Consideriamo la seguente equazione integro-differenziale

$$(1) \qquad \psi(x)u(x) + a_1 u'(x) + a_2 u''(x) + u(x)\int_0^x \phi(\tfrac{t}{x})u(t)dt = 0$$

con:

$\psi(x) \in C^\circ([0,x_\circ],\mathbb{R})$, $\quad x_\circ > 0$

$\phi(s)$ sommabile in $[0,1]$ e diversa da zero in un insieme di misura positiva;

a_1, a_2 costanti reali, $a_2 \neq 0$;

$u(x)$ funzione incognita.

Della (1) cerchiamo soluzioni $u(x) \in C^2([0,x_\circ],\mathbb{R})$, tali che

$$(2) \qquad \begin{cases} u(0) = u_\circ \\ u'(0) = u_1 . \end{cases}$$

Chiamiamo dati del nostro problema, $u_\circ, u_1, \psi(x)$.

Posto

$$u(x) = z_1(x), \quad u'(x) = z_2(x), \quad e \quad z(x) = (z_1(x),\ z_2(x))$$

si ha che:

$u(x)$ appartiene a $C^2([0,x_\circ],\mathbb{R})$ ed è soluzione di (1),(2), se e soltanto se, z appartiene a $C^1([0,x_\circ],\mathbb{R}^2)$, ed è soluzione del sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left[a_1 z_2(x)+\psi(x)\cdot z_1(x)+z_1(x)\displaystyle\int_0^x z_1(t)\cdot\phi(\tfrac{t}{x})dt\right] \end{cases}$$

con le condizioni

$$(4) \qquad \begin{cases} z_1(0) = u_\circ \\ z_2(0) = u_1 . \end{cases}$$

Operata la sostituzione precedente, è immediato verificare che:

$z(x)$ appartiene a $C^1([0,x_\circ],\mathbb{R}^2)$ ed è soluzione di (3),(4), se e solo se: $z(x)$ appartiene a $C^\circ([0,x_\circ]\mathbb{R}^2)$, ed è soluzione di

$$(5)\quad \begin{cases} z_1(x) = \int_0^x z_2(t)dt + u_\circ \\ z_2(x) = -\frac{1}{a_2}\left[a_1\int_0^x z_2(t)dt + \int_0^x \psi(t)z_1(t)dt + \int_0^x z_1(\xi)d\xi\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt\right] + u_1 \end{cases}$$

1. UNICITA' DEL PROBLEMA (3), (4)

Siano $z(x) = (z_1(x),z_2(x))$ e $\bar{z}(x) = (\bar{z}_1(x),\bar{z}_2(x))$ soluzioni del problema (3),(4), con i dati rispettivamente, $u_\circ, u_1, \psi(x)$ e $\bar{u}_\circ, \bar{u}_1, \bar{\psi}(x)$, con $z(x)$ e $\bar{z}(x)$ appartenenti a $C^1([0,x_\circ],\mathbb{R}^2)$.

Tenendo conto delle (5) si ha:

$$(6)\quad \begin{cases} z_1(x)-\bar{z}_1(x) = \int_0^x [z_2(t) - \bar{z}_2(t)]dt + u_\circ - \bar{u}_\circ \\ z_2(x)-\bar{z}_2(x) = -\frac{1}{a_2}\left\{a_1\int_0^x\left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt + \int_0^x\left[\psi(t)z_1(t)-\bar{\psi}(t)\bar{z}_1(t)\right]dt\, + \right. \end{cases}$$

$$\left. + \int_0^x d\xi\left[z_1(\xi)\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt - \bar{z}_1(\xi)\int_0^\xi \bar{z}_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt\right]\right\} + u_1 - \bar{u}_1 .$$

Sommando e sottraendo, nella seconda delle (6),

$$\int_0^x \bar{z}_1(t)\psi(t)dt + \int_0^x \bar{z}_1(\xi)d\xi\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt, \quad \text{risulta:}$$

$$z_2(x)-\bar{z}_2(x) = -\frac{1}{a_2}\left\{a_1\int_0^x\left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt + \int_0^x\left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]\psi(t)dt\, + \right.$$