$$g(x) = \frac{1}{|a_2|}\left\{\int_0^x |u_\circ-\bar{u}_\circ|\cdot|F(x,t)|dt+\int_0^x |\bar{z}_1(t)|\cdot|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|dt\right\}+|u_1-\bar{u}_1|$$

dalla II^a delle (7) si ha

$$|z_2(x)-\bar{z}_2(x)| \leq \int_0^x |z_2(\xi) - \bar{z}_2(\xi)| \ \lambda(\xi)d\xi + g(x).$$

Per il lemma di Gronwall generalizzato, risulta

$$(8)\qquad |z_2(x) - \bar{z}_2(x)| \leq |u_1-\bar{u}_1|\exp\left\{\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\right\} +$$

$$+\int_0^x \left(\frac{1}{|a_2|}\left\{|u_\circ-\bar{u}_\circ|\cdot|F(x,t)|+|\bar{z}_1(t)|\cdot|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|\right\}\exp\left\{\int_t^x \lambda(\xi)d\xi\right\}\right)dt.$$

Dalla (8), ponendo $u_\circ = \bar{u}_\circ$, $u_1 = \bar{u}_1$, $\psi(t)\equiv\bar{\psi}(t)$, risulta

$$z_2(x) = \bar{z}_2(x) \qquad 0 \leq x \leq x_\circ ,$$

e, per la I^a delle (7)

$$z_1(x) = \bar{z}_1(x) \qquad 0 \leq x \leq x_\circ .$$

Pertanto è dimostrato che:

I) <u>il problema</u> (3),(4), <u>ammette in</u> $C^1([0,x_\circ])$ <u>al più una soluzione</u>.

2. <u>DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI.</u>

Sussiste il seguente teorema:

II) <u>se esistono</u> $R > 0$ <u>e</u> $x_\circ > 0$, <u>tali che, dati</u> $u_\circ, u_1$ <u>e</u> $\psi(x)$, <u>con</u> $|u_\circ| \leq R$, $|u_1| \leq R$, $\psi(x) \in C^\circ([0,x_\circ])$, <u>esiste la soluzione</u> $u(x) \in C^2([0,x_\circ])$ <u>di</u> (1),(2), <u>e sia tale che</u> $|u(x)| \leq R$, $0 \leq x \leq x_\circ$, <u>allora</u> $u(x)$ <u>dipende</u>

<u>con continuità dai dati.</u>

Siano $u(x)$ e $\bar{u}(x)$ soluzioni di (1), (2) con i dati rispettivamente u_0, u_1, $\psi(x)$ e $\bar{u}_0, \bar{u}_1$, $\bar{\psi}(x)$. Poiché $\psi(x) \in C^0([0,x_0])$, esiste $A \geq 0$ tale che $|\psi(x)| \leq A$ per $0 \leq x \leq x_0$. Posto $z(x) = (z_1(x), z_2(x))$,

$\bar{z}(x) = (\bar{z}_1(x), \bar{z}_2(x))$ con $z_1(x) = u(x), z_2(x) = u'(x), \bar{z}_1(x) = \bar{u}(x)$,

$\bar{z}_2(x) = \bar{u}'(x)$,

tenendo presente le posizioni del paragrafo precedente, si ha

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + \int_0^{x_0} |F(x_0,t)|dt\} \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| +$$

$$+ \int_0^{x_0} |\Psi(t)|dt + \int_0^{x_0} dt \int_0^t |z_1(\xi)||\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + \int_0^{x_0} dt \int_t^{x_0} |\bar{z}_1(\xi)||\phi(\frac{t}{\xi})|d\xi\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R \int_0^{x_0} dt \int_0^t |\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + R \int_0^{x_0} dt \int_t^{x_0} |\phi(\frac{t}{\xi})|d\xi\} \quad .$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di inversione di Dirichlet e ponendo $\frac{\xi}{t} = s$, $\frac{t}{\xi} = s'$ e $B = \int_0^1 |\phi(s)|ds$, si ha

$$\lambda(\xi) \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R \int_0^{x_0} dt \int_0^t |\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + R \int_0^{x_0} d\xi \int_0^{\xi} |\phi(\frac{t}{\xi})|dt\} =$$

$$= \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R \int_0^{x_0} dt \int_0^1 |\phi(s)|t\, ds + R \int_0^{x} d\xi \int_0^1 |\phi(s')|\xi ds'\} =$$

$$= \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R \cdot B \frac{x_0^2}{2} + R\, B \frac{x_0^2}{2}\} = \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R\, B\, x_0^2\}.$$

Ne segue che

$$\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq \int_0^{x_0} \lambda(\xi)d\xi \leq \frac{x_0}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R\, B\, x_0^2\}\ .$$

Posto $K = \frac{x_0}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_0 + R\, B\, x_0^2\}$, la precedente disuguaglianza diventa $\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq K$, e tenuto conto della (8), si ha

$$|z_2(x)-\bar{z}_2(x)| \leq \{|u_1-\bar{u}_1|+\int_0^x \frac{1}{|a_2|}\Big[|u_0-\bar{u}_0|\cdot|F(x,t)|+|\bar{z}_1(t)|\,|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|\Big]dt\}\cdot \exp K.$$

Da questa disuguaglianza e dalla prima delle (7) consegue la tesi del teorema.

3. TEOREMA DI ESISTENZA PER IL PROBLEMA (1), (2).

III) Se esiste $R > 0$ tale che, posto

$$H = \frac{1}{|a_2|}\{R\int_0^{x_0}|\psi(t)|dt+|a_1|\cdot R\cdot x_0+ R^2\cdot\frac{x_0^2}{2}\int_0^1|\phi(s)|ds\}+|u_1|$$

si abbia:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_0\cdot R + |u_0| \leq R \\ H \leq R \end{cases}$$

allora il problema (1),(2), ha soluzione in $C^2([0,x_0])$.

Sia $||z||$ la norma di z nello spazio di Banach $C^\circ([0,x_0],R^2)$ (1). In tale spazio consideriamo l'insieme

(1) Esplicitamente $||z||= \max\{||z_1||,||z_2||\}$ con $||z_1|| = \max_{x\in[0,x_0]} |z_1(x)|$ e $||z_2||= \max_{x\in[0,x_0]} |z_2(x)|$