4. ESISTENZA DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA (1),(2), CON IL METODO DELLE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE.

Con le stesse ipotesi del teorema precedente e con il medesimo significato per T e per S, poniamo:

$$z_o = (z_{1,0}, z_{2,0}) = (u_o, u_1);$$

$$z_{n+1} = Tz_n = (z_{1,n+1}, z_{2,n+1}) \qquad \text{per } n = 0,1,2,\dots.$$

Tenendo presente il significato di T si ha:

$$(10)\quad \begin{cases} z_{1,1} = \displaystyle\int_0^x u_1 dt + u_o \\ z_{2,1} = -\dfrac{1}{a_2}\left\{ \displaystyle\int_0^x u_o \psi(t)dt + a_1 \int_0^x u_1 dt + \int_0^x u_o d\xi \int_0^\xi u_o \phi\left(\frac{t}{\xi}\right)dt \right\} + u_1, \end{cases}$$

e, in generale

$$(11)\quad \begin{cases} z_{1,n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x z_{2,n}(t)dt + u_o \\ z_{2,n+1}(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left\{ \displaystyle\int_0^x \psi(t)\cdot z_{1,n}(t)dt + a_1 \int_0^x z_{2,n}(t)dt + \int_0^x z_{1,n}(\xi)d\xi \int_0^\xi \phi\left(\frac{t}{\xi}\right) z_{1,n}(t)dt \right\} + u_1 \end{cases}$$

Dalle (10), (11), si ha

$$(12)\quad\begin{cases} z_{1,1}(x) - z_{1,0}(x) = \displaystyle\int_o^x u_1 dt \\ z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)= -\dfrac{1}{a_2}\left\{ \displaystyle\int_o^x u_o\psi(t)dt+a_1\int_o^x u_1 dt+ \int_o^x u_o d\xi\int_o^\xi u_o\phi\,(\frac{t}{\xi})dt\right\} \end{cases}$$

$$(13)\quad\begin{cases} z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)= \displaystyle\int_o^x\left[z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)\right]dt \\ z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)= -\dfrac{1}{a_2}\left\{ \displaystyle\int_o^x\left[z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)\right]\psi(t)dt+a_1 \int_o^x\left[z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)\right]dt\right. \end{cases}$$

$$\left.+\int_o^x\left[z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)\right]d\xi\int_o^\xi \phi(\frac{t}{\xi})z_{1,n}(t)dt+\int_o^x z_{1,n-1}(\xi)d\xi\int_o^\xi\left[z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)\right]\cdot \phi(\frac{t}{\xi})dt\right\} .$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di inversione di Dirichlet, le (13) diventano:

$$(14)\quad\begin{cases} z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)= \displaystyle\int_o^x [z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)]dt \\ z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left\{ \displaystyle\int_o^x [z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)]\psi(t)dt+a_1\int_o^x [z_{2,n}(t)-\right. \end{cases}$$

$$-z_{2,n-1}(t)]dt+\int_o^x [z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)]d\xi \int_o^\xi \phi(\frac{t}{\xi})z_{1,n}(t)dt+ \int_o^x [z_{1,n}(\xi) -$$

$$\left.- z_{1,n-1}(\xi)]d\xi \int_\xi^x \phi(\frac{\xi}{t})z_{1,n-1}(t)dt\right\}$$

Pertanto, dalle (12) e dalle (14) si ha

$$(15)\quad\begin{cases} |z_{1,1}(x)-z_{1,0}(x)| \leq \int_0^x |u_1|dt \\ |z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)| \leq \frac{1}{|a_2|}\left\{\int_0^x |u_o|\cdot|\psi(t)|dt+|a_1| \int_0^x |u_1|dt+\right. \end{cases}$$

$$\left.+\int_0^x |u_o|d\xi \int_0^\xi |u_o|\cdot|\phi(\tfrac{t}{\xi})|dt\right\},$$

$$(16)\quad\begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq \int_0^x |z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)|dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \frac{1}{|a_2|}\left\{ \int_0^x |z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)|\cdot|\psi(t)|dt+|a_1| \int_0^x |z_{2,n}(t)-\right. \end{cases}$$

$$-z_{2,n-1}(t)|dt+ \int_0^x |z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)|d\xi \int_0^\xi |\phi(\tfrac{t}{\xi})|\cdot|z_{1,n}(t)|dt+\int_0^x |z_{1,n}(\xi) -$$

$$\left.-z_{1,n-1}(\xi)|d\xi \int_\xi^x |\phi(\tfrac{\xi}{t})|\cdot|z_{1,n-1}(t)|dt\right\}$$

e successivamente

$$(17)\quad\begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq \int_0^x \|z_n(t)-z_{n-1}(t)\|dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \int_0^x \left[\frac{1}{|a_2|}|\psi\ (\xi)|+ \frac{|a_1|}{|a_2|} + \frac{1}{|a_2|} \int_0^\xi |\phi(\tfrac{t}{\xi})|\cdot|z_{1,n}(t)|dt + \right. \end{cases}$$

$$+\ \frac{1}{|a_2|}\int_{\xi}^{x_0}\left|\phi\left(\frac{\xi}{t}\right)\right|\cdot|z_{1,n-1}(t)|dt\Big]\cdot\|z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)\|d\xi$$

dove $\|z_n(x)-z_{n-1}(x)\| = \max\left\{|z_{1,n}(x)-z_{1,n-1})|, |z_{2,n}(x)-z_{2,n-1}(x)|\right\}.$

Sia $a = \max\left\{1, \frac{1}{|a_2|}, \frac{|a_1|}{|a_2|}\right\}.$

Dalle (15) risulta

$$(18)\quad \begin{cases} |z_{1,1}(x)-z_{1,0}(x)| \leq a\cdot|u_1|\displaystyle\int_0^x dt \\ |z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)| \leq a\cdot|u_0|\displaystyle\int_0^x|\psi(t)|dt+a|u_1|\int_0^x dt+a|u_0|^2\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}\left|\phi\left(\frac{t}{\xi}\right)\right|dt \end{cases}$$

Analogamente, dalle (17) si ha

$$(19)\quad \begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq a\displaystyle\int_0^x\|z_n(t)-z_{n-1}(t)\|dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \displaystyle\int_0^x\Big\{a|\psi(\xi)| + a + a\,R\int_0^{\xi}\left|\phi\left(\frac{t}{\xi}\right)\right|dt+ \end{cases}$$

$$+\ a\,R\int_{\xi}^{x_0}\left|\phi\left(\frac{\xi}{t}\right)\right|dt\Big\}\cdot\|z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)\|\cdot d\xi$$

Poniamo:

$$h(x) = a\cdot|u_o| \int_0^x |\psi(t)|\,dt + a\cdot|u_1| \int_0^x dt + a\cdot|u_o|^2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi |\phi(\frac{t}{\xi})|\,dt,$$

$$g(x) = a|\psi(x)| + a + a\,R \int_0^x |\phi(\frac{t}{x})|\,dt + a\,R \int_x^{x_o} |\phi(\frac{x}{t})|\,dt$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Dalle (18) e dalle (19) consegue

$$(20) \qquad ||z_1(x) - z_o(x)|| \leq h(x)$$

$$(21) \qquad ||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \int_0^x G'(\xi)\cdot||z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)||\,d\xi;\ n=1,2,3,\ldots$$

Dimostriamo che

$$(22) \quad ||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \frac{[G(x)]^n}{n!}\cdot h(x) - \int_0^x \frac{[G(\xi)]^n}{n!}\,h'(\xi)d\xi$$

La (22) è vera per $n=1$. Infatti per la (21) e la (20)

$$||z_2(x)-z_1(x)|| \leq \int_0^x G'(\xi)||\,z_1(\xi)-z_o(\xi)||\,d\xi \leq$$

$$\leq \int_0^x G'(\xi)\cdot h(\xi)d\xi = G(x)h(x) - \int_0^x G(\xi)\cdot h'(\xi)d\xi \quad .$$

Ammesso vero che

$$||z_n(x)-z_{n-1}(x)|| \leq \frac{[G(x)]^{n-1}}{(n-1)!} \cdot h(x) - \int_0^x \frac{[G(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!} \cdot h'(\xi)d\xi ,$$

dalla (21), tenendo presente che $h'(x) > 0$, risulta

$$||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \int_0^x G'(\xi) \frac{[G(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!} \cdot h(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{[G(x)]^n}{n!} \cdot h(x) - \int_0^x \frac{[G(\xi)]^n}{n!} \cdot h'(\xi)d\xi .$$

Indicati con L e M due numeri reali positivi tali che $G(x) \leq L$ e $h(x) \leq M$ per $0 \leq x \leq x_o$, dalla (22) risulta

$$||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \frac{L^n}{n!} \cdot M .$$

Pertanto la serie

$$z_o + \{z_1(x)-z_o\} + \{z_2(x)-z_1(x)\} + \ldots\ldots..$$

la cui n+1-esima somma parziale è $z_n(x)$, è totalmente convergente in $[0,x_o]$.

Sia $z(x)$ la somma di tale serie.

Risulta $z \in S$.

Ripetendo il medesimo ragionamento fatto per pervenire alla (21), si ottiene:

$$||z_{n+1}(x)-Tz(x)|| \leq \int_0^x g(\xi)\cdot||z_n(\xi)-z(\xi)||d\xi$$

Pertanto $z_n \xrightarrow{n} T\,z$ e quindi, poiché $z_n \xrightarrow{n} z$, si ha $Tz = z$, ossia z è soluzione del sistema (3),(4).

Infine, posto $z = (z_1,z_2)$, la funzione $u(x) = z_1(x)$ è soluzione del problema (1), (2).