In un precedente lavoro dal titolo "Sui fondamenti analitici per l'applicazione del metodo degli invarianti ortogonali ad un problema di autovalori per una equazione ellittica" ci siamo serviti dei risultati di due teoremi di rappresentazione per operatori differenziali, dovuti a T. Boggio [2]. Ci sembra interessante formulare e dimostrare direttamente per gli operatori che intervengono nel suddetto lavoro analoghi teoremi di rappresentazione per tutti i possibili casi che si possono presentare, negli spazi funzionali ivi usati.

A tal fine poniamo : $L_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y}$, $L_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y}$,con γ_1 e $\gamma_2 \in C$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Sia B un dominio di R^2 per cui esiste $z_\circ \in B$ con la proprietà che per ogni z di B esiste una spezzata di estremi $z_\circ$ e z tutta contenuta in B.

Assegnata la funzione $\phi \in H_2(B)$,consideriamo il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} L_1 v = \phi \\ \\ L_2 v = 0 \end{cases} \qquad \text{in } B,$$

nell'incognita v.

Sussiste il seguente

LEMMA I

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (1) abbia soluzione,è che $L_2\phi = 0$ in B.

Infatti,se v soddisfa il sistema (1),tenendo conto della permutabilita' degli operatori L_1 e L_2, si ha $L_2\phi = L_2L_1v = L_1L_2v = 0$.

Viceversa sia $L_2\phi = 0$. Esplicitando L_1 e L_2 il sistema (1) si scrive

$$(1') \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial y} = \phi \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Pertanto,essendo $\gamma_1 \neq \gamma_2$, si ha :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\phi \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\phi \,. \end{cases}$$

Il problema di vedere se esiste una funzione v soddisfacente il sistema (2) equivale a stabilire se è un differenziale esatto la forma differenziale :

$$(3)\qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\phi dx + \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\phi dy \,.$$

Tenendo conto dell'ipotesi fatta su B, risulta che la forma differenziale (3) è un differenziale esatto se si ha :

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\phi = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\phi \,.$$

Orbene, dall'ipotesi $L_2\phi = 0$, si deduce $\frac{\partial\phi}{\partial x} - \gamma_2\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, dalla quale, evidentemente, consegue la (4).

Il lemma è così dimostrato.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA I

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $u \in H_2(B)$ *sia soluzione di* $L_1L_2u = 0$ *in* B, *è che esistano* u_1 *e* u_2 *soluzioni rispettivamente di* $L_1u = 0$ *e* $L_2u = 0$, *tali che* $u = u_1 + u_2$.

La condizione è necessaria.

Infatti, supponendo che la funzione u, appartenente ad $H_2(B)$, sia soluzione di $L_1L_2u = 0$ in B, posto $\phi = L_1u$, risulta $L_2\phi = 0$.

Consideriamo il sistema

$$(5)\qquad \begin{cases} L_1 v = \Phi \\ L_2 v = 0 \end{cases} \quad \text{in } B.$$

Poichè $L_2\Phi = 0$, per il lemma I il sistema (5) ammette soluzione,ossia esiste u_2 tale che

$$(6)\qquad \begin{cases} L_1(u - u_2) = 0 \\ L_2 u_2 = 0 \end{cases} \quad \text{in } B.$$

Posto $u_1 = u - u_2$,risulta $u = u_1 + u_2$ e $L_1 u_1 = L_2 u_2 = 0$.

La necessità della condizione è così provata.

Viceversa è ovvio che ,se u_1 e u_2 sono tali che $L_1 u_1 = 0$ e $L_2 u_2 = 0$, la funzione $u = u_1 + u_2$ è soluzione di $L_1 L_2 u = 0$.

Il teorema è così dimostrato.

Sia ora $L = L_1 L_2 \ldots L_m$, con gli L_h,per $h = 1,2,\ldots,m$,dati dalla (6) di pagina 2, e tali che $L_h \neq L_k$ per $h \neq k$.

Sussiste il seguente

TEOREMA II

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $u \in H_m(B)$ sia soluzione di $Lu = 0$ in B,è che esistano $u_1, u_2, \ldots u_m$,soluzioni, in B ,rispettivamente di $L_1 u = 0, \ldots, L_m u = 0$, tali che $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$.

Dimostrazione per induzione.

Il teorema è vero per $m = 2$ (Teorema I).

Dimostriamo che, ammesso che il teorema sia vero per n $(n < m)$ degli m operatori dati, esso è vero per $n+1$.

A tale scopo sia u tale che

$$L_1 L_2 \dots L_{n+1} u = 0.$$

Posto $\Phi = L_1 u$, risulta $L_2 L_3 \dots L_{n+1} \Phi = 0$.

Per l'ipotesi induttiva, esistono $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$ tali che $L_2 \Phi_2 = 0$, $L_3 \Phi_3 = 0, \dots, L_{n+1} \Phi_{n+1} = 0$ e $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{n+1}$

Consideriamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} L_1 v = \Phi_2 \\ L_2 v = 0 \end{cases} \text{in } B; \qquad \begin{cases} L_1 v = \Phi_3 \\ L_3 v = 0 \end{cases} \text{in } B; \dots\dots \qquad \begin{cases} L_1 v = \Phi_{n+1} \\ L_{n+1} v = 0 \end{cases} \text{in } B.$$

Poiché $L_2 \Phi_2 = L_3 \Phi_3 = \dots = L_{n+1} \Phi_{n+1} = 0$, per il lemma I, esistono $u_2, u_3, \dots, u_{n+1}$ tali che u_i è soluzione, in B, di

$$\begin{cases} L_1 u_i = \Phi \\ L_i u_i = 0 \end{cases} \qquad i = 2,3,\dots n+1.$$

Posto $u_1 = u - (u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1})$, risulta

$$L_1 u_1 = L_1 u - (L_1 u_2 + L_1 u_3 + \dots + L_1 u_{n+1}) =$$
$$= \Phi - (\Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{n+1}) = 0 .$$

e $$u = u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} .$$

Viceversa, se le u_i sono tali che $L_i u_i = 0$, per $i = 1,2,\dots n+1$, è evidente che $u = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n+1}$ è soluzione di

$L_1 L_2 \ldots\ldots L_{n+1} u = 0$.

<u>Osservazione</u>

E' facile constatare che il teorema sopra dimostrato sussiste anche per $L^* = L_1^* L_2^* \ldots\ldots L_m^*$, con gli L_h^* dati dalle (7) di pag. 2 e $L_h^* \neq L_k^*$ per $h \neq k$.

Sia ancora $L = \frac{\partial}{\partial x} - \gamma \frac{\partial}{\partial y}$ uno dei nostri operatori L_h oppure L_h^*.

Sussiste il seguente <u>LEMMA</u>

II. <u>Condizione necessaria e sufficiente affinchè</u> $u \in H_2(B)$ <u>sia soluzione di</u> $L^2 u = 0$ <u>in B, è che si abbia</u> $u = xu_1 + u_2$, <u>dove</u> u_1 <u>e</u> u_2 <u>sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata all'operatore L, cioè tali che</u> $Lu_1 = Lu_2 = 0$ <u>in B.</u>

Osserviamo intanto che

$$(7) \qquad L(xu) = xLu + u.$$

Se u_1 ed u_2 sono tali che $Lu_1 = Lu_2 = 0$, si ha :

$$L^2(xu_1 + u_2) = L(L(xu_1) + Lu_2) = L(xLu_1 + u_1) = Lu_1 = 0.$$

Viceversa, se $L^2 u = 0$, posto $u_1 = Lu$ e $u_2 = u - xu_1$, risulta :

$$Lu_1 = L^2 u = 0$$

$$Lu_2 = Lu - L(xu_1) = u_1 - xLu_1 - u_1 = 0.$$

Il lemma è così dimostrato.

Consideriamo ora l'equazione

$$L^{p+1}u = 0 \quad \text{in } B, \qquad \text{con} \quad p \geq 1.$$

Osserviamo intanto che per ogni $p \in N$ e per ogni u tale che $L\,u = 0$, si ha

$$L^p(x^p u) = p!u \tag{8}$$

Infatti, la (8) è vera per $p = 1$, come si deduce dalla (7). Ammesso che sia vera per p, si ha

$$L^{p+1}(x^{p+1}u) = L^p(L(x^{p+1}u)) =$$

$$= L^p((p+1)x^p u + x^{p+1}L\,u) =$$

$$= (p+1)L^p(x^p u) = (p+1)\cdot p!u = (p+1!u$$

La (8) è così dimostrata.

Sussiste, inoltre, il seguente <u>TEOREMA</u>

III <u>Condizione necessaria e sufficiente affinché</u> $u \in H_{p+1}(B)$ <u>sia soluzione di</u> $L^{p+1}u = 0$ <u>in</u> B <u>è che si abbia</u>

$$u = x^p u_o + v$$

<u>dove</u> u_o <u>e</u> v <u>sono tali che</u> $L\,u_o = 0$ <u>e</u> $L^p v = 0$ in B.

Sia u soluzione di $L^{p+1}u = 0$; posto

$$u_o = \frac{L^p u}{p!} \qquad \text{e} \qquad v = u - x^p u_o$$

ne viene

$$L\,u_o = \frac{1}{p!}L^{p+1}u = 0$$

$$L^p v = L^p u - L^p(x^p u_o) = p!u_o - p!u_o = 0 .$$

La necessità della condizione è così provata.

Viceversa, dato $u = x^p u_o + v$, con $Lu_o = 0$ e $L^p v = 0$, si constata facilmente che

$$L^{p+1}u = L(L^p(x^p u_o)) + L(L^p v) = L(p!u_o) = 0.$$

Il teorema è così dimostrato.

Dal teorema III segue che :

IV. Tutte e sole le soluzioni di $L^{p+1}u = 0$ in B, sono date da

$$u = x^p u_o + x^{p-1}u_1 + \ldots\ldots + xu_{p-1} + u_p$$

essendo le u_i $(i = 0,1,\ldots\ldots,p)$ soluzioni in B dell'equazione omogenea associata all'operatore L.

LEMMA III

Sia $\phi \in H_1(B)$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema

$$(9) \qquad \begin{cases} L_1^p v = \phi \\ L_2 v = 0 \end{cases}$$

abbia soluzione è che $L_2\phi = 0$.

Dimostrazione.

La necessità è ovvia.

Per dimostrare la sufficienza osserviamo che, per il Lemma I, esiste v_1 tale che

$$(10)\quad \begin{cases} L_1 v_1 = \phi \\ L_2 v_1 = 0 \end{cases}$$

Pertanto il Lemma è vero per $p = 1$.

Supponiamo che esso sia vero per h $(h < p)$,ossia che esista v_h tale che

$$(11)\quad \begin{cases} L_1^h v_h = \phi \\ L_2 v_h = 0 \end{cases} .$$

Per il Lemma I esiste v_{h+1} tale che

$$(12)\quad \begin{cases} L_1 v_{h+1} = v_h \\ L_2 v_{h+1} = 0 \end{cases} .$$

Applicando l'operatore L_1^h ai due membri della prima delle (12) si ha, tenendo presenti le (11),

$$\begin{cases} L_1^{h+1} v_{h+1} = L_1^h v_h = \phi \\ L_2 v_{h+1} = 0. \end{cases}$$

Quindi,per induzione il Lemma III è dimostrato.

Dimostriamo,ora,il seguente

<u>LEMMA IV</u>

<u>Sia</u> $\phi \in H_q(B)$.

<u>Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema</u>

$$(13)\quad \begin{cases} L_1^p v = \phi \\ L_2^q v = 0 \end{cases}$$

<u>abbia soluzioni è che</u> $L_2^q\phi = 0$.

La necessità è ovvia.

Per dimostrare la sufficienza, sia $L_2^q\phi = 0$. Per il Teorema IV, si ha

$$\phi = x^{q-1}\phi_1 + x^{q-2}\phi_2 + \ldots\ldots + x\phi_{q-1} + \phi_q \,, \tag{14}$$

con

$$L_2\phi_1 = L_2\phi_2 = \ldots\ldots\ldots = L_2\phi_q = 0 \,.$$

Osserviamo preliminarmente che, posto

$$v = x^{q-1}v_1 + x^{q-2}v_2 + \ldots\ldots + xv_{q-1} + v_q$$

si ha :

$$L_1^p v = x^{q-1}L_1^p v_1 + x^{q-2}L_1^p v_2 + \ldots\ldots + xL_1^p v_{q-1} + L_1^p v_q + \omega \tag{15}$$

dove ω dipende unicamente da $v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}$ e da L_1.

Ciò premesso consideriamo i sistemi :

$$\begin{cases} L_1^p v_1 = \phi_1 \\ L_2 v_1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} L_1^p v_2 = \phi_2 \\ L_2 v_2 = 0 \end{cases} ; \ldots\ldots \quad \begin{cases} L_1^p v_{q-1} = \phi_{q-1} \\ L_2 v_{q-1} = 0 \end{cases} .$$

Essi ammettono soluzione poichè

$$L_2\phi_1 = L_2\phi_2 = \ldots\ldots = L_2\phi_{q-1} = 0.$$

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}$ soluzioni, rispettivamente, di ciascuno di detti sistemi. Calcolato ω in corrispondenza di tali funzioni, consideriamo l'ulteriore sistema

$$\begin{cases} L_1^p v_q = \phi_q - \omega \\ L_2 v_q = 0 \end{cases} . \tag{17}$$

Esso ha soluzione poichè $L_2(\phi_q - \omega) = 0$.

Detta v_q una tale soluzione,poniamo

$$v = x^{q-1}v_1 + x^{q-2}v_2 + \ldots\ldots + xv_{q-1} + v_q \ .$$

Si ha $L_2^q v = 0$;inoltre,tenendo presenti le (15),(16),(14) e (17), risulta:

$$L_1^p v = x^{q-1}L_1^p v_1 + x^{q-2}L_1^p v_2 + \ldots\ldots + xL_1^p v_{q-1} + L_1^p v_q + \omega =$$
$$= x^{q-1}\phi_1 + x^{q-2}\phi_2 + \ldots\ldots\ldots + x\phi_{q-1} + \phi_q = \phi \ .$$

Il Lemma è così dimostrato.

Posto $\mathcal{D}_1 = L_1^p$ e $\mathcal{D}_2 = L_2^q$,dal Lemma IV consegue il seguente

TEOREMA V

Tutte e sole le soluzioni dell'equazione $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 u = 0$ sono date da

$$u = u_1 + u_2$$

dove u_1 e u_2 sono tali che $\mathcal{D}_1 u_1 = \mathcal{D}_2 u_2 = 0$