Introduzione.

Scopo di questo quaderno è presentare i principi del calcolo delle variazioni in più variabili nel contesto geometrico della teoria dei jets **delle** sezioni di un fibrato.

In particolare si affrontano le condizioni di estremalità per una sezione e si danno due caratterizzazioni di tali sezioni tramite equazioni differenziali indipendenti dal sistema di coordinate.

Queste equazioni sono le equivalenti intrinseche dei classici sistemi di equazioni di Eulero-Lagrange, per la prima condizione, paragrafo 2.6, e di Hamilton, per la seconda, paragrafo 3.10.

Nell'esposizione si è fatto uso di varie proprietà degli spazi di jets. Rimandiamo per questo al quaderno di Modugno-Stefani, [2].

1. Operatori differenziali.

1.0 In questo paragrafo esporremo alcune proprietà degli operatori differenziali che saranno utili per la costruzione dell'operatore di Eulero-Lagrange.

1.1. Siano (E,p,M), (F,q,M) due fibrati vettoriali sulla stessa base M.

Definizione: Un operatore differenziale sulle sezioni E a valori nelle sezioni di F è un'applicazione

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

dallo $\mathfrak{F}(M)$-modulo delle sezioni di E nello $\mathfrak{F}(M)$-modulo delle sezioni di F, tale che:

i) D é $\mathbb{R}$-lineare

ii) esiste un omomorfismo di fibrati vettoriali sull'identità di M

$$\sigma(D) : T^*M \otimes E \to F$$

tale che, per ogni $f \in \mathfrak{F}(M)$ e ogni $s \in \Gamma(E)$

$$D(fs) = f\,Ds + \sigma(D)\,(df \otimes s)$$

1.2. Esempio: Sia M una varietà, ∇ una connessione su M.

Prendiamo $E \equiv F \equiv TM$, ∇ induce un operatore

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \quad , \quad \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$$

per ogni campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

∇_X è un operatore differenziale e $\sigma(\nabla_X)$ è la contrazione di una 1-forma con il campo X, cioé

$$\sigma(\nabla_X)(df \otimes Y) = df(X)Y = (X.f)Y \;.$$

1.3. L'omomorfismo $\sigma(D)$ induce uno ed un sol omomorfismo

$$\tau(D) : E \to TM \otimes F$$

che rende commutativo il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
T^*M \otimes E \arrow[rr, "id_{T^*M} \otimes \tau(D)"] \arrow[dr, "\sigma(D)"'] & & T^*M \otimes TM \otimes F \arrow[dl, "C \otimes id_F"] \\
& F &
\end{tikzcd}
$$

dove C indica la contrazione canonica di $T^*M \otimes TM$

Esistenza e unicità di $\tau(D)$ sono subito viste in termini di calcolo locale.

Sia ∂_μ una base locale di $\Gamma(TM)$ e dx^μ la base duale di $\Gamma(T^*M)$, $\bar{e}_i$ e $\bar{f}_j$ due basi locali rispettivamente per le sezioni di E e per quelle F, potremo scrivere

$$\sigma(D)(dx^\mu \otimes \bar{e}_i) = \sigma_i^{\mu j} \bar{f}_j$$

posto $\qquad \tau(D)(\bar{e}_i) = \tau_i^{\mu j}\, \partial_\mu \otimes \bar{f}_j$

dal diagramma commutativo abbiamo

$$
\begin{tikzcd}
dx^\mu \otimes \bar{e}_i \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & dx^\mu \otimes \tau_i^{\nu j} \partial_\nu \otimes \bar{f}_j \arrow[d] \\
\sigma_i^{\mu j}\, \bar{f}_j \arrow[r, phantom, "="] & \delta^\mu_\nu\, \tau_i^{\nu j}\, \bar{f}_j
\end{tikzcd}
$$

quindi la condizione $\sigma_i^{\mu j} = \tau_i^{\mu j}$ garantisce l'esistenza e l'unicità di $\tau(D)$.

1.4. Diamo ora una formulazione intrinseca della formula di integrazione per parti.

Sia $\beta \in \Gamma(F^* \otimes \Lambda^m T^*M)$ una m-forma su M a valori nelle sezioni di F^* ed e una sezione di E. Indicheremo con

$\tau(D)\ e \ \lrcorner\ \beta$

la m-1-forma su M a valori in $\mathbb{R}$ ottenuta tramite le contrazioni

$$TM \otimes F \otimes F^* \otimes \Lambda^m T^*M \longrightarrow \Lambda^{m-1}T^*M$$

$$\xi \otimes \bar{f} \otimes \underline{f} \otimes \alpha \longmapsto \langle \bar{f} . \underline{f} \rangle\, i_\xi \alpha$$

Sia D un operatore differenziale la cui espressione locale in un punto $x \in M$ sia data da

$$D(e^i \bar{e}_i) = e^i d_i^j \bar{f}_j + \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial e i}{\partial x^\mu} \bar{f}_j$$

la m-forma $\langle D e, \beta \rangle$ avrà espressione locale

$$\langle D e,\beta \rangle = \beta_j (e^i d_i^j + \frac{\partial e^i}{\partial x^\mu} \sigma_i^{\mu j})\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad .$$

Sia U un aperto di M dominio di una carta $\phi = (x^\mu)$ di M e A una sottovarietà di dimensione $m = \dim M$, compatta con bordo inclusa in U. Calcoliamo l'integrale

$$\int_A \langle D e,\beta \rangle \int_{\phi(A)} \beta_j (e^i d_i^j + \frac{\partial e^i}{\partial x^\mu} \sigma_i^{\mu j}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m =$$

che possiamo scrivere

$$= \int_{\phi(A)} e^i (\beta_j d_i^j - \beta_j \frac{\partial\, \sigma_i^{\mu j}}{\partial x^\mu} - \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu})\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m + \int_{\phi(A)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\beta_j e^i \sigma_i^{\mu j}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

$$= \int_{\phi(A)} e^i (\beta_j d_i^j - \beta_j \frac{\partial\, \sigma^{\mu j}}{\partial x^\mu} - \sigma_i^{\mu j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m +$$

$$+ \int_{\partial\phi(A)} \sum_\mu \beta_j e^i \sigma_i^{\mu j}\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^m .$$

in particolare se e ha supporto compatto in A° l'ultimo integrale è nullo. Definiamo un operatore differenziale

$$D^* : \Gamma(F^* \otimes \Lambda^m T^* M) \to \Gamma(E^* \otimes \Lambda^m T^* M)$$

con la condizione seguente:
per ogni sezione β di $F^* \otimes \Lambda^m T^* M$ e per ogni sezione e di E a supporto compatto sia

$$\int_M \langle D e . \beta \rangle = \int_M \langle e . D^* \beta \rangle .$$

L'esistenza e unicità di questo operatore è garantita dal calcolo locale che abbiamo svolto. L'espressione locale di D^* è data da:

$$D^*(\beta_j \underline{f}^j \otimes dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) =$$

$$= (\beta_j d^j_i - \beta_j \frac{\partial \sigma^{\mu j}_i}{\partial x^\mu} - \sigma^{\mu j}_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x^\mu}) \, \underline{e}^i \otimes dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m .$$

Tramite D^* si può infine scrivere in forma intrinseca, la formula di integrazione per parti:

$$\langle D e , \beta \rangle = \langle e , D^* \beta \rangle + d(\tau(D) e \rfloor \beta).$$

1.5. Concludiamo con la definizione e le proprietà della differenziazione verticale.
Sia (E,p,M) un fibrato di base M (non necessariamente vettoriale) indichiamo con vTE il fibrato dei vettori verticali di TE e con v^*TE il suo fibrato duale.

Introduciamo un'antiderivazione sull'algebra esterna delle sezioni di v^*TE

$$d_{E/M} : \Lambda\, v^*TM \rightarrow \Lambda\, v^*TM$$

che soddisfi

i) $d_{E/M}$ è un'autiderivazione di grado 1

ii) $(d_{E/M} f)\xi = \xi . f$ per ogni $f \in \mathcal{F}(E)$ e ogni campo ξ verticale

iii) $d_{E/M} (d_{E/M} f) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{F}(E)$.

Affinché $d_{E/M}$ sia ben definita basta far vedere che le 1-forme dal tipo $d_{E/M} f$ generano l'algebra esterna (localmente) .

Sia (x^μ, q^i) una carta adattata di E, ogni campo verticale si può esprimere con $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, $\xi^i \in \mathcal{F}(E)$

per la ii) $(d_{E/M} q^i) \frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta^i_j$, cioé le $d_{E/M} q^i$ sono la base duale di $\frac{\partial}{\partial q^i}$ e quindi generano (localmente) $\Lambda^1 v^*TE$ e di conseguenza l'algebra esterna.

1.6. Avremo in seguito bisogno della formula che segue.

Sia e_t una famiglia ad un parametro di sezioni del fibrato E, definiamo $\dot{e}_\circ(x)$ il vettore tangente in $e_\circ(x)$ alla curva

$: \mathbb{R} \rightarrow E : t \mapsto e_t(x)$

quindi $\dot{e}_\circ(x) \in v\, T_{e_\circ(x)}E$.

Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dalla definizione di $d_{E/M}$ si ha:

$$\frac{d}{dt} f \circ e_t(x)\Big|_{t=0} = \langle \dot{e}_\circ(x), (d_{E_{/M}} f) \circ e_\circ(x) \rangle \qquad \text{per ogni} \quad x \in M.$$

1.7. Sia (E,p,M) un fibrato vettoriale di fibra tipo F ($\dim F = n$). Indichiamo con $J'(E)$ lo spazio dei jets del 1° ordine di sezioni E. E' noto [2] che esiste una struttura di fibrato affine $(J'(E),\pi,E)$ di $J'(E)$ su E.

Inoltre, indicata con jp la proiezione $jp = p\circ\pi$, $(J'(E),jp,M)$ è un fibrato vettoriale di base M e fibra tipo $F \times \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,F)$.

Inoltre il rilevamento canonico di una sezione $s \to js$ è un operatore differenziale tra le sezioni di (E,p,M) e le sezioni di $(J^1(E),jp,M)$ (vedi [2], corollario 11, pag. 12).

2. Problema variazionale e operatore di Eulero-Lagrange.

2.0. Definiamo qui un problema variazionale. L'ambiente naturale per un simile problema è lo spazio dei jets di un fibrato. Per tutto ciò che riguarda definizioni e proprietà fondamentali degli spazi di jets si veda [2].

2.1. Definizione.

Si dirà problema variazionale a bordo fisso (P.V.B.F.) il seguente insieme di dati

i) un fibrato (E,p,M) su una varietà M, orientata tramite la m-forma ω

ii) Una sottovarietà compatta di dimensione massima A, con bordo

iii) un'applicazione $\sigma : \partial A \to E$ tale che $p \circ \sigma = id_{\partial A}$ e prolungabile a una sezione $s : M \to E$

iv) una funzione $\mathcal{L}: J'(E) \to \mathbb{R}$ dallo spazio dei jets del prim'ordine di E in $\mathbb{R}$, detta lagrangiana.

e dalla richiesta

v) trovare una sezione $\bar{s}$ di E che soddisfi a $\bar{s}_{|\partial A} = \sigma$ e che renda minimo il funzionale

$$I_A[s] = \int_A (js)^* \mathcal{L}\omega$$

rispetto alle sezioni s che soddisfano $s_{|\partial A} = \sigma$.

(con js si indica il rilevamento canonico di s).

2.2. Condizione necessaria affinché una sezione s realizzi un minimo del funzionale I_A è che:

per ogni famiglia ad un parametro s_t di sezioni di E tali che $s_o = s$ su A e $s_t = s$ su ∂A sia

$$\frac{d}{dt} I_A [s_t]\Big|_{t=0} = 0$$

ogni sezione che soddisfa questa condizione si dice un'estremale. Vogliamo indagare sulle condizioni a cui deve soddisfare una sezione estremale.

2.3. Sia s_t una famiglia ad un parametro di sezioni che soddisfa alle condizioni in 2.2.

Chiameremo $\dot{s}_o$ l'applicazione da M in vTE che ad ogni punto $x \in M$ fa corrispondere il vettore tangente alla curva sulla fibra $p^{-1}(x)$

$$t \mapsto s_t(x)$$

nel punto $t = 0$, cioè in $s(x)$.

$\dot{s}_o : M \to vTE$ è una sezione su M, in particolare $\dot{s}_o$ realizza una sezione del fibrato immagine reciproca su M di vTE tramite s

$$\dot{s}_\circ : M \to s^*vTE.$$

Inoltre la condizione $s_t = s$ su ∂A implica che $\dot{s}_\circ = 0$ su ∂A.

D'altra parte se ν è un campo di vettori di s^*vTE è possibile costruire una famiglia (una classe di famiglie) ad un parametro di sezioni per cui $\nu = \dot{s}_\circ$

2.4. Calcoliamo adesso la derivata in 2.2.

$$\frac{d}{dt} I_A[s_t]\Big|_{t=0} = \int_A \frac{d}{dt} \mathcal{L} \circ js_t\Big|_{t=0} \omega =$$

$$= \int_A < \frac{d}{dt} js_t\Big|_{t=0}, (d_{JE/M} \mathcal{L}) \circ js_\circ > \omega$$

in virtù della 1.6.

e quindi la condizione di estremalità fa intervenire il campo vettoriale

$\frac{d}{dt} js_t\Big|_{t=0}$, che, in analogia a quanto detto nel precendente 2.3., è una sezione su M del fibrato vettoriale $js^* v_M TJ^1(E)$, intendendo con $v_M TJ'(E)$ i vettori verticali rispetto alla proiezione jp.

2.5. L'ultimo passo per la costruzione dell'operatore di Eulero-Lagrange è far vedere il legame tra $\frac{d}{dt} js_t\Big|_{t=o}$ e $\dot{s}_\circ$

$\dot{s}_\circ$ è una sezione di s^*vTE, possiamo rilevarla canonicamente una sezione $j\dot{s}_\circ$ di $J^1(s^*vTE)$.

D'altra parte i fibrati vettoriali su M $J^1(s^*vTE)$ e $js^*(v_M TJ'(E))$ sono canonicamente isomorfi tramite l'applicazione che manda

$$\frac{d}{dt} js_t\Big|_{t=0} \to j\left(\frac{d}{dt} s_t\Big|_{t=0}\right)$$

(la verifica in termini di coordinate locali è un semplice scambio nell'ordi-
ne di derivazione)
quindi possiamo scrivere la condizione di estremalità

$$\int_A < j\dot{s}_\circ ,\, d_{JE_{/M}} \mathcal{L} \circ js_\circ > \omega = 0$$

Ciò equivale a dire:
una sezione s è un estremale per il funzionale I_A se e solo se per ogni sezione ν di $s^* vTE$ a supporto compatto in A si ha

$$\int_A < j\nu \,,\, d_{JE_{/M}} \mathcal{L} \circ js > \omega = 0$$

2.6. L'operatore $\nu \mapsto <j\nu \,,\, d_{JE_{/M}} \mathcal{L} \circ js>$ è composto da un operatore differenziale (il rilevamento canonico j , vedi 1.7) e un operatore lineare. E' quindi un operatore differenziale $\mathcal{P}[s]$ a valori reali.
Per quanto è stato detto in 1.4., esiste allora un operatore differenziale

$\varepsilon[s] : \Gamma(\Lambda^m T^* M) \to \Gamma((s^* vTE)^* \otimes \Lambda^m T^* E)$

tale che

$$\int_A \mathcal{P}[s]\, \nu\, \omega = \int < \nu \,,\, \mathcal{E}[s]\omega >$$

per ogni sezione ν di $s^* vTE$ a suporto compatto in A .

La condizione di estremalità è quindi

$$\int_A < \nu, \mathcal{E}[s]\omega > = 0 \qquad \forall\ \nu \in \Gamma(s^* vTE) \quad \text{supp}\ \nu \subset A$$

Per la linearità rispetto a ν e l'arbitrarietà di ν questo equivale a

$$\mathcal{E}[s]\,\omega = 0 \,.$$

Siamo così arrivati a una equazione differenziale che caratterizza le sezioni estremali.

L'operatore $\mathcal{E}$ prende il nome di operatore di Eulero-Lagrange e l'equazione $\mathcal{E}[s]\omega = 0$ è la versione intrinseca del classico sistema di equazioni di Lagrange per l'estremali.

In un sistema di coordinate adattato, supposto $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ avremo

$$d_{JE/M}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)d_{JE/M}\, q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)d_{JE/M}\, q^i_\mu$$

da cui

$$\mathcal{T}[s]\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)\nu^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\nu^i$$

essendo $\nu = \nu^i \frac{\partial}{\partial q^i}(s)$

ne segue

$$< \nu, \mathcal{E}[s]\ \omega > = \nu^i \ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

e infine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right)$$

3. La forma di Poincaré-Cartan.

3.1. Proposizione: Esiste una forma canonica Θ su $J'(E)$ a valori nel modulo delle sezioni di $\pi^* vTE$.

Dimostrazione

Sia $\bar{v} \in T_{j_x s}(J^1(E))$ un vettore dello spazio tangente a $J'(E)$ in $j_x s$

$w = d\pi_{j_x s}(\bar{v}) - d\, s_x(djp_{j_x s}\bar{v})$ è un vettore di $T_{s(x)}E$

ovviamente $dp_{s(x)}(w) = 0$ quindi w è un vettore verticale di $T_{s(x)}E$.

Resta da far vedere che w non dipende dalla sezione s ma solo da $j_x s$: anche questo è evidente poiché se $j_x s = j_x s' \Longleftrightarrow ds_x = ds'_x$.

Poniamo $w = \theta(j_x s(\bar{v})$

θ è quindi una 1-forma su $J'(E)$ a valori in $\pi^* vTE$.

Scegliendo un sistema di coordinate adottato abbiamo

$$\theta = (dq^j - q^j_\mu dx^\mu) \otimes \frac{\partial}{\partial q^j} .$$

3.2. θ permette di caratterizzare i rilevamenti canonici

Proposizione. Sia $\bar{s} : U \to J'(E)$ una sezione di $J'(E)$ su un aperto $U \subset M$.

$$\bar{s} = j(\pi \circ \bar{s}) \text{ se e solo se } \theta_{|js(U)} = 0 .$$

La dimostrazione segue immediatamente dall'espressione locale di θ.

3.3. Sia $\mathcal{L} : J'(E) \to \mathbb{R}$ una funzione sui jets.

Ricordiamo che $\pi : J'(E) \to E$ è un fibrato affine, cioè ogni fibra $J'_e(E)$ su $e \in E$ è uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $p^*_e T^* M \otimes (vT_e E)$, [2] .

Se restringiamo $\mathcal{L}$ a una fibra $\pi^{-1}(e)$ possiamo farne la derivata indotta dalla struttura affine, [3].

Sia $j_x s \in \pi^{-1}(e)$, indichiamo con $D\mathcal{L}(j_x s)$ questa derivata nel punto $j_x s$.

$D\mathcal{L}$ è quindi un'applicazione da $J'(E)$ nel duale del suo fibrato vettoriale associato.

$$D\mathcal{L} : J'(E) \to p^* TM \otimes_E (vTE)^* .$$

In coordinate adattate $D\mathcal{L}(j_x s) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(j_x s) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dq^i$.

$D\mathcal{L}$ si chiama trasformata di Legendre indotta da $\mathcal{L}$

3.4. Sia $\bar{v} \in T_{j_x s} J^1(E)$ posto $w = \Theta(\bar{v}) \in v\, T_e E$, $e = \pi(j_x s) = s(x)$, possiamo contrarre il vettore w con il tensore $D\mathcal{L}(j_x s)$ rispetto alla contrazione di dualità di $vT_e E$.

Otteniamo così un vettore di $T_x M$ che indichiamo con $\mathcal{L}^\wedge \bar{v}$.
Se Z è un campo vettoriale di $J^1(E)$ l'applicazione

$$j_x s \mapsto \mathcal{L}^\wedge Z(j_x s)$$ è una sezione del fibrato vettoriale $(jp)^* TM$,

che indichiamo con $\mathcal{L}^\wedge Z$.

La sua espressione in coordinate è

$$\mathcal{L}^\wedge = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu} (dq^i - q^i_\nu dx^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

3.5. Sia ω una m-forma su M. Costruiamo tramite $\mathcal{L}^\wedge$ una m-forma su $J^1(E)$, che chiameremo $\mathcal{L}^\wedge \omega$, secondo la formula

$$\mathcal{L}^\wedge \omega(Z_1,\ldots,Z_m) = \sum_i \omega(T_{jp}(Z_1),\ldots,\mathcal{L}^\wedge(Z_i),\ldots,T_{jp}(Z_m)) .$$

La sua espressione locale è $\mathcal{L}^\wedge \omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu} (dq^i - q^i_\nu dx^\nu) \wedge \Omega_\mu$

dove $\Omega_\mu = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \ldots \wedge dx^m$.

3.6. Definizione. Si dice m-forma di Poincaré-Cartan di un problema variazionale la

$$\textcircled{H} = \mathcal{L}^\wedge \omega + \mathcal{L}(jp)^* \omega$$

dove $\mathcal{L}$ è la Lagrangiana del problema e ω l'orientazione di M.

3.7. Proposizione. per ogni sezione s di $E, (js)^* \textcircled{H} = (js)\mathcal{L}\omega$

Basta mostrare che $(js)^* \hat{\mathcal{L}}\, \omega = 0$;

infatti $(js)^* \hat{\mathcal{L}}\omega\, (X_1,\dots,X_m) =$

$$= \hat{\mathcal{L}}\, \omega(T_j s\, X_1,\dots,T_j s\, X_m) =$$

$$= \sum_i \omega\, (X_1,\dots \hat{\mathcal{L}} T_j s\, X_i,\dots X_m)$$

ma $\hat{\mathcal{L}} T_j s\, X_i$ è la contrazione del tensore $D\mathcal{L} \circ js$ con il vettore

$\Theta(T_j s\, X_i)(x) = \Theta|_{j_x s}\; d\, j\, s(x) X_i(x) = 0$ per ogni $x \in M$.

3.8. Come conseguenza della 3.7. si ha che se $s : M \to E$ è una sezione

$$I_A[s] = \int_A (js)^* \textcircled{H}$$

Quindi una sezione s è estremale se e solo se

$$\frac{d}{dt} \int_A (js_t)^* \textcircled{H} = 0$$

per ogni famiglia s_t tale che $s_\circ = s$ su A e $s_t = s$ su ∂A.

Calcolando la derivata abbiamo

$$\int_A \frac{d}{dt} (js_t)^* \textcircled{H} = \int_A L_{\frac{d}{dt}(js_t)|_{t=0}} \textcircled{H} =$$

$$= \int_A i_{\frac{d}{dt}(js_t)|t=0}\, d\,\textcircled{H} + \int_{\partial A} i_{\frac{d}{dt}(js_t)|_{t=0}} \textcircled{H} =$$

$$= \int_A i_{\frac{d}{dt}(js_t)|t=0} \textcircled{H}$$

Ricordando quanto detto in 2.5 e per l'arbitrarietà di s_t si ha:

Proposizione: Una sezione s è estremale se e solo se per ogni sezione

$$\nu \in \Gamma(s^* vTE) \quad \text{si ha ,} \quad [3], :$$

$$i_{j\nu}\, d\,H \Big|_{js(A)} = 0.$$

3.9. Sia ora $u : M \to J'(E)$ una sezione. Definiamo un nuovo funzionale:

$$I_A[u] = \int_A u^* H$$

e andiamo a cercare le sezioni estremali di I_A tra tutte le sezioni di $J'(E)$ su A che assumono un determinato valore su ∂A.

Come abbiamo visto per $I_A[s]$, ciò significa

$$\frac{d}{dt} I_A[u_t]\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{per ogni famiglia di sezioni} \quad u_t \quad \text{di}$$

$J'(E)$ su M tale che $u_o = u$ su A e $u_t = u$ su ∂A.

Ripetendo i calcoli di 3.8 abbiamo immediatamente l'equazione a cui deve soddisfare una sezione critica u.

u è una sezione critica di I_A se e solo se per ogni campo jp-verticale $\xi(\xi \in \Gamma(v_M T\, J'(E)))$ si ha

$$u^*(i_\xi\, d\,H) = 0 .$$

3.10. Confrontando i problemi posti in 3.8 e 3.9 è naturale chiedersi quale sia la differenza tra loro.

In 3.9, u è una generica sezione di $J'(E)$, e non necessariamente un rilevamento canonico di una sezione di E.

Poniamo la domanda: sotto quali condizioni una soluzione di 3.9 è soluzione di 3.8?

Cioé, sotto quali condizioni una soluzione di 3.9 verifica l'equazione $j(\pi \circ u) = u$?

Teorema [1]: Se la trasformata di Legendre $D\mathcal{L} : J'(E) \to p^*TM \otimes_E (vTE)^*$ è un'immersione, allora l'equazione $u^*(i_\xi d \textcircled{H}) = 0$ per ogni campo ξ jp-verticale è equivalente alle condizioni $u = j(\pi \circ u)$, $\mathcal{E}[\pi \circ u]\ \omega = 0$.

Dim. Da quanto si è visto in 3.8, basta far vedere che l'equazione in 3.9 implica, in questo caso, $u = j(\pi \circ u)$.

Per semplicità effettuiamo la dimostrazione utilizzando un sistema di coordiante adattato (x^μ, q^i, q^i_μ).

Basta considerare i campi π-verticali che avranno espressione locale

$\xi = \xi^i_\mu \dfrac{\partial}{\partial q^i_\mu}$: otteremo così

$$i_\xi\, d\textcircled{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^j_\eta (dq^i - q^i_\nu\, dx^\nu) \wedge \Omega_\mu$$

$$\Omega_\mu = (-1)^{\mu-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \ldots \wedge dx^m$$

da cui

$$u^*(i_\xi d\textcircled{H}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^j_\eta \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - u^i_\nu \right) dx^\nu \wedge \Omega_\mu =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^i_\eta \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - u^i_\mu \right) = 0$$

avendo posto $u = (x^\mu, u^i, u^i_\mu)$

dall'arbitrarietà di ξ segue

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta \, \partial q^i_\mu} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - u^i_\mu \right) = 0$$

ma $D\mathcal{L}$ è un immersione quindi $\det\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta \, \partial q^i_\mu} \right) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} = u^i_\mu \quad \text{cioé} \quad u = j(\pi \circ u) \; .$$

Riferimenti bibliografici.

[1] H. Goldschmidt - S. Steinberg. *The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23,1 (1973), 203-267

[2] M.Modugno - G. Stefani *Some Results on Jet-Bundle*. Quad. Università di Lecce - 1978

[3] R. Ouzilon *Expression symplective des problèmes variationals*, Symposia Math. XIV 85 (1974)

[4] R. Hermann *Vector Bundle in Mathematical Physics*, Benjamin, New York, 1970

[5] P.L. Garcia *The Poincaré-Cartan Invariant in the Calculus of Variation*, Symposia Math. XIV, 219 (1974)