# UN TEOREMA DI PUNTO FISSO PER TRASFORMAZIONI SU UNO SPAZIO UNIFORME DI HAUSDORFF CON UNA ITERATA CONTRATTIVA IN OGNI PUNTO (*)

Vincenzo CONSERVA(**)

SUMMARY.- *A theorem of fixed point for mappings on Hausdorff uniform spaces is shwon. As a consequence, the generalized Banach contraction principle of* CHENG-MING LEE *([2]: Teorema 1) is obtained.*

Introduzione. Sia $E$ un insieme non vuoto e sia $P$ una famiglia non vuota di pseudometriche su $E$ tale che la famiglia $(S(p,r))_{p\in P, r\in R_+^*}$ (1) risulta sub-base per una struttura uniforme di Hausdorff su $E$, dove

$$S(p,r) = \{(x,y) \in E \times E \mid p(x,y) < r\}$$

Sia inoltre, $T$ una trasformazione di $E$ in $E$. In un recente lavoro ([2]) CHENG-MING LEE prova il seguente risultato. Se $E$ è sequenzialmente completo (cioé ogni successione di Cauchy in $E$ converge) e se è verificata la seguente condizione:

(BRS) Per ogni $x \in E$ esiste $n(x) \in N$ e per ogni $p \in P$, esiste una funzione $\lambda_p : R_+ \to [0,1)$ monotona decrescente in $R_+^*$ tale che, per ogni fissato $x \in E$, la seguente disuguaglianza

$$p(T^{n(x)} x, T^{n(x)} y) \leq \lambda_p(p(x,y)) \cdot p(x,y)$$

valga per ogni $y \in E$ e per ogni $p \in P$, allora $T$ ha un unico punto fisso

---

(*) Entrato in redazione il

(**) Indirizzo dell'autore: Istituto di Analisi Matematica - Via Nicolai,2
70121 - B A R I

(1) Qui e nel seguito si pone $R_+^* = ]0,+\infty)$, $R_+ = [0,+\infty)$ mentre con $N$ si denota l'insieme degli interi naturali.

u in E e per ogni $x \in E$ si ha $\lim_n T^n x = u$ .

Nel successivo n. 1 di questa Nota il risultato precedente viene generalizzato sostituendo alla condizione (BRS) le seguenti due ipotesi:

(1) Per ogni $x \in E$ esiste $n(x) \in N$ tale che per ogni $p \in P$ e quale che sia $y \in E$ si abbia

$$p(T^{n(x)}x,\ T^{n(x)}y) \leq \psi_p(p(x,y))$$

dove, per ogni $p \in P$, $\psi_p$ è una funzione di $R_+$ in $R_+$ monotona crescente, continua a destra e tale che $\psi_p(t) < t$ per ogni $t > 0$,

(2) Esiste $y \in E$ tale he per ogni $p \in P$ esista $\delta \in R_+^*$ per il quale si abbia $\max_{i \leq n(y)} p\,(y,T^i y) < \delta - \psi_p(\delta)$.

Nel n. 2 il teorema così ottenuto viene esaminato nel caso degli spazi metrici completi. Si ottiene un teorema di punto fisso del quale il Teorema 1 di A. A. IVANOV ([5]) ed il Teorema 2 di J. MATKOWSKI ([6]) sono un caso particolare. Quindi, restando in questo contesto, la successiva ipotesi $(2)_1$, (cfr. Osservazione 1) è utilizzata per ottenere un ulteriore teorema di punto fisso del quale il Teorema 1 di J.MATKOWSKI ([6]) è un caso particolare. Un esempio che prova l'effettiva generalizzazione che si ottiene sostituendo nel teorema di CHENG-MING LEE alla condizione (BRS) le ipotesi (1) e (2) è indicato, sempre nel caso degli spazi metrici completi, nel n. 3. Per quanto concerne la terminologia qui adoperata si è seguito il libro di KELLEY ([4]).

n.1 - Si stabiliscono, preliminarmente, i seguenti Lemmi:

LEMMA 1.- Sia $\psi : R_+ \to R_+$ monotona crescente, continua a destra e tale che per ogni $t \in R_+^*$ si abbia $\psi(t) < t$. Posto $\psi^\circ(t) = t$ $\psi^r(t) = \psi(\psi^{r-1}(t))$ risulta $\lim_n \psi^n(t) = 0$ per ogni $t > 0$.

Dim.- Sia $t_n = \psi^n(t)$ e sia $C = \lim_n t_n$. Se fosse $0 < C$, essendo $t_{n+1} = \psi(t_n)$, per la continuità a destra di $\psi$ si avrebbe

$C = \psi(C) < C$. Pertanto $C = 0$.

LEMMA 2 - <u>Sia</u> $(E,d)$ <u>uno spazio pseudometrico. Allora, se</u> $T$ <u>è una trasformazione di</u> $E$ <u>in</u> $E$, <u>se</u> $\psi : R_+ \to R_+$ <u>è una funzione monotona crescente e sono verificate le seguenti due condizioni</u>

(1) <u>Per ogni</u> $x \in E$ <u>esiste</u> $n(x) \in N$ <u>tale che per ogni</u> $y \in E$ <u>si abbia</u> $d(T^{n(x)}x, T^{n(x)}y) \leq \psi(d(x,y))$;

(2) Esiste $y \in E$ tale che, posto $\beta = \max_{i \leq n(y)} d(y,T^i y)$, esista $\delta \in R_+^*$ per il quale si abbia $\beta < \delta - \psi(\delta)$. Allora $\sup_n d(y,T^n y) < +\infty$.

<u>Dim.</u>- Sia $r \in N$, $0 \leq r < n(y)$ e si ponga $d_k = d(y,T^{k\cdot n(y)+r}y)$ per ogni $k = 0,1,\dots$ . Si ponga

$$j = \min\{i \in N \mid \delta \leq d_i\}$$

Evidentemente per ogni $i < j$ si ha $d_i < \delta$. D'altra parte, a causa della monotonia di $\psi$, si ha

$$\delta \leq d_j = d(y,T^{j\cdot n(y)+r}y) \leq d(y,T^{n(y)}y) + d(T^{n(y)}y,T^{n(y)}(T^{(j-1)\cdot n(y)+r}y))$$

$$\leq \beta + \psi(d(y,T^{(j-1)\cdot n(y)+r}y)) = \beta + \psi(d_{j-1}) \leq \beta + \psi(\delta)$$

donde $\delta - \psi(\delta) \leq \beta$ condizione questa che contrasta con la scelta di $\delta$ Pertanto, essendo $d_o \leq \beta < \delta$ e, quindi anche $d_o < \delta$, si ha $d_k < \delta$ per ogni $k = o,1,\dots$

<u>OSSERVAZIONE</u> 1.- La validità del LEMMA 2 appena dimostrato resta se, ferme le altre ipotesi, si sostituisce la condizione (2) con una qualunque delle seguenti due condizioni:

$(2)_1$ Esiste $y \in E$ tale che, posto $\beta = \max_{i \leq n(y)} d(y, T^i y)$, si abbia

$$\beta < \lim_{t \to +\infty}{}' \, (t - \psi(t)),$$

$(2)_2$ La funzione $t - \psi(t)$ sia non limitata per $t \to \infty$

Si passa a dimostrare il

TEOREMA 1. - Sia $E$ un insieme non vuoto e sia $P$ una famiglia non vuota di pseudometriche su $E$ tale che la famiglia $(S(p,r))_{p \in P, r \in R^*_+}$ risulti sub-base per una struttura uniforme di Hausdorff su $E$ e sia $T$ una trasformazione di $E$ in sé. Allora se $E$ è sequenzialmente completo e sono verificate le ipotesi (1) e (2) (cfr. Introduzione), $T$ ha unico punto fisso $u$ in $E$ e per ogni $x \in E$ si ha $\lim_n T^n x = u$.

Dim.-Sia $y \in E$ quello previsto in (2) e si consideri la successione $(T^n y)_{n \in N}$. Posto $y_0 = y$, $m_0 = n(y_0)$ e per ogni $n \in N$, $1 \leq n$, $y_n = T^{m_{n-1}} y_{n-1}$ $m_n = n(y_n)$, resta definita per ricorrenza la successione $(y_n)_{n \in N}$ la quale risulta una sottosuccessione di Cauchy della $(T^n y)_{n \in N}$.
Basta dimostrare che per $p \in P$ ed $\varepsilon \in R^*_+$ si ha $p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) < \varepsilon$ per ogni $k \in N$ ed $n$ sufficientemente grande. A tal fine, sia $n \in N$ e si ponga $p_i = p(y_{n-i}, T^{m(k)} y_{n-i})$ per $i = 0,1,\dots,n$, dove $m(k) = m_{n+1} + m_{n+2} + \dots + m_{n+k}$.

Risulta

$$p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) = p(T^{m_n} y_n, T^{m_n}(T^{m(k)} y_n))^{(1)} \leq \psi_p(p(y_n, T^{m(k)} y_n)) = \psi_p(p_0)$$

---

(1) Invero, ragionando per induzione su $k$ si ha che $y_{n+k+1} = T^{m_n}(T^{m(k)} y_n))$

$$p_o = p(y_n, T^{m(k)} y_n) = p(T^{m_{n-1}} y_{n-1}, T^{m_{n-1}}(T^{m(k)} y_{n-1})) \leq \psi_p(p(y_{n-1} T^{m(k)} y_{n-1}))$$

Da ultimo, essendo $\psi_p$ crescente si ha $p(y_{n+1}, y_{n+k+1}) \leq \psi_p^{n+1}(p(y, T^{m(k)} y)) \leq$ $\leq \psi_p^{n+1}(\sup_n p(y, T_y^n))$ con $\sup_n p(y, T_y^n) < +\infty$ (cfr. Lemma 2). Pertanto, a causa del lemma 1, la $(y_n)_{n\in N}$ risulta di Cauchy. Dopo ciò, si ponga

$$u = \lim_n y_n$$

Osservato preliminarmente che per ogni $p \in P$ si ha $p(T^{n(u)} y_n, T^{n(u)} u)$ $\leq \psi_p(p(y_n, u)) < p(y_n, u)$ risulta $\lim_n T^{n(u)} y_n = T^{n(u)} u$ donde, ancora per ogni $p \in P$, $p(T^{n(u)} u, u) = \lim_n p(T^{n(u)} y_n, y_n)$. Ulteriormente se $n \in N$, per ogni $p \in P$, si ha

$$p(T^{n(u)} y_n, y_n) \leq \psi_p(T^{n(u)} y_{n-1}, y_{n-1}) \leq \ldots \leq \psi_p^n(p(T^{n(u)} y, y))$$

$$\leq \psi_p^n(\sup_n p(y, T_y^n))$$

e quindi, ancora a causa dei lemmi 1 e 2, risulta $\lim_n p(T^{n(u)} y_n, y_n) = 0$.

Consegue che per ogni $p \in P$ si ha $p(T^{n(u)} u, u) = 0$ e quindi $T^{n(u)} = u$. Tenendo conto di (1), u è dunque l'unico punto fisso di $T^{n(u)}$ e, quindi, di T. Da ultimo se $x \in E$ e $p \in P$, posto $r(x) = \max_{i \leq n(u)} p(T^i x, u)$, e considerato $n \in N$ tale che $n(u) < n$ nonché $t \in N$ tale che $t \cdot n(u) < n \leq (t+1) \cdot n(u)$, si osservi che

$$p(T^n x, u) \leq \psi_p(p(T^{n-n(u)} x, u)) \leq \ldots \leq \psi_p^t(r(x)).$$

Pertanto, se $n \to \infty$ si ha $\psi_p^t(r(x)) \to 0$ e anche $p(T^n x,u) \to 0$. Consegue che $\lim_n T^n x = u$ e, con ciò, il teorema è completamente dimostrato.

n. 2- Una immediata conseguenza del Teorema 1 è il seguente

COROLLARIO. Sia $(E,d)$ uno spazio metrico completo e sia $T$ una trasformazione di $E$ in sè. Allora, se $\psi : R_+ \to R_+$ è monotona crescente, continua a destra e tale che $\psi(t) < t$ per ogni $t > 0$, non appena valgano le seguenti due condizioni

(1) Per ogni $x \in E$ esiste $n(x) \in N$ tale che $d(T^{n(x)}x, T^{n(x)}y) \leq \psi(d(x,y))$ quale che sia $y \in E$,

(2) esiste $y \in E$ tale che, posto $\beta = \max_{i \leq n(y)} d(y,T^i y)$, esista $\delta \in R_+^*$ tale che $\beta < \delta - \psi(\delta)$,

$T$ ha un unico punto fisso $u$ e per ogni $x \in E$ si ha $\lim_n T^n x = u$.

Osservazione 2 - Sostituendo a (2) del Corollario precedente l'ipotesi che $t - \psi(t)$ sia non limitata per $t \to \infty$ si ottiene il risultato di A.A. IVANOV al quale si è accennato nell'introduzione [5, Teorema 1]. Questo notoriamente generalizza teoremi analoghi di L.F. GUSEMAN ([3]) e di V.M.SEHGAL ([7]).

Osservazione 3 - Sostituendo a (2) del Corollario precedente l'ipotesi che $\lim_{t\to+\infty} (t-\psi(t)) = +\infty$ si ottiene, invece, il Teorema 2 di J. MATKOWSKI ([6]).

Per concludere si presenta la preannunciata versione di un risultato dovuto a J. MATKOWSKI. Sussiste il

TEOREMA 2 - Sia $(E,d)$ uno spazio metrico completo, sia $T$ una trasformazione di $E$ in sè e siano $\alpha : R_+^5 \to R_+$ e $\psi(t)=\alpha(t,t,t,2t,2t)$ per ogni $t \geq 0$. Supposto, allora, che siano verificate le seguenti condizioni

(1) $\alpha$ è crescente rispetto a tutte le variabili,

(2) $\lim_n \psi^n(t) = 0$ per ogni $t > 0$,

(3) per ogni $x \in E$, esiste $n(x) \in N$ tale che $d(T^{n(x)}x, T^{n(x)}y) \leq$

$\alpha(d(x,T^{n(x)}x), d(x,T^{n(x)}y), d(x,y), d(y,T^{n(x)}x), d(y,T^{n(x)}y))$ quale che sia $y \in E$,

(4) esiste $y \in E$ tale che, posto $\beta = \max_{i \leq n(y)} d(y,T^i y)$, si abbia

$$\beta < \lim_{t \to +\infty}{}' (t-\psi(t))$$

$T$ ha un unico punto fisso $u$ in $E$ e per ogni $x \in E$ si ha $\lim_n T^n x = u$.

Dim.- Basta osservare che la successione $(T^n y)_{n \in N}$ è limitata e contiene una sottosuccessione di Cauchy.

Osservazione 4 - E' appena il caso di osservare che la (4) del Teorema 2 è banalmente verificata non appena si supponga vera la (2)(cioé $\lim_{t \to +\infty}(t-\psi(t)) = +\infty$) del Teorema 1 di J. MATKOWSKI.

n. 3- Si premette la seguente

PROPOSIZIONE 1 - Sia $\lambda : R_+ \to [0,1)$ monotona decrescente. Allora esiste una funzione $\psi : R_+ \to R_+$ monotona crescente, continua a destra tale che $\psi(t) < t$ per ogni $t > 0$ ed inoltre per ogni $t \in R_+$ si ha che

$$\lambda(t) \cdot t \leq \psi(t) .$$

Dim.- La funzione $\psi_0(t) = \sup_{s \leq t}(\lambda(s) \cdot s)$ è monotona crescente in $t$, così che la funzione $\psi(r) = \lim_{t \to r^+} \psi_0(t)$ è monotona crescente e continua a destra. Inoltre $\lambda(r) \cdot r \leq \psi_0(r)$, segue, se $r \leq t$, che $\lambda(r) \cdot r \leq \psi_0(t)$ e quindi $\lambda(r) \cdot r \leq \psi(r)$ Da ultimo, sia $r > 0$ e si consideri $\beta$ tale che $0<\beta<r$. Per ogni $s \leq \beta$ si ha che $\lambda(s) \cdot s \leq s \leq \beta$, mentre, essendo $\lambda$ decrescente, per ogni $s \geq \beta$ si ha che $\lambda(s) \cdot s \leq \lambda(\beta) \cdot s$. Pertanto, non appena si osservi che per $r < t$ si ha $\psi_0(t) = \sup_{s \leq t}(\lambda(s) \cdot s) \leq \max(\beta, \lambda(\beta) \cdot t)$, si ricava

$\psi(r) \leq \max(\beta, \lambda(\beta) \cdot r) < r$, cioé $\psi(r) < r$. Con ciò l'asserto è completamente dimostrato.

Osservazione 5 - La Proposizione 1 consente di asserire che ogni funzione definita in $R_+$ del tipo $\lambda(t)\cdot t$, con $\lambda$ funzione definita in $R_+$ ed a valori in $[0,1)$ decrescente, può essere superata da una funzione $\psi$ tel tipo di quelle utilizzate in questa Nota.

Viceversa sia $\psi : R_+ \to R_+$ monotona crescente, continua a destra e tale che $\psi(t) < t$ per ogni $t > 0$. Si supponga che esista $\lambda : R_+ \to [0,1)$ monotona descrescente tale che $\psi(t) \leq \lambda(t)\cdot t$ per ogni $t \in R_+$. Avendosi $t\cdot(1-\lambda(t)) \leq t - \psi(t)$, per $t \to +\infty$ deve risultare $t - \psi(t) \to +\infty$. Ma ciò non sempre è compatibile con la scelta di $\psi$ (per esempio se $\psi$ è tale che $\lim'_{t\to+\infty}(t - \psi(t)) < +\infty$. Quanto detto giustifica lo scopo di questa Nota.

Infine si presenta un esempio di spazio metrico e di una trasformazione su di esso per mostrare quanto preannunciato in fine dell'Introduzione. Sia, a tal fine, $N_1 = N - \{1\}$ e si consideri $E = [0,1] \cup N_1$. Su $E$ si definisca

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x,y \in [0,1] \\ x + y & \text{se uno di } x,y \notin [0,1] \end{cases}$$

Risulta $(E,d)$ uno spazio metrico completo (cfr. Esempio del n. 3 di [1]). Sia $T$ una trasformazione di $E$ in se definita come segue:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } x \in [0,1] \\ x - 1 & \text{se } x \in N_1 \end{cases}$$

Se si definisce

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ t - \frac{1}{2} & \text{se } 1 < t \end{cases}$$

$\psi$ risulta essere una funzione crescente di $R_+$ in $R_+$ continua a destra e tale che $\psi(t) < t$ per ogni $t > 0$. Se $n \in N$, si osservi che

$$T^n x = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\cdot x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ -\frac{1}{2^{n-x}} & \text{se} \quad x \in N_1 \wedge x \leq n \\ x-n & \text{se} \quad x \in N_1 \wedge n < x \end{cases}$$

Pertanto, non appena per ogni $x \in E$ si assuma come $n(x)$ un qualunque intero naturale, se $x$ e $y \in [0,1]$ si ha

$$d(T^{n(x)}x,\ T^{n(x)}y) = |T^{n(x)}x - T^{n(x)}y| = \frac{1}{2^{n(x)}}|x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y| = \psi(d(x,y));$$

se, invece, $x \in N_1$ si ha

$$d(T^{n(x)}x\ ,T^{n(x)}y) = \begin{cases} x - n(x) + T^{n(x)}y \leq x + y-1 & \text{se} \quad n(x) < x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \psi(d(x,y)) & \\ \left|T^{n(x)}y - \frac{1}{2^{n(x)-x}}\right| \leq x + y-1 & \text{se} \quad x \leq n(x) \end{cases}$$

Ne consegue che $d(T^{n(x)}x,\ T^{n(x)}y) \leq \psi(d(x,y))$ quale che sia $y \in E$. Comunque, quando $n \to \infty$, $d(T^{n(o)}n,0)/_{d(n,0)} \to 1$, così che non può esserci una funzione decrescente $\lambda$ definita in $R_+$ ed a valori in $[0,1)$ per la quale si possa avere $d(T^{n(x)}x,\ T^{n(x)}y) \leq \lambda(d(x,y))\cdot d(x,y)$ quale che sia $y \in E$.

*Accettato per la pubblicazione su proposta di*
*Mario Pugliesi e Giuseppe Muni*