1. Operatori differenziali.

1.0 In questo paragrafo esporremo alcune proprietà degli operatori differenziali che saranno utili per la costruzione dell'operatore di Eulero-Lagrange.

1.1. Siano (E,p,M), (F,q,M) due fibrati vettoriali sulla stessa base M.

Definizione: Un operatore differenziale sulle sezioni E a valori nelle sezioni di F è un'applicazione

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

dallo $\mathcal{F}(M)$-modulo delle sezioni di E nello $\mathcal{F}(M)$-modulo delle sezioni di F, tale che:

i) D é $\mathbb{R}$-lineare

ii) esiste un omomorfismo di fibrati vettoriali sull'identità di M

$$\sigma(D) : T^{*}M \otimes E \to F$$

tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$ e ogni $s \in \Gamma(E)$

$$D(fs) = f\, Ds + \sigma(D)\,(df \otimes s)$$

1.2. Esempio: Sia M una varietà, ∇ una connessione su M.

Prendiamo $E \equiv F \equiv TM$, ∇ induce un operatore

$$\nabla_X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \quad , \quad \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$$

per ogni campo $X \in \mathcal{X}(M)$.

∇_X è un operatore differenziale e $\sigma(\nabla_X)$ è la contrazione di una 1-forma con il campo X, cioé

$$\sigma(\nabla_X)(df \otimes Y) = df(X)Y = (X.f)Y \ .$$

1.3. L'omomorfismo $\sigma(D)$ induce uno ed un sol omomorfismo

$$\tau(D) : E \to TM \otimes F$$

che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
T^*M \otimes E \arrow[rr, "id_{T^*M} \otimes \tau(D)"] \arrow[dr, "\sigma(D)"'] & & T^*M \otimes TM \otimes F \arrow[dl, "C \otimes id_F"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

dove C indica la contrazione canonica di $T^*M \otimes TM$

Esistenza e unicità di $\tau(D)$ sono subito viste in termini di calcolo locale.

Sia ∂_μ una base locale di $\Gamma(TM)$ e dx^μ la base duale di $\Gamma(T^*M)$, $\bar{e}_i$ e $\bar{f}_j$ due basi locali rispettivamente per le sezioni di E e per quelle F, potremo scrivere

$$\sigma(D)(dx^\mu \otimes \bar{e}_i) = \sigma_i^{\mu j}\bar{f}_j$$

posto $$\tau(D)(\bar{e}_i) = \tau_i^{\mu j}\, \partial_\mu \otimes \bar{f}_j$$

dal diagramma commutativo abbiamo

$$\begin{tikzcd}
dx^\mu \otimes \bar{e}_i \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & dx^\mu \otimes \tau_i^{\nu j}\partial_\nu \otimes \bar{f}_j \arrow[d] \\
\sigma_i^{\mu j}\, \bar{f}_j \arrow[r, phantom, "="] & \delta_\nu^\mu\, \tau_i^{\nu j}\, \bar{f}_j
\end{tikzcd}$$

quindi la condizione $\sigma_i^{\mu j} = \tau_i^{\mu j}$ garantisce l'esistenza e l'unicità di $\tau(D)$.

1.4. Diamo ora una formulazione intrinseca della formula di integrazione per parti.

Sia $\beta \in \Gamma(F^* \otimes \Lambda^m T^*M)$ una m-forma su M a valori nelle sezioni di F^* ed e una sezione di E. Indicheremo con

$$\tau(D)\ e\ \lrcorner\ \beta$$

la m-1-forma su M a valori in $\mathbb{R}$ ottenuta tramite le contrazioni

$$TM \otimes F \otimes F^* \otimes \Lambda^m T^* M \longrightarrow \Lambda^{m-1} T^* M$$

$$\xi \otimes \bar{f} \otimes \underline{f} \otimes \alpha \longmapsto \langle \bar{f} \,.\, \underline{f} \rangle\, i_\xi \alpha$$

Sia D un operatore differenziale la cui espressione locale in un punto $x \in M$ sia data da

$$D(e^i \bar{e}_i) = e^i d_i^j \bar{f}_j + \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial ei}{\partial x^\mu} \bar{f}_j$$

la m-forma $< D\ e, \beta >$ avrà espressione locale

$$< D\ e, \beta > = \beta_j (e^i d_i^j + \frac{\partial e^i}{\partial x^\mu} \sigma_i^{\mu j})\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \quad .$$

Sia U un aperto di M dominio di una carta $\phi = (x^\mu)$ di M e A una sottovarietà di dimensione m = dim M, compatta con bordo inclusa in U. Calcoliamo l'integrale

$$\int_A < D\ e, \beta > \int_{\phi(A)} \beta_j (e^i d_i^j + \frac{\partial e^i}{\partial x^\mu} \sigma_i^{\mu j}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m =$$

che possiamo scrivere

$$= \int_{\phi(A)} e^i (\beta_j d_i^j - \beta_j \frac{\partial\ \sigma_i^{\mu j}}{\partial x^\mu} - \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu})\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m + \int_{\phi(A)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\beta_j e^i \sigma_i^{\mu j}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m =$$

$$= \int_{\phi(A)} e^i (\beta_j d_i^j - \beta_j \frac{\partial\ \sigma^{\mu j}}{\partial x^\mu} - \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m +$$

$$+ \int_{\partial\phi(A)} \sum_\mu \beta_j e^i\ \sigma_i^{\mu j}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \ldots \wedge dx^m .$$

in particolare se e ha supporto compatto in $A°$ l'ultimo integrale è nullo. Definiamo un operatore differenziale

$$D^* : \Gamma(F^* \otimes \Lambda^m T^* M) \to \Gamma(E^* \otimes \Lambda^m T^* M)$$

con la condizione seguente:

per ogni sezione β di $F^* \otimes \Lambda^m T^* M$ e per ogni sezione e di E a supporto compatto sia

$$\int_M \langle D e . \beta \rangle = \int_M \langle e . D^* \beta \rangle .$$

L'esistenza e unicità di questo operatore è garantita dal calcolo locale che abbiamo svolto. L'espressione locale di D^* è data da:

$$D^*(\beta_j \underline{f}^j \otimes dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) =$$

$$=(\beta_j d_i^j - \beta_j \frac{\partial \sigma_i^{\mu j}}{\partial x^\mu} - \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu}) \underline{e}^i \otimes dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m .$$

Tramite D^* si può infine scrivere in forma intrinseca, la formula di integrazione per parti:

$$\langle D e, \beta \rangle = \langle e, D^* \beta \rangle + d(\tau(D)\, e \,\lrcorner\, \beta).$$

1.5. Concludiamo con la definizione e le proprietà della differenziazione verticale.

Sia (E,p,M) un fibrato di base M (non necessariamente vettoriale) indichiamo con vTE il fibrato dei vettori verticali di TE e con v^*TE il suo fibrato duale.

Introduciamo un'antiderivazione sull'algebra esterna delle sezioni di v^*TE

$$d_{E/M} : \Lambda\, v^{*}TM \quad \to \quad \Lambda\, v^{*}TM$$

che soddisfi

i) $d_{E/M}$ è un'autiderivazione di grado 1

ii) $(d_{E/M} f)\xi = \xi.f$ per ogni $f \in \mathcal{F}(E)$ e ogni campo ξ verticale

iii) $d_{E/M}(d_{E/M} f) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{F}(E)$.

Affinché $d_{E/M}$ sia ben definita basta far vedere che le 1-forme dal tipo $d_{E/M} f$ generano l'algebra esterna (localmente) .

Sia (x^{μ},q^{i}) una carta adattata di E, ogni campo verticale si può esprimere con $\xi = \xi^{i} \frac{\partial}{\partial q^{i}}$, $\xi^{i} \in \mathcal{F}(E)$

per la ii) $(d_{E/M} q^{i}) \frac{\partial}{\partial q^{j}} = \frac{\partial q^{i}}{\partial q^{j}} = \delta^{i}_{j}$, cioé le $d_{E/M} q^{i}$ sono la base duale di $\frac{\partial}{\partial q^{i}}$ e quindi generano (localmente) $\Lambda^{1} v^{*}TE$ e di conseguenza l'algebra esterna.

1.6. Avremo in seguito bisogno della formula che segue.

Sia e_{t} una famiglia ad un parametro di sezioni del fibrato E, definiamo $\dot{e}_{o}(x)$ il vettore tangente in $e_{o}(x)$ alla curva

$: \mathbb{R} \to E : t \mapsto e_{t}(x)$

quindi $\dot{e}_{o}(x) \in v\, T_{e_{o}(x)}E$.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ dalla definizione di $d_{E/M}$ si ha:

$$\frac{d}{dt} f \circ e_t(x)\Big|_{t=0} = \langle \dot{e}_\circ(x), (d_{E_{/M}} f) \circ e_\circ(x) \rangle \quad \text{per ogni} \quad x \in M.$$

1.7. Sia (E,p,M) un fibrato vettoriale di fibra tipo F ($\dim F = n$). Indichiamo con $J'(E)$ lo spazio dei jets del 1° ordine di sezioni E. E' noto [2] che esiste una struttura di fibrato affine $(J'(E),\pi,E)$ di $J'(E)$ su E.

Inoltre, indicata con jp la proiezione $jp = p \circ \pi$, $(J'(E),jp,M)$ è un fibrato vettoriale di base M e fibra tipo $F \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,F)$.

Inoltre il rilevamento canonico di una sezione $s \to js$ è un operatore differenziale tra le sezioni di (E,p,M) e le sezioni di $(J^1(E),jp,M)$ (vedi [2], corollario 11, pag. 12).

2. Problema variazionale e operatore di Eulero-Lagrange.

2.0. Definiamo qui un problema variazionale. L'ambiente naturale per un simile problema è lo spazio dei jets di un fibrato. Per tutto ciò che riguarda definizioni e proprietà fondamentali degli spazi di jets si veda [2].

2.1. Definizione.

Si dirà problema variazionale a bordo fisso (P.V.B.F.) il seguente insieme di dati

i) un fibrato (E,p,M) su una varietà M, orientata tramite la m-forma ω

ii) Una sottovarietà compatta di dimensione massima A, con bordo

iii) un'applicazione $\sigma : \partial A \to E$ tale che $p \circ \sigma = id_{\partial A}$ e prolungabile a una sezione $s : M \to E$

iv) una funzione $\mathcal{L}: J'(E) \to \mathbb{R}$ dallo spazio dei jets del prim'ordine di E in $\mathbb{R}$, detta lagrangiana.