Le equazioni (1) e (2), per le FTG estese di ordine 4 (indicate con $A(x|\lambda)$ e simili, con possibile omissione della specificazione del parametro e dell'argomento), si modificano nella seguente maniera:

$$A^4 + T^4 + 2\lambda A^2 T^2 = 1 \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dx} = T^3 + \lambda A^2 T \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -A^3 - \lambda A T^2 \quad (6)$$

mentre le equazioni (3) e i valori delle funzioni in $x = 0$ restano in-

variati.

(L'equazione (4), con m dipendente da λ , vale solo per λ reale > -1).

Visto l'interesse dei risultati di tale trattazione, da *I* è stata ricavata una versione abbreviata, in lingua inglese, contenente solo le conclusioni più importanti ⁴⁾. Tuttavia, né in *I* né in Ref. 4 ha potuto trovare posto la discussione di alcune interessanti proprietà delle suddette funzioni, o perché sono state elaborate successivamente alla pubblicazione dei lavori suddetti, o perché, pur essendo già state studiate al momento della stesura di questi ultimi, si è ritenuto preferibile non riportarle in dettaglio per non appesantire eccessivamente la trattazione: e infatti in alcuni punti di *I* si trova un esplicito riferimento a problemi da discutere in altra sede. Poiché tali argomenti lasciati, per così dire, in sospenso vengono a costituire un insieme di informazioni rilevante nel quadro delle proprietà delle FTG, è apparso utile all'autore della presente nota di presentarli, riuniti insieme, all'attenzione di chiunque possa essere interessato all'approfondimento dello studio di tali funzioni.

Per quanto detto in precedenza, il presente lavoro avrà un carattere meno organico e più miscelaneo se confrontato con *I*, di cui, come già detto, esso costituisce sostanzialmente un complemento. La prima Sezione di questo lavoro si riferisce ad alcune proprietà generali delle FTG non discusse in precedenza. La seconda Sezione tratta in dettaglio il problema dell'integrazione di tali funzioni, ed è di interesse soprattutto applicativo. La terza Sezione, infine, è dedicata alla discussione di alcune importanti proprietà delle FTG di ordine 3, non riportate in *I* a causa della complessità delle loro dimostrazioni.

4) E. FERRARI, A new approach to elliptic functions via generalized trigonometric functions, Preprint n.157 dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma (1979).

S E Z I O N E I

ALCUNE PROPRIETA' GENERALI DELLE FTG

§ I.1.- Le FTG nell'ottica della geometria algebrica, e il problema della parametrizzazione.

Cominciamo con l'osservazione che, la definizione delle FTG essendo strettamente legata all'espressione di certe curve algebriche in un piano cartesiano ξ, η ($\xi^n + \eta^n = 1$ per le FTG ordinarie di ordine n , e $\xi^4 + \eta^4 + 2\lambda\xi^2\eta^2 = 1$ per le FTG estese di ordine 4, direttamente connesse alle funzioni ellittiche), le loro proprietà possono essere ricavate attraverso procedimenti co no s c i u t i di geometria algebrica ⁵⁾. In particolare, il problema della de te r m i n a t i o n e delle FTG può essere considerato come un caso particolare del pr o b l e m a g e n e r a t i o n e di trovare quello che è chiamato un "parametro uniformizzante" delle suddette curve algebriche. Si dice parametro uniformizzante un parametro t , tale che le coordinate della curva studiata possano essere ottenute attraverso combinazioni razionali di opportune funzioni meromorfe di t . E' chiaro che l'introduzione delle funzioni circolari $\sin t, \cos t$ per met te di uniformizzare tutte le curve algebriche di secondo grado, mentre l'introduzione delle funzioni ellittiche (nella forma di Weierstrass) per met te di uniformizzare in maniera immediata tutte le curve del tipo

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$$

e, in maniera indiretta, tutte le curve del tipo $\eta^2 = P(\xi)$, ove $P(\xi)$ è un polinomio in ξ di terzo o quarto grado. E' quindi ragionevole pen s a r e che un opportuno procedimento di tale tipo permetta di risalire alle

5) Si veda, per una presentazione di tali metodi, il Cap. XII del testo di E. HILLE, Analytic Function Theory, Chelsea Publishing Company, New York 1962 (vol.II); tale testo contiene anche una trattazione delle fun zioni ellittiche, e numerose referenze sui vari argomenti.

FTG $A(x), T(x)$ [o meglio, alle loro combinazioni che risultano essere meromorfe] come funzioni del parametro uniformizzante x definito in I . Tuttavia, da un esame generale del caso specifico, sembra che tale procedimento non sia né immediato né semplice ⁶⁾, ed è lecito nutrire il dubbio che la sua individuazione sia possibile solo se si conoscono già i risultati finali (ottenuti con il metodo elementare sviluppato in I), da cui si possa procedere, per così dire, a ritroso. La caratteristica principale del problema in esame, che generalmente non si riscontra nelle procedure correnti di uniformizzazione, è che il parametro uniformizzante x non è, per così dire, trovato a posteriori, ma viene fissato a priori, in base alla richiesta che esso abbia un preciso e diretto significato geometrico (doppia area del settore) rispetto alla curva considerata. Questo significato geometrico, direttamente rapportato alla curva analizzata, non è presente, come già detto, nelle uniformizzazioni di tipo standard; e che l'uniformizzazione che porta alle FTG non sia, in generale, di tipo standard lo si può vedere, p. es. dalla considerazione esplicita delle FTG estese di ordine 4, ove la curva $\xi^4 + \eta^4 + 2\lambda\xi^2\eta^2 = 1$ è di secondo grado in ξ^2 e η^2 ⁷⁾, e quindi si uniformizza in modo standard non in termini di funzioni ellittiche, ma di seni e coseni ⁸⁾.

In base alle considerazioni precedenti, ci si può domandare se la scelta a priori della doppia area del settore x come parametro uniformizzante, indipendentemente dall'interesse dei risultati ottenuti, sia veramente

6) E' questo il motivo, unito anche alla scorsa familiarità con la materia dell'Autore della presente nota, per cui la ricerca di tale procedimento non è stata portata avanti in questo lavoro.

7) In tale caso si devono uniformizzare ξ^2 e η^2 anziché ξ e η , perché si sa che A^2 e T^2 (e non A, T) sono funzioni meromorfe di x .

8) La possibilità di rappresentare le FTG estese in termini di seni e coseni apparirà in modo immediato dalla trattazione che verrà fatta più avanti [§ II.4, eq.(25)]

una sorta di scelta obbligata, o se invece non sia possibile definire opportunamente le FTG in termini di un altro parametro, avente anch'esso un significato geometrico diretto, in modo da ottenere nuovamente dei risultati interessanti (sia pure diversi da quelli trovati in I). Di parametri crescenti monotonicamente e aventi un significato geometrico immediato comparabile a quello dell'area del settore se ne hanno sostanzialmente altri due: cioè l'angolo ϕ tra il raggio vettore corrente e il semiasse positivo delle ξ (cf. Fig. I-1)⁹⁾, e l'arco di lunghezza ℓ misurato (in senso antiorario per valori crescenti di ℓ) a partire dal punto $\xi = 1, \eta = 0$ di intersezione della curva parametrica con il semiasse positivo delle ξ . Tuttavia, è facilmente constatabile che (con la banale eccezione delle FTG di ordine 2, $\sin\phi$ e $\cos\phi$, per cui $\phi \equiv x$) l'angolo ϕ non si presta ad una soddisfacente definizione delle FTG, in quanto, per qualsiasi curva parametrica, si ha $S(\phi) = \text{tg}\phi$, e quindi ci si riconduce in ogni caso a combinazioni (più o meno praticabili) di funzioni trigonometriche. Invece la scelta dell'arco ℓ come parametro uniformizzante può portare a risultati non banali, e merita quindi una certa attenzione.

E' chiaro che il comportamento delle FTG definite in termini di ℓ si ottiene a partire da quello (già noto) delle FTG definite in termini di x semplicemente considerando il legame funzionale tra x e ℓ , immediatamente ottenibile dalle relazioni:

$$d\ell = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2} = \sqrt{(dA)^2 + (dT)^2} = \sqrt{\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dx}\right)^2} dx \quad (7)$$

9) Da ora in poi, la notazione Fig. I-1 indicherà la Fig. 1 di I (e simili). Analogamente la notazione (I-1) indicherà la formula (1) di I (e simili).

Per le FTG di ordine n , la (7), ricordando le (2), si specifica in

$$d\ell = \sqrt{T^{2n-2}(x) + A^{2n-2}(x)} \quad dx \quad (8)$$

(da implementare con l'ovvia condizione al contorno che si abbia $\ell = 0$ per $x = 0$).

La (8), se si fa eccezione per i casi banali $n = 1$ ($\ell = \sqrt{2} x$) e $n = 2$ ($\ell = x$) dimostrabili del resto anche geometricamente, introduce nelle FTG ridefinite $\hat{A}(\ell) = A[x(\ell)]$, $\hat{T}(\ell) = T[x(\ell)]$ una struttura di singolarità completamente nuova, e, come vedremo, più complicata di quella delle funzioni descritte in I.

Una caratteristica saliente di tutte le FTG considerate come funzioni di ℓ è che esse non divergono mai per valori finiti di ℓ , ma divergono solo quando ℓ tende all'infinito. Infatti il valore ℓ_0 di ℓ corrispondente a un valore x_0 di x si ottiene (tenendo conto delle condizioni al contorno), integrando dall'origine fino a x_0 il secondo membro della (8) (secondo un cammino scelto in modo opportuno qualora la funzione integranda presenti dei punti di diramazione).

Ora, qualunque sia il punto x_0 ove $A(x_0)$ e $T(x_0)$ divergono, e qualunque sia il cammino scelto, si trova che l'integrale suddetto risulta sempre divergente¹⁰⁾: e ciò conferma che le singolarità di $A(x)$ e $T(x)$ non danno luogo a singolarità al finito per $\hat{A}(\ell)$, $\hat{T}(\ell)$. Invece queste funzioni hanno singolarità non divergenti in tutti i punti ℓ_0 associati ai valori x_0 per cui $T^{2n-2}(x_0) + A^{2n-2}(x_0) = 0$. Per tali valori di x_0 , come è immediato controllare, $S(x_0)$ vale una radice $(2n-2)$ -esima di -1 ; indicando con n una qualsiasi di tali radici, poiché gli zeri di $S(x) - n$ sono sempre semplici, ne segue che per tutte le FTG considerate come funzioni di ℓ il comportamento di $\hat{A}(\ell)$ e $\hat{T}(\ell)$ nelle vicinanze delle loro singolarità ℓ_0 è sempre lo stesso, e precisamente risulta del tipo:

10) Si tenga presente il comportamento di A e T vicino ad una singolarità al finito, che va come $(x-x_0)^{-\frac{1}{n-2}}$, ove x_0 è la locazione della singolarità (cf. § II.2 di I).

$$\hat{F}(\ell) = \hat{F}(\ell_0) + c(\ell - \ell_0)^{2/3} + \dots \quad (9)$$

ove F rappresenta una delle funzioni A, T, S e c è un'opportuna costante, il cui valore è diverso nei diversi casi. (Si noti che \hat{S} ha anche dei poli semplici al finito nei punti ove $\hat{T} = 0$, e che nella (9) $\hat{F}(\ell_0)$ è sempre $\neq 0$, come conseguenza della relazione $\hat{S}(\ell_0) = n$ e delle formule che esprimono A e T in funzione di S).

Per quanto riguarda l'andamento delle suddette funzioni nel piano complesso, la loro eventuale periodicità, etc., l'indagine si presenta difficile, a causa dei numerosi punti di diramazione di tipo (9), che (come già visto in I nello studio delle FTG di ordine 5 e 6) complicano notevolmente la struttura della superficie di Riemann delle funzioni. La sola cosa che può essere facilmente determinata è il comportamento delle funzioni suddette per valori reali di ℓ , per cui si ha una ancor più marcata differenziazione tra le FTG di ordine pari e quelle di ordine dispari. Infatti, mentre le prime sono periodiche lungo l'asse reale e godono di tutte le proprietà di simmetria già riscontrate nella variabile x , le altre sono non periodiche, non simmetriche, e crescenti monotonicamente da $-\infty$ (per $\ell \rightarrow -\infty$) a $+\infty$ (per $\ell \rightarrow +\infty$). Questo comportamento è un'ovvia conseguenza della presenza di singolarità in x sull'asse reale, e si estende quindi anche all'andamento in ℓ di tutte le funzioni iperboliche generalizzate (FIG) descritte in I.

Le stesse conclusioni si raggiungono considerando anche l'andamento in funzione di ℓ delle FTG estese di ordine 4, ampiamente discusse nella parte III di I. Per esse è sufficiente riportare la formula analoga alla (8), che è la seguente:

$$d\ell = \sqrt{[(T^2(x)+A^2(x)) [1-(1-\lambda^2)A^2(x)T^2(x)]} dx \quad (10)$$

E' da notare che l'integrazione dei secondi membri di (9) e (10) non è riconducibile a funzioni conosciute (compresi gli integrali ellittici), con l'eccezione della (10) nei casi $\lambda = 1$ (che risulta banale) e $\lambda = -1$ (che esprime la dipendenza delle funzioni iperboliche ordinarie della lunghezza dell'arco di iperbole, ed è riconducibile ad un integrale ellittico di seconda specie). Questo fatto rende particolarmente complicato lo studio delle funzioni in questione: ma, anche prescindendo da tale difficoltà, la trattazione precedente mostra in maniera convincente che la scelta a priori di un parametro uniformizzante diverso dalla doppia area del settore proposta in I non porta a risultati interessanti, e, in particolare, non consente una presentazione alternativa delle funzioni ellittiche (quale è stata ottenuta in I) che esibisca semplicità di comportamento e notevoli proprietà di simmetria. Queste considerazioni sembrano rafforzare la convinzione che il ruolo particolare svolto dal parametro uniformizzante x usato nella presente trattazione non possa essere ricondotto ad un'ovvia conseguenza di procedimenti standard di geometria algebrica.

§ I.2.- Sullo sviluppo in serie di Taylor delle FTG.

In questo paragrafo verrà ripreso il problema dello sviluppo in serie di Taylor delle FTG, per fornire la dimostrazione dell'osservazione fatta in I, secondo cui i coefficienti degli sviluppi in serie di A_n e T_n (I-11) sono tutti non nulli e di segno alterno ¹¹⁾. Verranno anche scritti

11) Ricordiamo che gli sviluppi in serie considerati procedono per potenze di x^n , a partire da x per A e da 1 per T .

esplicitamente i primi termini della formula generale di sviluppo per n generico.

Supponiamo fissato una volta per tutte l'ordine n delle FTG (con $n > 2$), e iniziamo la dimostrazione enunciando il seguente lemma, di verifica immediata in quanto è una conseguenza diretta delle (2): "La derivata di un polinomio omogeneo in A e T di grado $r \geq 1$ è un polinomio omogeneo in A e T di grado $r + \Delta$ con $\Delta = n - 2$ ".

Come conseguenza del lemma suddetto, essendo le funzioni A e T casi particolari di polinomi omogenei in A e T (di grado 1), la loro derivata s-esima risulterà un polinomio omogeneo in A e T di grado $1 + s\Delta$, così che si potrà scrivere, p.es.:

$$\frac{d^s A}{dx^s} = \sum_{k=0}^{1+s\Delta} C_k^{(s)} A^k T^{1+s\Delta-k} \quad (11)$$

ove le $C_k^{(s)}$ sono opportuni coefficienti. Una formula analoga alla (11) varrà anche per la derivata s-esima di T, con diversi valori dei coefficienti $C_k^{(s)}$.

Derivando ulteriormente la (11) rispetto a x, si ottiene:

$$\frac{d^{s+1} A}{dx^{s+1}} = \sum_{k=0}^{1+s\Delta} C_k^{(s)} [k A^{k-1} T^{1+(s+1)\Delta-(k-1)} - (1+s\Delta-k) A^{\Delta+1+k} T^{s\Delta-k}]$$

Nel primo pezzo della somma a secondo membro si può eliminare il termine con $k = 0$ e ridefinire $k-1$ come k ; analogamente, nell'altro pezzo si può eliminare il termine con $k = 1+s\Delta$, e ridefinire come k la quantità $\Delta + 1 + k$. In questo modo si ottiene:

$$\frac{d^{s+1} A}{dx^{s+1}} = \sum_{k=0}^{s\Delta} C_{k+1}^{(s)} A^k T^{1+(s+1)\Delta-k} - \sum_{k=\Delta+1}^{1+(s+1)\Delta} C_{k-(\Delta+1)}^{(s)} [2+(s+1)\Delta-k] A^k T^{1+(s+1)\Delta-k} \quad (12)$$

che può essere confrontata con la (11) riscritta per la derivata (s+1)-

esima, il che porta all'identificazione ¹²⁾

$$C_k^{(s+1)} = (k+1)C_{k+1}^{(s)} - [2+(s+1)\Delta-k]C_{k-(\Delta+1)}^{(s)} \quad (13)$$

E' chiaro che, a causa dei diversi limiti tra cui varia l'indice k nelle due somme a secondo membro della (12), vi saranno dei valori di k per cui $C_k^{(s+1)}$ riceve un contributo solo da una di tali somme; tuttavia si può conservare alla (13) una validità generale assumendo che, tutte le volte che l'indice j di $C_j^{(s)}$ esce fuori dall'intervallo dei valori ammessi ($0 \leq j \leq 1 + s\Delta$) il corrispondente $C_j^{(s)}$ vada preso uguale a zero. In questo modo è facile verificare che si tiene esattamente conto di tutte le situazioni in cui il contributo a $C_k^{(s+1)}$ viene soltanto da una delle due somme che figurano nella (12).

Una prima considerazione da fare a proposito della (13) è che gli indici dei due coefficienti che vi figurano (sia che cadano o che non cadano nell'intervallo dei valori ammessi) sono sempre spazati di n . (Infatti è $(k+1) - (k-\Delta-1) = \Delta+2=n$). Ne segue che, se in una particolare derivata di A o di T gli indici dei coefficienti non nulli sono spazati di n , ciò avviene anche per tutte le derivate successive. Ma questo è quanto succede per tutte le derivate di A e T : infatti per $s = 0$ c'è un solo coefficiente $\neq 0$ ($C_0^{(0)}$ per T , $C_1^{(0)}$ per A); e non è difficile dedurre che, applicando le conclusioni del ragionamento precedente, tale fatto garantisce che tutte le derivate successive di tali funzioni contengono soltanto monomi in cui le potenze di A (e di T) differiscono tra loro per multipli

12) E' evidente che, benché la (11) e la (12) siano state scritte formalmente per le derivate di A , l'identico ragionamento vale anche per le derivate di T , così che la (13) e le considerazioni che seguono verranno sempre riferite ad entrambi i casi.

di n.¹³⁾.

La struttura dell'insieme dei coefficienti $C_j^{(s)}$ può essere facilmente visualizzata

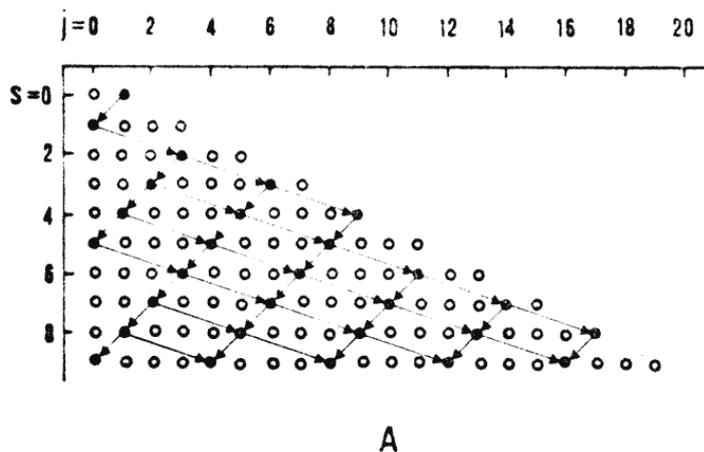
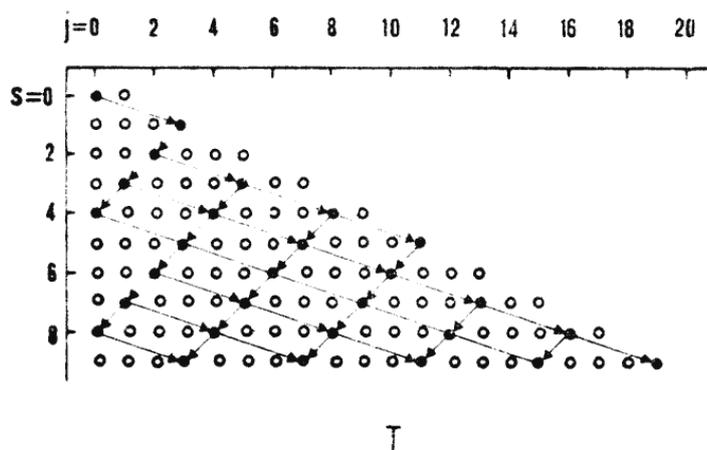


fig. 1

13) Che questa conclusione non sia banale (come forse potrebbe sembrare) lo si può dedurre dal fatto che essa non è applicabile, p.es., alla funzione $A+T$: infatti in tal caso si hanno in partenza ($s=0$) due coefficienti non nulli contigui (cioè con separazione minore di n) e ciò invalida la premessa del ragionamento.

arrangiandoli nella matrice pseudo-triangolare mostrata in Fig. 1 (in cui si è posto $n = 4$, ma l'estensione agli altri valori di n è immediata). La riga corrispondente ad un certo valore di s corrisponde alla successione dei $C_j^{(s)}$; i coefficienti non nulli sono indicati con un circoletto nero, quelli nulli con un circoletto bianco. Passando da una riga alla successiva, il numero dei circoletti aumenta di $n-2$ unità (la prima riga ha sempre due circoletti, uno bianco e uno nero).

Le frecce che uniscono un punto di una riga ad uno della riga successiva mostrano il contributo dato da uno dei $C_j^{(s)}$ a uno dei $C_k^{(s+1)}$ attraverso la (13); è chiaro che tali frecce sono mostrate solo per i coefficienti non nulli. In particolare, le frecce corte, che vanno da destra verso sinistra, corrispondono al primo termine della (13) ($j=k+1$), e non comportano un cambiamento di segno di $C_k^{(s+1)}$ rispetto a $C_j^{(s)}$; invece le frecce lunghe, che vanno da sinistra verso destra, corrispondono al secondo termine della (13) ($j=k+1-n$) e comportano un cambiamento di segno. Ogni punto non può ricevere dalla riga superiore più di due frecce (una lunga e una corta): ovviamente, in particolari posizioni esso può riceverne solo una. Analogamente, da un punto non possono partire più di due frecce. Si vede che i coefficienti non nulli sono disposti lungo diagonalanti: conviene considerare quelle nella direzione delle frecce corte, contando a partire da sinistra. E' facile concludere che tutti i coefficienti di tali diagonalanti sono $\neq 0$ e di segno concorde, e che i segni si alternano passando da una diagonale alla successiva. La cosa è ovvia per le prime due diagonalanti, i cui punti sono raggiunti da una sola freccia (si noti che, per ipotesi, in entrambi i diagrammi di Fig.1 il punto più in alto corrisponde ad un coefficiente positivo). Ricordando l'effetto sui segni dovuto alle frecce, si conclude immediatamente che la prima diagonale consiste di coefficienti positivi, la seconda di coefficienti negativi.

Quanto alle successive, il punto più in alto riceve una sola freccia lunga, e quindi corrisponde ad un coefficiente di segno contrario a quelli della diagonale precedente; tutti gli altri ricevono una freccia corta della stessa diagonale, e una freccia lunga dalla diagonale precedente, e quindi i rispettivi contributi che entrano nella (13) risultano sempre di segno concorde: ne segue che i coefficienti non possono mai annullarsi. Il segno dei coefficienti corrispondenti ai punti della diagonale in esame, uguale per tutti, è chiaramente lo stesso di quello corrispondente al punto più alto, e, per quanto detto prima, è opposto al segno associato ai punti della diagonale precedente. I coefficienti degli sviluppi in serie di Taylor (I-11) sono chiaramente legati alla successione dei coefficienti $C_0^{(s)}$ (corrispondenti ai punti situati sulla prima verticale a sinistra): si conferma quindi il risultato, trovato in I, che i coefficienti non nulli sono spazati ad intervalli di n , a partire da $s = 0$ per T e da $s = 1$ per A ; tali coefficienti, per quanto detto, non possono mai annullarsi, e, appartenendo due coefficienti non nulli consecutivi a diagonali contigue, essi risultano di segno alternato.

Quanto all'espressione effettiva di tali coefficienti in funzione di n , il ragionamento precedente non permette di ricavarne facilmente un'espressione esplicita, perché l'applicazione a catena delle (13) porta rapidamente a complicazioni insormontabili. Per ottenere tale espressione (almeno per i primi termini), è più semplice usare un procedimento ricorrente, in cui si calcolano alternativamente i coefficienti delle due funzioni A_n e T_n . Per fissare le idee, supponiamo di conoscere lo sviluppo di $A_n(x), T_n(x)$ fino all'ordine, rispettivamente, x^{kn+1} e x^{kn} ; tali sviluppi, per quanto già detto, risulteranno della forma seguente:

$$A_n(x) \approx x \left[1 + \sum_{s=1}^k \alpha_s (x^n)^s \right] \quad (14)$$

$$T_n(x) \approx 1 + \sum_{s=1}^k \beta_s (x^n)^s \quad (15)$$

[Ovviamente, se $k = 0$ le sommatorie a secondo membro sono assenti].

Si formi ora la potenza $(n-1)$ -esima del polinomio in parentesi quadrata a secondo membro della (14), e si isoli, nel risultato, il coefficiente dalla potenza $(x^n)^k$. Tale coefficiente, che chiameremo γ , è una funzione univoca degli α_s (con $s \leq k$). È ^{immediato} vedere che, nello sviluppo di $[A_n(x)]^{n-1}$, tale coefficiente moltiplica la potenza $x^{(k+1)n-1}$; integrando e ricordando le (2), si vede che $-\frac{\gamma}{(k+1)n}$ risulta essere il coefficiente di $x^{(k+1)n}$ nello sviluppo di $T_n(x)$.

Si è quindi ottenuto il termine successivo nello sviluppo della (15). Analogamente, partendo dalla (15), elevando il polinomio a secondo membro alla potenza $(n-1)$, isolando il termine in x^{kn} e chiamando γ' il suo coefficiente, si conclude che $\frac{\gamma'}{kn+1}$ è il coefficiente della potenza x^{kn+1} nello sviluppo di $A_n(x)$; poiché di fatto, in base al risultato precedente, la (15) è conosciuta fino all'ordine $(k+1)$ in x^n , è dunque possibile aggiungere un ulteriore termine alla (8) (di ordine $x^{(k+1)n+1}$). In tale maniera si riesce a costruire, termine a termine, gli sviluppi in serie (14) e (15) fino a un ordine comunque elevato, a partire dall'ovvio caso $k = 0$; il limite a tale procedimento è posto soltanto dalla complessità dei calcoli, che diventano sempre più complicati col progredire dei termini della serie. Nella tabella I sono riportati i risultati fino a

$k=4$ non solo per A_n e T_n , ma anche per $\frac{1}{T_n}$ e S_n , i cui sviluppi sono deducibili in maniera immediata a partire dalla (14) e (15) (pur se l'effettuazione materiale dei calcoli presenta le stesse difficoltà che si hanno per A_n e T_n).

L'osservazione dei coefficienti di A_n e T_n riportati nella tabela I mostra alcune caratteristiche di regolarità (p.es., nei denominatori). E' possibile concludere che in A_n a partire dal termine in x^{n+1} è sempre presente un fattore $(n-1)$, che si mantiene alla prima potenza in tutti i termini successivi, mentre in T_n c'è un fattore $(n-1)^2$ a partire dal termine in x^{2n} , e anch'esso si mantiene in tutti i termini successivi¹⁴⁾. Anche le potenze di $(n+1)$ nei denominatori dei coefficienti, che, per così dire, rompono (a partire dai coefficienti con $k=3$) la progressione regolare osservabile negli altri fattori, crescono di una unità per ogni coefficiente successivo. La sola cosa che sfugge apparentemente a qualsiasi criterio di regolarità è l'espressione dei polinomi in n che appaiono, con grado sempre crescente (apparentemente per salti di tre unità) a numeratore dei coefficienti a partire da $k=2$ per $A_n(x)$, e da $k=3$ per $T_n(x)$. E' ipotizzabile che una relazione di ricorrenza, presumibilmente di tipo non semplice, esista anche per tali polinomi; tuttavia è difficile scorgere, nella loro espressione, un indizio anche lieve sulla natura di tale relazione. E' immediato controllare che nei casi noti ($n=2$, per cui si riottengono gli sviluppi delle funzioni trigonometriche, e anche $n=1$ per $1/T$ e S), come pure nei casi studiati in $I(n=3,4,6)$ si ritrovano tutti i risultati già ottenuti: in particolare, per $n=3$ si può verificare la coincidenza numerica (a parte i segni) dei coefficienti corrispondenti di A e S , nonché di T e $1/T$, dovuta alle formule collegate (eq. (I-12) e (I-13)).

14) Tali fattori sono necessari per riprodurre la situazione che si ha per $n=1$ (cf. (I-7)).

TABELLA I

$$\begin{aligned}
 A_n(x) = & x - \frac{n-1}{n(n+1)} x^{n+1} + \frac{(n-1)(2n^2-3n-1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)} x^{2n+1} - \\
 & - \frac{(n-1)(12n^5-34n^4+n^3+33n^2+11n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(n+1)} x^{3n+1} + \\
 & + \frac{(n-1)(144n^8-644n^7+520n^6+861n^5-565n^4-674n^3-194n^2-23n-1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(4n+1)(n+1)^2} x^{4n+1} - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n(x) = & 1 - \frac{x^n}{n} + \frac{(n-1)^2}{n(n+1)(2n)} x^{2n} - \frac{(n-1)^2(4n^3-6n^2-3n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(n+1)} x^{3n} + \\
 & + \frac{(n-1)^2(36n^6-116n^5+41n^4+100n^3-6n^2-8n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(n+1)^2} x^{4n} - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n(x) = & x + \frac{2}{n(n+1)} x^{n+1} + \frac{2(-n^2+5n+2)}{n(n+1)(2n)(2n+1)} x^{2n+1} + \frac{4(2n^5-16n^4+23n^3+44n^2+17n+2)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(n+1)} x^{3n+1} \\
 & + \frac{4(-18n^8+193n^7-585n^6-38n^5+1500n^4+1313n^3+443n^2+68n+4)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(4n+1)(n+1)^2} x^{4n+1} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T(x)} = & 1 + \frac{x^n}{n} + \frac{-n^2+4n+1}{n(n+1)(2n)} x^{2n} + \frac{4n^5-26n^4+31n^3+49n^2+13n+1}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(n+1)} x^{3n} + \\
 & + \frac{-36n^8+320n^7-811n^6-54n^5+1555n^4+1052n^3+251n^2+26n+1}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(n+1)^2} x^{4n} + \dots
 \end{aligned}$$

S E Z I O N E II

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE DELLE FTG

§ II.1.- Le formule di ricorrenza nell'integrazione dei monomi in A e T.

In questa Sezione verrà trattato più estesamente un argomento appena accennato in I, che, pur non essendo particolarmente importante dal punto di vista concettuale, può invece essere assai utile nelle applicazioni pratiche: e cioè l'integrazione delle FTG.

Infatti le FTG si prestano ad essere usate per sostituzione in numerosi integrali abeliani di tipo opportuno, in analogia con i casi in cui si introducono le funzioni trigonometriche per semplificare, ad esempio, espressioni del tipo $\sqrt{1-x^2}$. Gli stessi integrali ellittici, in alcuni casi, possono essere trattati più convenientemente introducendo le FTG di ordine 3 o 4 (eventualmente estese) anziché usando i metodi già noti. L'interesse di introdurre le FTG nella risoluzione degli integrali sta nel fatto che è possibile sfruttare le proprietà di simmetria delle funzioni stesse in modo da ottenere in modo rapido delle semplificazioni che riconducono classi estese di integrali a pochi tipi fondamentali.

Il caso più interessante consiste nell'integrazione dei monomi in A e T, cioè degli integrali (indefiniti) di tipo

$$\int A^p(x) T^q(x) dx \quad (16)$$

ove si suppone fissato l'ordine n delle FTG, e p, q , sono numeri interi, eventualmente negativi. (Tuttavia, molte delle formule che saranno trovate nel seguito mantengono la loro validità anche nel caso di p, q qualsiasi). Si può vedere infatti che tutti gli integrali di tipo (16) sono immediatamente riconducibili gli uni agli altri quando gli esponenti sono fatti variare per multipli di n .

A tale scopo è sufficiente ricondursi alla forma (16) partendo, p. es., dall'integrale $\int A^p T^{q+n} dx$ ¹⁵⁾. Integrando per parti si ottiene (per $p \neq -1$):

$$\int A^p T^{q+n} dx = \frac{A^{p+1} T^{q+1}}{p+1} + \frac{q+1}{p+1} \int A^{p+n} T^q dx \quad (17)$$

D'altro canto, dalla relazione $T^n = 1-A^n$ si ha:

$$\int A^p T^{q+n} dx = \int A^p T^q dx - \int A^{p+n} T^q dx \quad (18)$$

Confrontando la (17) con la (18), e moltiplicando il tutto per $p+1$, si ottiene la formula di ricorrenza

$$(p+q+2) \int A^{p+n} T^q dx = (p+1) \int A^p T^q dx - A^{p+1} T^{q+1} \quad (19)$$

che resta valida anche nel caso $p = -1$.

Procedendo in modo del tutto analogo a partire dall'integrale $\int A^{p+n} T^q dx$ si ottiene

$$(p+q+2) \int A^p T^{q+n} dx = (q+1) \int A^p T^q dx + A^{p+1} T^{q+1} \quad (20)$$

che è immediatamente riconducibile alla (19) con la sostituzione di x

15) In tutte le formule che seguiranno si deve tener presente che gli integrali indefiniti, in quanto tali, contengono sempre una costante arbitraria (che non viene indicata esplicitamente per ragioni di semplicità).

con $m-x$ (cf. eq. (4)).

La risoluzione delle (19) e/o (20) rispetto al primo membro permette quindi di diminuire di quanti multipli di n si voglia gli esponenti dei monomi in A e T .

L'unica eccezione si ha quando $p+q+2 = 0$. Tuttavia in tal caso l'integrale da risolvere risulta (p.es., nel caso della (19)) della forma:

$$\int A^{p+n} T^{-2-p} dx = \int S^p A^n dS = \int \frac{S^{p+n}}{1+S^n} dS \quad (21)$$

e, per p intero, l'ultimo integrale nella (21) è sempre risolubile elementarmente.

Poiché è evidente la convenienza di riferire gli integrali di tutti i monomi in A e T a un gruppo di integrali standard in cui gli esponenti p, q siano quanto più è possibile piccoli (in pratica, compresi tra 0 e $n-1$) deve essere anche contemplata la possibilità di aumentare gli esponenti di multipli di n , il che significa, di fatto, risolvere le (19) e (20) rispetto a $\int A^p T^q dx$. Tuttavia ciò non è possibile se l'esponente da aumentare è uguale a -1 ; ne segue che i monomi in cui uno (o entrambi) gli esponenti sono uguali a -1 non sono riconducibili ad integrali con esponenti non negativi, e quindi il gruppo di integrali standard deve contenere anche alcuni tra essi (I gruppi standard per esponenti interi saranno esplicitamente riportati più avanti per $n=3$ e $n=4$).

§ II.2.- Gli integrali definiti tra 0 e m e la generalizzazione della formula di Wallis.

Se entrambi gli esponenti di un monomio in A e T risultano maggiori di -1, il monomio suddetto è integrabile tra 0 e m. Il valore dell'integrale può essere espresso dalla seguente formula compatta, valida per qualunque p,q, purché > 0:

$$\int_0^m A^{p-1} T^{q-1} dx = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \quad (22)$$

ove B è la funzione beta di Eulero.

La dimostrazione della (22) è immediatamente ottenibile a partire da una delle definizioni della funzione beta:

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du$$

Ponendo $x = p/n$, $y = q/n$ e sostituendo $u = A^n(x)$ si arriva immediatamente alla (22).

La (22) contiene (per $p = q = 1$) la definizione (I-5) di π , e tutte le ben note formule sugli integrali tra 0 e $\pi/2$ dei prodotti di potenze di seni e coseni.

E' possibile anche ottenere una generalizzazione della formula di Wallis, che fornisce una successione lentamente convergente a π .

Partendo dall'ovvia constatazione che, per $0 < x < m$, si ha $A^{p_1} < A^{p_2}$ per $p_1 > p_2$, e indicando con k un intero positivo qualsiasi, si arriva

alle seguenti disuguaglianze:

$$\int_0^m A^{(k+1)n-1} dx < \int_0^m A^{kn} dx < \int_0^m A^{kn-1} dx$$

e, applicando la (22):

$$\frac{1}{n} B\left(k+1, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} B\left(k + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} B\left(k, \frac{1}{n}\right) \quad (23)$$

Introduciamo ora il simbolo di "fattoriale n-uplo" $r^{(n)}$ di un intero positivo r , definito da:

$$r^{(n)}! = r(r-n) (r-2n) \dots R_{r_n}$$

ove R_{r_n} è il resto della divisione di r per n (se n divide r , si prende $R_{r_n} = n$). Si assume anche la convenzione $0^{(n)}! = 1$. Un semplice calcolo mostra che, per s intero > 0 , si ha:

$$\frac{1}{n} B(s, \frac{1}{n}) = \frac{[(s-1)n]^{(n)}!}{[(s-1)n+1]^{(n)}!}$$

$$\frac{1}{n} B(s + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = m \frac{[(s-1)n+1]^{(n)}!}{[(s-1)n+2]^{(n)}!}$$

ricordando la definizione (I-5) di m .

Inserendo le suddette espressioni nella (23), e manipolando, ove opportuno, i fattoriali n-upli in base alla loro definizione, si arriva al seguente risultato:

$$\frac{kn}{kn+1} \frac{[(k-1)n]^{(n)}!}{[(k-1)n+1]^{(n)}!} < m \frac{[(k-1)n+1]^{(n)}!}{[(k-1)n+2]^{(n)}!} < \frac{[(k-1)n]^{(n)}!}{[(k-1)n+1]^{(n)}!}$$

Prendendo il limite $k \rightarrow \infty$, si giunge facilmente alla relazione

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[(k-1)n+2]^{(n)}! [(k-1)n]^{(n)}!}{([[(k-1)n+1]^{(n)}!])^2} \quad (24)$$

La (24) per $n=2$ riproduce esattamente la nota formula di Wallis.

Tuttavia l'espressione generale assume una forma preferibile, perché più compatta, sostituendo nella (24) k a $(k-1)$, con il che si ottiene:

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(kn+2)^{(n)}! (kn)^{(n)}!}{[(kn+1)^{(n)}!]^2} \quad (25)$$

Specificando la (25) per $n = 3$, e tenendo presente che $(3k)!!! \cdot (3k+1)!!! (3k+2)!!! = (3k+2)!$ (ove il simbolo $!!!$ sta per $^{(3)}!$) si ottiene:

$$m_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3k+2)!}{[(3k+1)!!!]^3} \quad (26)$$

Come già fatto notare per la formula di Wallis, la convergenza verso il limite delle successioni (25) e (26) è molto lenta.

§ II.3.- L'integrazione delle FTG di ordine 3 e 4.

Nelle tabelle II e III è riportata una scelta di integrali indefiniti ¹⁶⁾ concernenti le FTG di ordine rispettivamente 3 e 4. In particolare

16) Come già accennato in precedenza ¹⁵⁾, per ragioni di semplicità non è indicata la costante di integrazione implicitamente contenuta in ogni integrale indefinito. Ne segue che, quando per un certo integrale sono riportate due o più funzioni, esse differiscono tra loro per una costante.

sono riportati gli integrali di tutti quei monomi che, mediante le formule di ricorrenza descritte nel § II.1, permettono di risalire all'integrale di un qualsiasi monomio in A e T . Per l'ordine 4 praticamente tali monomi esauriscono la tabella, mentre per l'ordine 3 sono riportati anche parecchi altri integrali di tipo più complicato, in quanto le corrispondenti FTG, a causa delle loro notevoli proprietà di simmetria, risultano essere assai più "versatili" per quanto riguarda l'integrazione. In ogni caso è evidente che le tabelle suddette hanno soprattutto un valore indicativo, e che una trattazione esauriente dell'integrazione delle FTG di ordine 3 e 4 richiede uno studio ben più approfondito.

Tornando di nuovo agli integrali riportati nelle tabelle, si noterà che in essi, oltre alle funzioni elementari, alle stesse FTG e alle loro funzioni inverse (indicate impropriamente con la notazione "arc": si veda al proposito il § I-3 di I), si trova una nuova funzione indicata con il simbolo J (e con un indice 3 o 4 che si riferisce all'ordine ma che, in certe circostanze, potrà essere omissa senza generare ambiguità).

In particolare, considerando i monomi di FTG di ordine 3, si vede

che tale nuova funzione deve essere introdotta solo per l'integrazione della funzione AT; e ciò non deve sorprendere, in quanto (cf. eq. (I-38)) AT è sostanzialmente una $\wp u$ di Weierstrass, ed è ben noto che per l'integrale $-\int \wp u du$ si richiede una nuova funzione trascendente indicata con ζu . Nel contesto delle FTG l'introduzione della ζu (singolare nell'origine) non è conveniente, ed è meglio sostituirla con un'altra funzione $\mathcal{J}_3(x)$, definita appunto come l'integrale di AT per l'ordine 3:

$$\mathcal{J}_3(x) = \int_0^x A_3(y) T_3(y) dy \quad (27)$$

Dalla definizione (27), considerata insieme al legame tra FTG di ordine 3 e funzioni di Weierstrass equianarmoniche ¹⁷⁾, si trova:

$$\mathcal{J}_3(x) = \sqrt{3} \zeta(u|0,1) + A(x) - T(x) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}m}$$

ove $u = \frac{x+m}{\sqrt{3}}$, e la costante che figura a secondo membro assicura la condizione di normalizzazione $\mathcal{J}_3(0) = 0$.

In maniera analoga, per le FTG di ordine 4 si definisce:

17) Ricordiamo che per le due costanti n, n' , caratteristiche delle funzioni di Weierstrass e abbondantemente citate dal Tricomi ²⁾, nel caso della $\wp u$ equianarmonica con $g_3 = 1$ si ha

$$n = n'^* = \frac{\pi}{3m} e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

$$\mathfrak{J}_4(x) = \int_0^x A_4^2(y) T_4^2(y) dy \quad (28)$$

e il legame con la $\zeta(x|-4,0)$ è il seguente ¹⁸⁾.

$$\mathfrak{J}_4(x) = \frac{1}{2} \left[\zeta(x|-4,0) - \frac{T_4^3(x)}{A(x)} \right] \quad (29)$$

Poiché, come già accennato, nelle tabelle figurano anche le funzioni inverse delle FTG, per esse si deve fare attenzione al problema della determinazione dei loro valori anche per argomento reale; per non appesantire le tabelle, la ricerca della corretta determinazione di tali funzioni è lasciata all'attenzione del lettore. In termini di integrali ellittici, le suddette funzioni inverse corrispondono ad integrali di prima specie. Quando tali funzioni figurano come argomento della funzione \mathfrak{J} , ciò significa che entrano in gioco anche integrali ellittici di seconda specie. Nei casi semplici presentati nelle tabelle II e III non figurano integrali ellittici di terza specie; tuttavia essi interverranno (per l'ordine 4) nello studio degli integrali delle FTG estese (v. prossimo paragrafo).

18) Sfruttando il legame tra le funzioni di Weierstrass con $g_2 = -4$, $g_3 = 0$ e quelle con $g_2 = 1$, $g_3 = 0$ (che risulta essere un caso particolare della trasformazione di second'ordine sui periodi estesamente discussa in I) si può esprimere \mathfrak{J}_4 anche in termini di $\zeta(x|1,0)$. L'argomento verrà ripreso, in forma più generale, nel prossimo paragrafo.

TABELLA II
INTEGRALI CONTENENTI LE FTG DI ORDINE 3

$$\int (A+T) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{2} (A+T)^{3/2}; \int (T-A) dx = \log(A+T)$$

$$\int A^2 dx = -T; \int T^2 dx = A; \int AT dx = \mathcal{J}_3(x)$$

$$\int A^2 T dx = -\frac{T^2}{2}; \int AT^2 dx = \frac{A^2}{2}$$

$$\int (T^3 - A^3) dx = AT; \int A^2 T^2 dx = \frac{A^3}{3} = -\frac{T^3}{3}$$

$$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{2} \log \frac{1-T}{A} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2T}{\sqrt{3}}; \int \frac{dx}{T} = -\frac{1}{2} \log \frac{1-A}{T} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2A}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dx}{S} = \frac{1}{2} \log \frac{1-T}{A} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2T}{\sqrt{3}}; \int S dx = -\frac{1}{2} \log \frac{1-A}{T} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2A}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{A^2}{T} dx = -\log T; \int \frac{T^2}{A} dx = \log A; \int \frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int \frac{dx}{T^2} = S; \int \frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S}; \int S^2 dx = \frac{1}{T}; \int \frac{dx}{S^2} = -\frac{1}{A}$$

$$\int \frac{A-T}{A+T} dx = \frac{1}{A+T}; \int \frac{dx}{(A+T)^2} = \frac{1}{2} \frac{A-T}{A+T} = -\frac{1}{1+S}; \int \frac{dx}{(T-A)^2} = \frac{1}{1-S}$$

$$\int \frac{dx}{1-A} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{T}{1-A}\right); \int \frac{dx}{1-T} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{A}{1-T}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1+S} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{A+T}\right); \int \frac{dx}{1+1/S} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{A+T}\right)$$

$$\int \frac{dx}{T(T+A)} = \pm \log(1 \pm S); \int \frac{dx}{A(A+T)} = \mp \log\left(1 \pm \frac{1}{S}\right)$$

$$\int \frac{dx}{A+T} = A-T-\mathcal{J}_3(x); \int \frac{dx}{1-T} = -\frac{A^2}{1-T} - \mathcal{J}_3(x); \int \frac{dx}{1-A} = \frac{T^2}{1-A} - \mathcal{J}_3(x)$$

$$\int \frac{dx}{T^2+A} = \operatorname{arctg} S; \int \frac{dx}{T^2-A} = \log \frac{A+T}{T-A}$$

$$\int \operatorname{arc} A(x) dx = x \operatorname{arc} A(x) + \frac{1}{2} \log \left[x + (1-x^3)^{1/3} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2(1-x^3)^{1/3}}{x} - 1 \right]$$

$$\int \text{arc } T(x) dx = x \text{ arc } T(x) - \frac{1}{2} \log \left[x + (1-x^3)^{1/3} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{2(1-x^3)^{1/3}}{x} - 1 \right]$$

$$\int \text{arc } S(x) dx = x \text{ arc } S(x) - \frac{1}{2} \log \left[(1+x^3)^{1/3} - x \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{2x}{(1+x^3)^{1/3}} + 1 \right]$$

$$\int \frac{dx}{T-A} = 2^{-4/3} \left[-\frac{3}{2} \log(1-2^{-2/3}(A+T)) + \frac{1}{2} \log(A+T)(A-T)^2 + \sqrt{3} \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}(1+2^{1/3}(A+T)) \right]$$

$$\int \frac{T+A}{T-A} dx = 2^{-2/3} \left[-\frac{3}{2} \log(1-2^{-2/3}(A+T)) + \frac{1}{2} \log(A+T)(A-T)^2 - \sqrt{3} \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}(1+2^{1/3}(A+T)) \right]$$

$$\int T^{1/2} dx = 2^{2/3} \text{arc } AT \left[2^{-2/3} A \right] ; \int A^{1/2} dx = -2^{2/3} \text{arc } AT \left[2^{-2/3} T \right]$$

$$\int T^{-1/2} dx = -2^{2/3} \text{arc } AT \left[-2^{-2/3} S \right] ; \int A^{-1/2} dx = 2^{2/3} \text{arc } AT \left[-\frac{2^{-2/3}}{S} \right]$$

$$\int S^{1/2} dx = -2^{2/3} 3^{-1/2} \text{arc}(A+T) \left[2^{2/3} T \right] ; \int S^{-1/2} dx = 2^{2/3} 3^{-1/2} \text{arc}(A+T) \left[2^{2/3} A \right]$$

$$\int (AT)^{1/2} dx = \frac{2}{3} \arcsin A^{3/2} = \frac{2}{3} \text{arctg } S^{3/2} ; \int (AT)^{-1/2} dx = 2^{1/3} 3^{-1/2} \text{arc}(A+T) \left[2^{4/3} AT \right]$$

$$\int (AT)^{3/2} dx = 2^{-4/3} 3^{-1/2} \mathcal{J}_3 \left(\text{arc}(A+T) \left[2^{4/3} AT \right] \right) - \frac{1}{12} (T^3 - A^3) (AT)^{-1/2}$$

$$\int AT^{1/2} dx = 2^{4/3} \mathcal{J}_3 \left(\text{arc}(A+T) \left[2^{-2/3} A \right] \right) ; \int TA^{1/2} dx = -2^{4/3} \mathcal{J}_3 \left(\text{arc } AT \left[2^{-2/3} T \right] \right)$$

$$\int \frac{T^{1/2}}{A} dx = \frac{2}{3} \text{tgh}^{-1}(T^{3/2}) = -\frac{2}{3} \cosh^{-1}(A^{-3/2}) ; \int \frac{A^{1/2}}{T} dx = -\frac{2}{3} \text{tgh}^{-1}(A^{3/2}) = \frac{2}{3} \cosh^{-1}(T^{-3/2})$$

$$\int (A+T)^{1/2} dx = 2^{1/3} 3^{1/2} \text{arc } AT \left[2^{-4/3} (A+T) \right] ; \int (A+T)^{-1/2} dx = 3^{-1/2} \cosh^{-1} \left[2(A+T)^{-3/2} \right]$$

$$\int (A+T)^{3/2} dx = 2^{5/3} 3^{1/2} \mathcal{J}_3 \left(\text{arc } AT \left[2^{-4/3} (A+T) \right] \right) ; \int (A+T)^{5/2} dx = 2(A-T)(A+T)^{1/2}$$

$$\int (A-T)(A+T)^{1/2} dx = -2(A+T)^{1/2}$$

$$\int (A^2 + T^2)^{1/2} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2(A^2 + T^2)} - (T-A)}{\sqrt{2(A^2 + T^2)} + (T-A)} + \frac{2}{3} \text{arctg} \frac{\sqrt{A^2 + T^2}}{T-A}$$

$$\int (T^2 - A^2)^{1/2} dx = 2^{1/2} 3^{-3/4} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} 3^{1/4} (T^2 - A^2)^{1/2}}{\sqrt{3}(T-A) - (T+A)} + \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2} 3^{1/4} (T^2 - A^2)^{1/2}}{\sqrt{3}(T-A) + (T+A)} \right]$$

$$\int \operatorname{arc} AT(x) dx = x \operatorname{arc} AT(x) - \int_3 [\operatorname{arc} AT(x)]$$

T A B E L L A III

INTEGRALI CONTENENTI LE FTG DI ORDINE 4

$$\int A dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} S \left(\frac{\sqrt{2}T}{A^2} \right) ; \int T dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} S \left(\frac{\sqrt{2}A}{T^2} \right)$$

$$\int S dx = \frac{1}{2} \log(1+A^2) - \log T ; \int \frac{dx}{S} = -\frac{1}{2} \log(1+T^2) + \log A ; \int \frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int AT dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin A^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arcos} T^2$$

$$\int (A^2+T^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}AT}{T^2-A^2} ; \int (T^2-A^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2}AT}{T^2+A^2}$$

$$\int A^3 T^k dx = -\frac{T^{k+1}}{k+1} ; \int T^3 A^k dx = \frac{A^{k+1}}{k+1} \quad (k \neq -1)$$

$$\int \frac{A^3}{T} dx = -\log T ; \int \frac{T^3}{A} dx = \log A ; \int A^2 T^2 dx = \mathcal{J}_4(x) ; \int (T^4 - A^4) dx = AT$$

$$\int A^2 T dx = \sqrt{2} \mathcal{J}_4 \left[\operatorname{arc} S \left(\frac{\sqrt{2}A}{T^2} \right) \right] - \frac{A^3 T^2}{1+A^4} ; \int AT^2 dx = -\sqrt{2} \mathcal{J}_4 \left[\operatorname{arc} S \left(\frac{\sqrt{2}T}{A^2} \right) \right] + \frac{A^2 T^3}{1+T^4}$$

$$\int \frac{dx}{T^2} = S ; \int \frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S} ; \int S^2 dx = \frac{A^3}{T} - 2 \mathcal{J}_4(x) ; \int \frac{dx}{S^2} = -\frac{T^3}{A} - 2 \mathcal{J}_4(x)$$

$$\int \left(\frac{1}{T} + \frac{A^2}{T} \right) dx = \operatorname{tgh}^{-1} A ; \int \left(\frac{1}{A} + \frac{T^2}{A} \right) dx = -\operatorname{tgh}^{-1} T$$

$$\int \left(\frac{1}{T} - \frac{A^2}{T} \right) dx = \operatorname{arctg} A ; \int \left(\frac{1}{A} - \frac{T^2}{A} \right) dx = -\operatorname{arctg} T$$

$$\int \frac{dx}{(A+T)^2} = -\frac{1}{1+S} ; \int \frac{dx}{(T-A)^2} = \frac{1}{1-S} ; \int \frac{dx}{T(T \pm A)} = \pm \log(1 \pm S) ; \int \frac{dx}{A(A \pm T)} = \mp \log(1 \pm \frac{1}{S})$$

$$\int \frac{dx}{1 \mp A} = \frac{2}{3} x \pm \frac{1}{3} \int A dx \pm \frac{1}{3} \frac{T}{1 \mp A} ; \int \frac{dx}{1 \mp T} = \frac{2}{3} x \pm \frac{1}{3} \int T dx \mp \frac{1}{3} \frac{A}{1 \mp T}$$

$$\int \frac{dx}{1 \pm A^2} = \frac{2}{3} x + \frac{1}{3} \frac{AT}{1 \pm A^2} ; \int \frac{dx}{1 \pm T^2} = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} \frac{AT}{1 \pm T^2}$$

TABELLA IV

INTEGRALI CONTENENTI LE FTG ESTESE DI ORDINE 4

$$\int A dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{arc S}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4} T}{A^2+\lambda T^2}\right) \Big|_0 \quad (|\lambda|<1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^2-1)^{-1/4} \operatorname{Sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4} T}{A^2+\lambda T^2}\right) \Big|_0 \quad (|\lambda|>1)$$

$$\int T dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{arc S}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4} A}{T^2+\lambda A^2}\right) \Big|_0 \quad (|\lambda|<1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^2-1)^{-1/4} \operatorname{Sh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}(\lambda^2-1)^{1/4} A}{T^2+\lambda A^2}\right) \Big|_0 \quad (|\lambda|>1)$$

$$\int S dx = \frac{1}{2} \log(1+A^2+\lambda T^2) - \log T; \quad \int \frac{dx}{S} = -\frac{1}{2}(1+T^2+\lambda A^2) + \log A; \quad \int \frac{dx}{AT} = \log S$$

$$\int AT dx = \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \arcsin(\sqrt{1-\lambda^2} A^2) = \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \arccos(T^2+\lambda A^2) \quad (|\lambda|<1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \sinh^{-1}(\sqrt{\lambda^2-1} A^2) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \cosh^{-1}(T^2+\lambda A^2) \quad (|\lambda|>1)$$

$$\int (A^2+T^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(1+\lambda)} AT}{T^2-A^2} \quad (\lambda>-1); \quad = \frac{1}{2\sqrt{(-\lambda-1)}} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2(-\lambda-1)} AT}{T^2-A^2} \quad (\lambda<-1)$$

$$\int (T^2-A^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda-1)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(\lambda-1)} AT}{(T^2+A^2)} \quad (\lambda>1); \quad = \frac{1}{\sqrt{2(1-\lambda)}} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\sqrt{2(1-\lambda)} AT}{T^2+A^2} \quad (\lambda<1)$$

$$\int AT^3 dx = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} (A^2+\lambda T^2) \quad ; \quad \int A^3 T dx = -\frac{1}{2(1-\lambda^2)} (T^2+\lambda A^2) \quad (\lambda \neq \pm 1)$$

$$\int \frac{T^3}{A} dx = \log A - \lambda \int AT dx; \quad \int \frac{A^3}{T} dx = -\log T - \lambda \int AT dx; \quad \int A^2 T^2 dx = J_4(x)$$

$$\int (T^4 - A^4) dx = AT ; \int (T^4 + A^4) dx = x - 2\lambda \int_4(x) ; \int \frac{dx}{T^2} = S ; \int \frac{dx}{A^2} = -\frac{1}{S}$$

$$\int S^2 dx = \frac{A^3}{T} - 2(1-\lambda^2) \int_4(x) + \lambda(AT-x) ; \int \frac{dx}{S^2} = -\frac{T^3}{A} - 2(1-\lambda^2) \int_4(x) - \lambda(AT+x)$$

$$\int A^2 T dx = \sqrt{2}(1-\lambda^2)^{3/4} \int_4 \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4} A}{T+\lambda A^2} \right) \middle| 0 \right) - \frac{A^3 (T^2 + \lambda A^2)}{1+(1-\lambda^2)A^4} \quad (|\lambda| < 1)$$

$$\int AT^2 dx = -\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{3/4} \int_4 \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}(1-\lambda^2)^{1/4} T}{A^2 + \lambda T^2} \right) \middle| 0 \right) + \frac{T^3 (A^2 + \lambda T^2)}{1+(1-\lambda^2)T^4} \quad (|\lambda| < 1)$$

[N.B. Per $|\lambda| > 1$, sostituire $(1-\lambda^2)^{1/4}$ con $(\lambda^2-1)^{1/4}$ e arc S con Sh⁻¹

$$\int T^3 dx = A - \lambda \int A^2 T dx ; \int A^3 dx = -T - \lambda \int AT^2 dx$$

$$\int A^2 T^3 dx = \frac{1}{3(1-\lambda^2)} (A^3 + \lambda AT^2 - \lambda \int dx) ; \int A^3 T^2 dx = -\frac{1}{3(1-\lambda^2)} (T^3 + \lambda A^2 T + \lambda \int Adx)$$

$$\int A^3 T^3 dx = \frac{1}{8(1-\lambda^2)} (A^4 - T^4) + \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \int AT dx$$

$$\int dx \frac{T}{T^2 + \lambda A^2} (1 \mp \sqrt{1-\lambda^2} A^2) = (1-\lambda^2)^{-1/4} \arctg \left[(1-\lambda^2)^{1/4} A \right] (-) ; = (1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{tgh}^{-1} \left[(1-\lambda^2)^{1/4} A \right] (+)$$

$$\int dx \frac{A}{A^2 + \lambda T^2} (1 \mp \sqrt{1-\lambda^2} T^2) = -(1-\lambda^2)^{-1/4} \arctg \left[(1-\lambda^2)^{1/4} T \right] (-) ; = -(1-\lambda^2)^{-1/4} \operatorname{tgh}^{-1} \left[(1-\lambda^2)^{1/4} T \right] (+)$$

(per $|\lambda| < 1$);

$$\int dx \frac{T}{T^2 + \lambda A^2} (1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} A^2) = \frac{(\lambda^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{2}} \arctg \left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2 - 1)^{1/4} A}{1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} A^2} \right] (-) ; = \frac{(\lambda^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{2}} \operatorname{tgh}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2 - 1)^{1/4} A}{1 + \sqrt{\lambda^2 - 1} A^2} \right] (+)$$

$$\int dx \frac{A}{A^2 + \lambda T^2} (1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} T^2) = -\frac{(\lambda^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{2}} \arctg \left[\frac{2(\lambda^2 - 1)^{1/4} T}{1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} T^2} \right] (-) ; = -\frac{(\lambda^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{2}} \operatorname{tgh}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}(\lambda^2 - 1)^{1/4} T}{1 + \sqrt{\lambda^2 - 1} T^2} \right] (+)$$

(per $|\lambda| > 1$)

Si noti anche che gli integrali esprimibili come funzioni della sola S hanno lo stesso aspetto per gli ordini 3 e 4; tale fatto è un'immediata conseguenza delle (3), e si verifica per tutti gli ordini (e anche per le FTG estese di ordine 4 trattate nel prossimo paragrafo).

Per le proprietà di simmetria delle FTG (e delle funzioni ζu di Weierstrass) anche le funzioni \int definite in precedenza godono di alcune interessanti proprietà: su di esse torneremo, in un contesto più generale, nel prossimo paragrafo.

§ II.4.- L'integrazione delle FTG estese di ordine 4.

Come già richiamato nell'introduzione di questo lavoro, una descrizione completa delle funzioni ellittiche si può ottenere in termini delle FTG estese di ordine 4, caratterizzate da un parametro λ (esse riproducono le FTG ordinarie per $\lambda = 0$, e le funzioni trigonometriche e iperboliche per λ rispettivamente uguali a $+1$ e -1 (casi degeneri)).

E' quindi immediato porsi il problema di generalizzare le formule di integrazione date precedentemente in modo da coprire il caso di λ generico. La prima cosa da fare è di generalizzare le relazioni di ricorrenza (19) e (20), che permettono di variare, sotto il segno di integrale, le potenze dei monomi in A e T per multipli di 4. Senza sviluppare la dimostrazione, riportiamo qui direttamente le formule ottenute:

$$\begin{aligned}
 (1-\lambda^2)(p+q+2) \int A^{p+4} T^q dx &= \\
 &= (p+1) \int A^p T^q dx - \lambda(q-1) \int A^{p+2} T^{q-2} dx - A^{p+1} T^{q-1} (T^2 + \lambda A^2) \\
 (1-\lambda^2)(p+q+2) \int A^p T^{q+4} dx &= \hspace{15em} (30) \\
 &= (q+1) \int A^p T^q dx - \lambda(p-1) \int A^{p-2} T^{q+2} dx + A^{p-1} T^{q+1} (A^2 + \lambda T^2).
 \end{aligned}$$

Dalle suddette formule si vede che per variare di 4 un esponente dell'integrando è necessaria anche la conoscenza di un ulteriore integrale, per così dire, "intermedio" tra gli altri due (assente per $\lambda = 0$). Anche in questo caso si ritrovano le limitazioni alla possibilità di diminuire l'esponente (si deve avere $p+q+2 \neq 0$) o di aumentarlo (l'esponente da aumentare deve essere $\neq -1$); e, nonostante la maggior complessità delle formule, resta valida la conclusione che gli integrali di tutti i monomi in A e T possano essere calcolati se si conosce l'insieme di integrali base già presentati nella tabella III. Il problema dunque si riduce alla generalizzazione degli integrali della tabella III al caso di λ generico: il risultato è fornito dalla tabella IV. Per una maggiore comprensione della tecnica di integrazione, eventualmente applicabile anche ad altri integrali non elencati nella tabella, è utile accompagnare i risultati ivi contenuti con alcuni commenti.

Il punto di partenza della tecnica usata consiste nel cercare due funzioni a un solo valore che, per $\lambda \neq 0$, giochino lo stesso ruolo di A^2 e T^2 per $\lambda = 0$, nel senso che la somma dei loro quadrati dia 1. Di fatto, è possibile trovare due distinte coppie di funzioni di tale tipo, le quali, nel limite $\lambda = 0$, si riducono entrambe alla coppia A^2, T^2 . E' infatti immediato verificare che, in conseguenza della (5), valgono le seguenti relazioni: ¹⁹⁾

$$\begin{aligned}(\sqrt{1-\lambda^2} A^2)^2 + (T^2 + \lambda A^2)^2 &= 1 \\(\sqrt{1-\lambda^2} T^2)^2 + (A^2 + \lambda T^2)^2 &= 1\end{aligned}\tag{31}$$

(Si noti che nei casi degeneri $\lambda = \pm 1$ le funzioni considerate si riducono a costanti). Non è difficile rendersi conto che per λ reale, $-1 < \lambda < 1$, ricavando A dalla prima o T dalla seconda delle (31),

19) Dalle relazioni (31) è facile concludere che, quando $|\lambda| < 1$, ponendo $\lambda = \sin p$, e indicando con ϕ una variabile opportuna, si può sempre porre $\sqrt{1-\lambda^2} A^2 = \sin \phi$, $\sqrt{1-\lambda^2} T^2 = \cos(\phi+p)$, il che fornisce una parametrizzazione delle FTG estese in termini di seni e coseni (cf. nota 8)).

ci si ritrovi in situazioni analoghe, dal punto di vista dell'integrazione, a quelle già incontrate per $\lambda = 0$, come si può verificare dal confronto tra gli integrali della tabella III e quelli della tabella IV. (Il passaggio al caso $|\lambda| > 1$ si ottiene in forma reale sfruttando ben note proprietà delle funzioni che figurano a secondo membro: i casi degeneri $\lambda = \pm 1$ sono sempre calcolabili semplicemente in modo diretto, e quindi non sono riportati nella tabella).

Si noti che nella tabella IV non sono stati riportati gli integrali

$\int \frac{dx}{A}$, $\int \frac{dx}{T}$, $\int \frac{T^2 dx}{A}$, $\int \frac{A^2 dx}{T}$ che invece figurano nella tabella III.

Di fatto, gli integrali analoghi a quelli riportati nella tabella III sono di tipo diverso (e si trovano alla fine della tabella IV), mentre gli integrali ora citati coinvolgono, per $\lambda \neq 0$, anche integrali ellittici di terza specie (di tipo particolare, con il parametro k^2 uguale a -1). Anche in questo caso sarebbe probabilmente consigliabile di definire delle funzioni "ad hoc" (come si è già fatto per le funzioni \mathcal{J}) mediante le quali le formule di integrazione siano espresse in maniera particolarmente conveniente; tale problema, tuttavia, non verrà discusso in questo lavoro. Per completezza, riportiamo solo le formule che permettono di risalire a $\int \frac{dx}{T}$ e $\int \frac{A^2 dx}{T}$ in termini dell'integrale ellittico di terza specie già menzionato, espresse in forma reale per $-1 < \lambda < 1$ ²⁰⁾: il procedimento di integrazione può essere sviluppato sfruttando le sostituzioni indicate nella precedente nota ¹⁹⁾, che si possono

20) Gli altri due integrali precedentemente indicati si ottengono sostituendo nelle (32) x con $m-x$ e utilizzando la (4).

facilmente modificare per coprire anche il caso $|\lambda| > 1$. Le formule in questione sono sintetizzabili nella seguente maniera:

$$\int \frac{dx}{T(1 \pm A^2)} = \left. \begin{matrix} \operatorname{tgh}^{-1} A \\ \operatorname{arctg} A \end{matrix} \right\} \pm \lambda \int T dx \pm \lambda(1-\lambda^2)^{-1/4} \Pi\left((1-\lambda^2)^{1/4} A \left| \mp(1-\lambda^2)^{-1/2}, - \right. \right) \quad (32)$$

ove

$$\Pi(y|n, k^2) = \int \frac{dy}{(1+ny^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

è l'integrale ellittico di terza specie espresso sotto la forma di Legendre.

Per chiudere questo argomento, ritorniamo di nuovo sulla funzione \mathcal{J}_4 , per cui si conserva la definizione (28) anche per $\lambda \neq 0$. La relazione (29) viene ovviamente ad essere modificata. Per fissare le idee, supponiamo che λ sia reale e compreso tra -1 e 1 ; la generalizzazione per λ qualsiasi è immediata. Dalla trattazione svolta in I, risulta che le FTG pertinenti a un certo valore di λ possono essere messe in corrispondenza con due funzioni di Weierstrass distinte, aventi gli stessi periodi reale e immaginario, l'una con il discriminante $\Delta < 0$ (indicata in I con la notazione $\mathcal{P}(x|G_2, G_3)$) e l'altra con $\Delta > 0$ (indicata con $\mathcal{P}(x|\tilde{G}_2, \tilde{G}_3)$), legate tra loro da un'opportuna trasformazione di second'ordine sui periodi. In questo lavoro, seguendo la notazione usata in I, indicheremo coi loro simboli abituali le grandezze relative alla prima di queste due funzioni, mentre contrassegneremo con una tilde le grandezze relative alla seconda di tali funzioni. Senza richiamare tutte le formule riportate in I, esprimeremo qui $\mathcal{P}x$ e $\tilde{\mathcal{P}}x$ in funzione delle corrispondenti FTG, il che fornirà immediatamente una semplice relazione tra di loro ²¹⁾. In particolare, si ottengono le formule seguenti:

21) La derivazione della prima delle (33) non è trattata esplicitamente in I, ma è facilmente deducibile.

$$P_x = \frac{1+T^2}{2A^2} + \frac{\lambda}{6} \quad \tilde{P}_x = \frac{1}{S^2} + \frac{2\lambda}{3} \quad (33)$$

da cui si ha

$$P_x - \frac{1}{2} \tilde{P}_x = \frac{1}{2A^2} - \frac{\lambda}{6}$$

e integrando (e tenendo conto del comportamento delle funzioni per $x = 0$):

$$\xi x - \frac{1}{2} \tilde{\xi} x = \frac{1}{2S} + \frac{\lambda x}{6} \quad (34)$$

L'uso della (34) permette di esprimere il legame tra \mathfrak{J}_4 e le funzioni ζ di Weierstrass utilizzando indifferentemente la ζ o la $\tilde{\zeta}$, attraverso la formula ²²⁾:

$$\mathfrak{J}_4(x) = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \left[\tilde{\xi} x - \frac{T^3}{A} - \lambda AT - \frac{\lambda x}{3} \right] = \frac{1}{1-\lambda^2} \left[\xi x - \frac{1}{2S}(1+T^2) - \frac{\lambda AT}{2} - \frac{\lambda x}{3} \right] \quad (35)$$

Infine, verranno qui discusse alcune proprietà di ricorrenza della funzione \mathfrak{J}_4 , legate alle analoghe proprietà delle funzioni ζ di Weierstrass, ma che è più conveniente dedurre direttamente. Dalla definizione (28), con la sostituzione di x con $m-x$, si ricavano facilmente le relazioni: ²³⁾

$$\mathfrak{J}(x) + \mathfrak{J}(m-x) = \mathfrak{J}\left(\frac{m}{2} + x\right) + \mathfrak{J}\left(\frac{m}{2} - x\right) = \mathfrak{J}(m) = 2 \mathfrak{J}\left(\frac{m}{2}\right) \quad (36)$$

e, sostituendo invece nella (28) x con $m+x$ si ottiene

$$\mathfrak{J}(m+x) = \mathfrak{J}(x) + \mathfrak{J}(m)$$

e, più in generale, per k intero qualsiasi

$$\mathfrak{J}(km+x) = \mathfrak{J}(x) + k \mathfrak{J}(m) \quad (37)$$

Ponendo $x = iy$ e ricordando le (I-109) si ottiene

$$\mathfrak{J}(ix|\lambda) = -i \mathfrak{Y}(x|-\lambda) \quad (38)$$

22) La formula (29) valida per $\lambda=0$ si ottiene dalla (35) scritta in termini di $\tilde{\zeta}$ (Si veda anche nota 18)).

23) Da ora in poi l'indice 4 della \mathfrak{J} verrà omissa. Si noti che la (38) vale anche per la funzione \mathfrak{J}_3 , e, sostituendo m con $3m$, ciò accade pure per la (37).

Aumentando nella (38) l'argomento di un periodo immaginario im' si ottiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(ix+im'|\lambda) &= -i \mathfrak{J}(x+im|-\lambda) = i(\mathfrak{J}(x|-\lambda) + \mathfrak{J}(m|-\lambda)) = \\ &= \mathfrak{J}(ix|\lambda) + \mathfrak{J}(im'|\lambda) \end{aligned}$$

(ricordando che $m'(\lambda) = m(-\lambda)$); da questa relazione si deduce che, per l'aggiunta di periodi immaginari, vale una formula analoga alla (37).

Calcolando la (35) nel punto m e moltiplicando per m' , poi calcolando la stessa formula con $-\lambda$ al posto di λ nel punto m' e moltiplicando per m , e infine sommando si ottiene:

$$m' \mathfrak{J}(m) + m \mathfrak{J}(m') = \frac{1}{1-\lambda^2} [m' \zeta m + m \zeta m'] \quad (39)$$

Nella (39) le funzioni \mathfrak{J} e ζ sono riferite a valori diversi di λ sia a primo che a secondo membro: tuttavia, tenendo presente il fatto che il cambiamento di segno di λ equivale ad una rotazione dell'argomento nel piano complesso di 90° , tali grandezze possono essere espresse in termini della stessa funzione. In particolare, a secondo membro della (39), usando la notazione del Tricomi (Ref. 2) si ha $\zeta m = n$, $\zeta m' = in'$, $m = \omega$, $m' = -i\omega'$, e quindi si ottiene:

$$m' \zeta m + m \zeta m' = i(n'\omega - n\omega') = i(-i \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \quad (40)$$

(sfruttando la formula di Legendre ripetutamente citata nel Tricomi). Inserendo la (40) nella (39), e specificando i valori di λ e di m'

a primo membro, si ottiene infine la relazione:

$$m(-\lambda) \mathfrak{J}(m|\lambda) + m(\lambda) \mathfrak{J}(m|-\lambda) = \frac{\pi}{2(1-\lambda^2)}$$

che, per $\lambda = 0$, fornisce direttamente il valore di $\mathfrak{J}(m)$:

$$\mathfrak{J}(m|0) = \frac{\pi}{4m}$$

Nel limite $\lambda \rightarrow \pm 1$ la stessa formula indica come deve divergere

$$\mathfrak{J}(m|-1): \quad \mathfrak{J}(m|\lambda)_{\lambda \rightarrow -1} \approx \frac{1}{2(1+\lambda)} - \frac{m(\lambda)}{8} \quad (41)$$

Nella (41) entrambi i termini a secondo membro divergono, ma il primo è quello dominante.

SEZIONE III

FORMULE DI BISEZIONE E TRISEZIONE PER LE FTG DI ORDINE 3.

§ III. 1.- Le formule di bisezione.

Il problema delle formule di bisezione per le FTG di ordine 3 in I è stato soltanto accennato, e rinviato ad ulteriore trattamento in altra sede: è ciò non per ragioni concettuali (si tratta semplicemente di invertire le formule di duplicazione) ma pratiche. Di fatto, essendo il processo di inversione abbastanza complicato, e portando esso a formule dall'aspetto non semplice, la sua trattazione trova la sua collocazione nel presente lavoro.

Cominciamo col riportare le formule di duplicazione (I-52):

$$A(2x) = \frac{A(1+T^3)}{T(1+A^3)} ; T(2x) = \frac{T^3 - A^3}{T(1+A^3)} ; S(2x) = \frac{A(1+T^3)}{T^3 - A^3} \quad (42)$$

ove l'argomento delle funzioni a secondo membro è x , e introduciamo una nuova notazione, indicando i simboli delle FTG di argomento metà con una lettera minuscola ($a = A(\frac{x}{2})$ e simili), mentre la notazione A continuerà ad indicare $A(x)$ (e simili). In questo modo, dalla seconda delle (42) calcolata in $\frac{x}{2}$ si ottiene

$$T = \frac{2t^3 - 1}{t(2 - t^3)}$$

da cui si ricava la seguente equazione di quarto grado per t :

$$t^4 + \frac{2}{T} t^3 - 2t - \frac{1}{T} = 0 \quad (43)$$

E' facile vedere che, utilizzando le altre relazioni (42), oppure servendosi delle formule collegative che trasformano una delle sei funzioni $a, t, -s, \frac{1}{a}, \frac{1}{t}, -\frac{1}{s}$ in un'altra (cf. tabella I di I), un'equazione esattamente del tipo della (43) può essere scritta per una qualsiasi delle funzioni suddette.

E' possibile quindi trattare il problema della bisezione in maniera del tutto generale, cercando le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 2Vz^3 - 2z - V = 0 \quad (44)$$

ove z rappresenta una delle sei FTG di argomento metà, e V una opportuna funzione di argomento intero, secondo la corrispondenza indicata nella tabella V.

TABELLA V

z	V	D
a	$-S$	$\frac{1}{T}$
t	$\frac{1}{T}$	$-S$
$-s$	A	T
$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{S}$	$\frac{1}{A}$
$\frac{1}{t}$	T	A
$-\frac{1}{s}$	$\frac{1}{A}$	$-\frac{1}{S}$

L'equazione (44) si risolve con le tecniche standard e fornisce

$$z = \frac{1}{2} (\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2} + \sqrt{U_3} - V) \quad (45)$$

ove

$$\begin{aligned}
 U_1 &= V^2 + 2^{2/3} D \\
 U_2 &= V^2 + 2^{2/3} D e^{2i\pi/3} \\
 U_3 &= V^2 + 2^{2/3} D e^{-2i\pi/3}
 \end{aligned}$$

e i segni dei radicali vanno scelti in modo da avere

$$\sqrt{U_1} \sqrt{U_2} \sqrt{U_3} = 2 - V^3 = 1 + D^3 \quad (46)$$

Nelle formule precedenti D indica quella particolare FTG legata a V dalla relazione $V^3 + D^3 = 1$, e che è riportata, per ciascuno dei casi in esame, nell'ultima colonna della tabella V.

Convieni ora sviluppare la (45) nel caso in cui l'argomento x sia reale: questo impone che anche z sia reale e implica una certa restrizione nella scelta dei segni dei radicali, nel senso che quelli di $\sqrt{U_2}$ e $\sqrt{U_3}$ devono essere necessariamente concordi (e quello di $\sqrt{U_1}$ resta determinato dalla (46)). In questo modo le soluzioni della (44) si riducono da quattro a due, in accordo con il fatto che, sull'asse reale, dati i valori delle FTG nel punto x , si hanno due punti indipendenti a cui si possono applicare le formule di bisezione (precisamente, $\frac{x}{2}$ e $\frac{x}{2} + \frac{3m}{2}$).

La soluzione (45) in questo caso si riduce a

$$z = \frac{1}{2} \left(\epsilon \sqrt{V^2 + 2^{2/3} D} \pm \sqrt{2 \sqrt{V^4 - 2^{2/3} V^2 D + 2^{4/3} D^2 + 2V^2 - 2^{2/3} D} - V} \right) \quad (41)$$

ove ϵ (uguale a $+1$ o -1) rappresenta il segno del secondo membro della (46), il doppio segno caratterizza le due soluzioni possibili, e il radicale che figura sotto radice nella (47) (e che, per x reale, non si annulla mai) va sempre preso col segno positivo.

Conviene ora specificare l'espressione della (47) nei casi particolari delle varie FTG, cercando di rendere quanto più è possibile le varie formule omogenee tra loro. Con un po' d'algebra, si arriva al seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2T} (\sqrt{D_1} - \sqrt{B_1} + A) \\
 t &= \frac{1}{2T} (\sqrt{D_0} + \sqrt{B_0} - 1) \\
 s &= \frac{1}{2} (-\sqrt{D_1} + \sqrt{B_1} + A) \\
 \frac{1}{s} &= \frac{1}{2A} (\sqrt{D_0} + \sqrt{B_0} + 1) \\
 \frac{1}{a} &= -\frac{1}{2A} (\sqrt{D_2} + \sqrt{B_2} + T) \\
 \frac{1}{t} &= \frac{1}{2} (\sqrt{D_2} + \sqrt{B_2} - T)
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

con

$$\begin{aligned}
 D_0 &= 1 - 2^{2/3} AT & ; & \quad D_1 = A^2 + 2^{2/3} T; & \quad D_2 = T^2 + 2^{2/3} A \\
 B_0 &= 2\sqrt{1 + 2^{2/3} AT + 2^{4/3} A^2 T^2 + 2^{2/3} AT} \\
 B_1 &= 2\sqrt{A^4 - 2^{2/3} A^2 T + 2^{4/3} T^2 + 2A^2 - 2^{2/3} T} \\
 B_2 &= 2\sqrt{T^4 - 2^{2/3} T^2 A + 2^{4/3} T^2 + 2T^2 - 2^{2/3} A}
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

I segni dei radicali sono scelti in modo da assicurare il comportamento corretto delle funzioni intorno a $x = 0$. Variando x (sia nel verso positivo che in quello negativo) le funzioni D_0, D_1, D_2 presentano degli zeri doppi e dei poli doppi. In corrispondenza di ciascuno di essi, il radicale deve cambiare segno. Invece le tre funzioni B presentano solo po-

li doppi; in corrispondenza di ciascuno di essi il radicale deve cambiare segno. Il radicale che figura nella definizione delle B si mantiene sempre positivo.

In questo modo si coprono tutti i possibili casi sull'asse reale (si ritrovano gli stessi risultati solo quando $\frac{x}{2}$ è variato di $3m$, cioè x è variato di $6m$).

E' chiaro che le sei funzioni definite dalle (49) sono strettamente correlate tra loro; tuttavia non sembra possibile esprimere esplicitamente in modo semplice le relazioni intercorrenti tra esse. Invece dalle (48) si possono trovare facilmente delle relazioni lineari tra FTG di argomento metà, i cui coefficienti sono FTG di argomento intero. Tali relazioni legano tra loro particolari coppie di FTG di argomento metà, e sono sintetizzabili nelle tre formule seguenti:

$$\frac{a}{S} + \frac{s}{A} = \frac{A}{s} - T t = \frac{S}{a} - \frac{1}{Tt} = 1 \quad (50)$$

Le relazioni (50) non sono indipendenti: con facili passaggi si può infatti trasformarle l'una nell'altra.

§ III.2.- Formule di trisezione.

Il problema della trisezione dell'argomento delle FTG di ordine 3 può essere trattato in modo abbastanza diretto. Benché il metodo seguito valga per qualunque scelta di tale argomento, tuttavia conviene discutere in dettaglio soltanto il caso di argomento reale.

Combinando le formule di duplicazione (I-52) e quelle di addizione (I-50) e (I-51) si possono facilmente ottenere le formule di triplicazione (l'argomento delle funzioni a secondo membro è x):

$$\begin{aligned}
 A(3x) &= - \frac{3AT(1-A^3T^3)}{T^9+3T^6-6T^3+1} \\
 T(3x) &= \frac{T^9-6T^6+3T^3+1}{T^9+3T^6-6T^3+1} \\
 S(3x) &= - \frac{3AT(1-A^3T^3)}{T^9-6T^6+3T^3+1}
 \end{aligned} \tag{51}$$

Di queste equazioni, la più conveniente per essere invertita è la seconda: da essa si deduce che la quantità $T^3\left(\frac{x}{3}\right) = z$ soddisfa la seguente equazione di terzo grado, contenente $T \equiv T(x)$ come parametro:

$$z^3(1-T) - 3z^2(2+T) + 3z(1+2T) + (1-T) = 0 \tag{52}$$

Per T reale, la (52) ha tre soluzioni reali. È facile vedere che, per la periodicità $3m$ di T , esse corrispondono, oltre che a $T^3\left(\frac{x}{3}\right)$, anche a $T^3\left(\frac{x}{3} + m\right) = -S^3\left(\frac{x}{3}\right)$, e a $T^3\left(\frac{x}{3} - m\right) = \frac{1}{A^3}\left(\frac{x}{3}\right)$. La risoluzione completa della (52) quindi permette di trattare simultaneamente la trisezione di tre delle sei funzioni base già considerate (le altre tre si otterranno in maniera immediata alla fine di questo paragrafo).

La soluzione della (52) può essere interpretata più facilmente esprimendo T in termini delle funzioni di Weierstrass di tipo equianarmonico con $g_3 = 1$, attraverso le formule (I-46) che qui riportiamo:

$$\frac{A(x)}{1-T(x)} = \wp\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|0,1\right); \quad \frac{1+T(x)}{1-T(x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\wp'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|0,1\right) \tag{53}$$

in modo da ottenere, dalla seconda delle (53), la (52) sotto la forma:

$$z^3 - \frac{3}{2}(1-\sqrt{3}\wp')z^2 - \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}\wp')z + 1 = 0 \tag{54}$$

(ove, come fatto d'abitudine anche in I, l'argomento e i parametri

delle funzioni di Weierstrass si sono omissi).

La soluzione della (54) con i metodi standard fornisce le seguenti espressioni per le tre soluzioni u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3} \wp') + 2\sqrt{3} \wp^{3/2} \cos \frac{\phi}{3} \\ u_2 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3} \wp') + 2\sqrt{3} \wp^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ u_3 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3} \wp') + 2\sqrt{3} \wp^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

ove
$$\operatorname{tg} \phi = - \frac{1}{\wp},$$

Consideriamo ora i valori di x reali, positivi e prossimi a zero, e conveniamo di prendere $\phi = 0$ quando $x = 0$, e il segno positivo per il radicale $\wp^{3/2}$. In questo caso è facile vedere che la soluzione u_1 corrisponde a $1/A^3(\frac{x}{3})$, u_2 a $-S^3(\frac{x}{3})$, u_3 a $T^3(\frac{x}{3})$. Facendo crescere x fino a $3m$ e oltre, benché le funzioni di Weierstrass, per $x > 3m$, riprendano gli stessi valori di prima, ϕ invece che valori intorno a zero ora assume valori intorno a π , così che u_1, u_2, u_3 non riproducono i valori precedenti. Tuttavia, affinché le tre soluzioni (55) corrispondano sempre alle stesse FTG, è necessario che $\wp^{3/2}$ cambi segno ogni volta che x passa attraverso un multiplo di $3m$. In questo modo le FTG di argomento trisecato sono definite lungo un intero periodo, e riassumono i loro valori iniziali solo quando x varia di tre periodi, cioè di $9m$.

Riesprimendo ora \wp e \wp' in termini di FTG tramite le (53), si ottengono così le prime tre equazioni (56). Le altre tre si ricavano immediatamente prendendo il complemento a 1 delle soluzioni (55)²⁴⁾.

24) Ciò equivale a scrivere le (55) stesse cambiando segno a \wp' e alla determinazione del radicale $\wp^{3/2}$.

In questo modo si arriva al seguente quadro completo delle formule di trasformazione (come già detto, il segno indicato davanti al radicale è quello valido per $0 \leq x < 3 m$, e si prende $\phi = 0$ per $x=0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^3} \left(\frac{x}{3} \right) &= \frac{2+T}{1-T} + 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \frac{\phi}{3} \\ S^3 \left(\frac{x}{3} \right) &= - \frac{2+T}{1-T} - 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ T^3 \left(\frac{x}{3} \right) &= \frac{2+T}{1-T} + 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{S^3} \left(\frac{x}{3} \right) &= \frac{1+2T}{1-T} + 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \frac{\phi}{3} \\ \frac{1}{T^3} \left(\frac{x}{3} \right) &= - \frac{1+2T}{1-T} - 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ A^3 \left(\frac{x}{3} \right) &= - \frac{1+2T}{1-T} - 2\sqrt{3} \left[\frac{A}{1-T} \right]^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \tag{56}$$

con
$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{3} \frac{1 - T}{1 + T}$$

L'ulteriore estrazione di radice cubica per ottenere a primo membro le FTG di argomento $x/3$ non crea alcun problema di determinazione, perché sia i poli che gli zeri di tutte le (56) sono tripli (essi si hanno solo nei punti ove A e T divergono, come è più facilmente ricavabile dalle formule di tipo (55)). Per valori reali di x , va dunque sempre presa la radice aritmetica.



L'Autore di questo studio ringrazia vivamente il Prof. G. ANDREASSI per l'interesse mostrato in questo lavoro.