Consideriamo la seguente equazione integro-differenziale

$$(1)\qquad \psi(x)u(x) + a_1u'(x) + a_2u''(x) + u(x)\int_0^x \phi(\frac{t}{x})u(t)dt = 0$$

con:

$\psi(x) \in C^\circ([0,x_\circ],R)$, $x_\circ > 0$

$\phi(s)$ sommabile in $[0,1]$ e diversa da zero in un insieme di misura positiva;

a_1,a_2 costanti reali, $a_2 \neq 0$;

$u(x)$ funzione incognita.

Della (1) cerchiamo soluzioni $u(x) \in C^2([0,x_\circ],R)$, tali che

$$(2)\qquad \begin{cases} u(0) = u_\circ \\ u'(0) = u_1. \end{cases}$$

Chiamiamo dati del nostro problema, $u_\circ, u_1, \psi(x)$.

Posto

$$u(x) = z_1(x),\quad u'(x) = z_2(x),\quad e\quad z(x) = (z_1(x),\ z_2(x))$$

si ha che:

$u(x)$ appartiene a $C^2([0,x_\circ],R)$ ed è soluzione di (1),(2), se e soltanto se, z appartiene a $C^1([0,x_\circ],R^2)$, ed è soluzione del sistema

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left[a_1 z_2(x)+\psi(x)\cdot z_1(x)+z_1(x)\displaystyle\int_0^x z_1(t)\cdot\phi(\frac{t}{x})dt\right] \end{cases}$$

con le condizioni

$$(4)\qquad \begin{cases} z_1(0) = u_\circ \\ z_2(0) = u_1. \end{cases}$$

Operata la sostituzione precedente, è immediato verificare che:

$z(x)$ appartiene a $C^1([0,x_\circ],\mathbb{R}^2)$ ed è soluzione di (3),(4), se e solo se: $z(x)$ appartiene a $C^\circ([0,x_\circ]\mathbb{R}^2)$, ed è soluzione di

$$(5)\quad \begin{cases} z_1(x) = \displaystyle\int_0^x z_2(t)dt + u_\circ \\ z_2(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left[a_1\displaystyle\int_0^x z_2(t)dt+\int_0^x \psi(t)z_1(t)dt+\int_0^x z_1(\xi)d\xi\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt\right]+u_1 \end{cases}$$

1. <u>UNICITA' DEL PROBLEMA</u> (3), (4)

Siano $z(x) = (z_1(x),z_2(x))$ e $\bar{z}(x) = (\bar{z}_1(x),\bar{z}_2(x))$ soluzioni del problema (3),(4), con i dati rispettivamente, $u_\circ,u_1,\psi(x)$ e $\bar{u}_\circ,\bar{u}_1$, $\bar{\psi}(x)$, con $z(x)$ e $\bar{z}(x)$ appartenenti a $C^1([0,x_\circ],\mathbb{R}^2)$.

Tenendo conto delle (5) si ha:

$$(6)\quad \begin{cases} z_1(x)-\bar{z}_1(x) = \displaystyle\int_0^x [z_2(t) - \bar{z}_2(t)]dt+u_\circ-\bar{u}_\circ \\ z_2(x)-\bar{z}_2(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left\{a_1\displaystyle\int_0^x\left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt+\int_0^x\left[\psi(t)z_1(t)-\bar{\psi}(t)\bar{z}_1(t)\right]dt\,+\right. \\ \qquad\left.+\displaystyle\int_0^x d\xi\left[z_1(\xi)\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt-\bar{z}_1(\xi)\int_0^\xi \bar{z}_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt\right]\right\} + u_1-\bar{u}_1. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo, nella seconda delle (6),

$$\int_0^x\bar{z}_1(t)\psi(t)dt + \int_0^x\bar{z}_1(\xi)d\xi\int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt,\quad \text{risulta:}$$

$$z_2(x)-\bar{z}_2(x)= -\frac{1}{a_2}\left\{a_1\int_0^x\left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt+ \int_0^x\left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]\psi(t)dt\,+\right.$$

$$+ \int_0^x \bar{z}_1(t)\left[\psi(t)-\bar{\psi}(t)\right]dt+ \int_0^x \left[z_1(\xi)-\bar{z}_1(\xi)\right]d\xi \int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt +$$

$$+\int_0^x \bar{z}_1(\xi)d\xi \int_0^\xi \left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]\phi(\frac{t}{\xi})dt\Bigg\} + u_1-\bar{u}_1 .$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di inversione di Dirichlet si trae:

$$z_2(x) - \bar{z}_2(x) = - \frac{1}{a_2} \Bigg\{a_1\int_0^x \left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt + \int_0^x \left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]\psi(t)dt +$$

$$+ \int_0^x \bar{z}_1(t)\left[\psi(t)-\bar{\psi}(t)\right]dt + \int_0^x \left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]dt \int_0^t z_1(\xi)\phi(\frac{\xi}{t})d\xi +$$

$$+ \int_0^x \left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]dt \int_t^x \bar{z}_1(\xi)\phi(\frac{t}{\xi})d\xi\Bigg\} + u_1 - \bar{u}_1 .$$

Ponendo

$$F(x,t) = \psi(t)+ \int_0^t z_1(\xi)\phi(\frac{\xi}{t})d\xi + \int_t^x \bar{z}_1(\xi)\phi(\frac{t}{\xi})d\xi$$

si ha

$$z_2(x)-\bar{z}_2(x) = - \frac{1}{a_2} \Bigg\{a_1 \int_0^x \left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt+ \int_0^x \left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]F(x,t)dt +$$

$$+ \int_0^x \bar{z}_1(t)\left[\psi(t) - \bar{\psi}(t)\right]dt\Bigg\} + u_1 - \bar{u}_1 .$$

Tenendo conto della I^a equazione del sistema (6), si ottiene

$$z_2(x)-\bar z_2(x) = -\frac{1}{a_2}\left\{a_1\int_0^x\left[z_2(t)-\bar z_2(t)\right]dt+\int_0^x F(x,t)dt\int_0^t\left[z_2(\xi)-\bar z_2(\xi)\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\left[u_\circ-\bar u_\circ\right]F(x,t)dt+\int_0^x\bar z_1(t)\left[\psi(t)-\bar\psi(t)\right]dt\right\}+u_1-\bar u_1 .$$

Infine, applicando al II° integrale la formula di inversione di Dirichlet, il sistema (6) diventa

$$\begin{cases} z_1(x)-\bar z_1(x) = \displaystyle\int_0^x\left[z_2(t)-\bar z_2(t)\right]dt + u_\circ - \bar u_\circ \\ z_2(x)-\bar z_2(x) = -\dfrac{1}{a_2}\left\{a_1\displaystyle\int_0^x\left[z_2(\xi)-\bar z_2(\xi)\right]d\xi+\int_0^x\left[z_2(\xi)-\bar z_2(\xi)\right]d\xi\int_\xi^x F(x,t)dt+\right. \end{cases}$$

$$\left.+\int_0^x\left[u_\circ-\bar u_\circ\right]F(x,t)dt+\int_0^x\bar z_1(t)\left[\psi(t)-\bar\psi(t)\right]dt\right\}+u_1-\bar u_1 .$$

Pertanto si ha:

$$(7)\quad\begin{cases} |z_1(x)-\bar z_1(x)|\leq \displaystyle\int_0^x|z_2(t)-\bar z_2(t)|dt + |u_\circ - \bar u_\circ| \\ |z_2(x)-\bar z_2(x)| \leq \dfrac{1}{|a_2|}\left\{\displaystyle\int_0^x|z_2(\xi)-\bar z_2(\xi)|d\xi\left[|a_1|+\int_\xi^x|F(x,t)|dt\right]+\right. \end{cases}$$

$$\left.+\int_0^x|u_\circ-\bar u_\circ|\cdot|F(x,t)|dt+\int_0^x|\bar z_1(t)|\cdot|\psi(t)-\bar\psi(t)|dt\right\}+|u_1-\bar u_1| .$$

Posto

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{|a_2|}\left\{|a_1| + \int_\xi^{x_\circ}|F(x_\circ,t)|dt\right\} \qquad \text{e}$$

$$g(x) = \frac{1}{|a_2|}\left\{\int_0^x |u_\circ-\bar{u}_\circ|\cdot|F(x,t)|dt+\int_0^x |\bar{z}_1(t)|\cdot|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|dt\right\}+|u_1-\bar{u}_1|$$

dalla II^a delle (7) si ha

$$|z_2(x)-\bar{z}_2(x)| \leq \int_0^x |z_2(\xi) - \bar{z}_2(\xi)|\ \lambda(\xi)d\xi + g(x).$$

Per il lemma di Gronwall generalizzato, risulta

$$(8)\qquad |z_2(x) - \bar{z}_2(x)| \leq |u_1-\bar{u}_1|\exp\left\{\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\right\} +$$

$$+\int_0^x \left(\frac{1}{|a_2|}\left\{|u_\circ-\bar{u}_\circ|\cdot|F(x,t)|+|\bar{z}_1(t)|\cdot|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|\right\}\exp\left\{\int_t^x \lambda(\xi)d\xi\right\}\right)dt.$$

Dalla (8), ponendo $u_\circ = \bar{u}_\circ$, $u_1 = \bar{u}_1$, $\psi(t) \equiv \bar{\psi}(t)$, risulta

$$z_2(x) = \bar{z}_2(x) \qquad 0 \leq x \leq x_\circ ,$$

e, per la I^a delle (7)

$$z_1(x) = \bar{z}_1(x) \qquad 0 \leq x \leq x_\circ .$$

Pertanto è dimostrato che:

I) <u>il problema</u> (3),(4), <u>ammette in</u> $C^1([0,x_\circ])$ <u>al più una soluzione</u>.

2. DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI.

Sussiste il seguente teorema:

II) <u>se esistono</u> $R > 0$ <u>e</u> $x_\circ > 0$, <u>tali che, dati</u> $u_\circ, u_1$ <u>e</u> $\psi(x)$, <u>con</u> $|u_\circ| \leq R$, $|u_1| \leq R$, $\psi(x) \in C^\circ([0,x_\circ])$, <u>esiste la soluzione</u> $u(x) \in C^2([0,x_\circ])$ <u>di</u> (1),(2), <u>e sia tale che</u> $|u(x)| \leq R$, $0 \leq x \leq x_\circ$, <u>allora</u> $u(x)$ <u>dipende</u>

<u>con continuità dai dati</u>.

Siano $u(x)$ e $\bar{u}(x)$ soluzioni di (1), (2) con i dati rispettivamente u_0, u_1, $\psi(x)$ e $\bar{u}_0, \bar{u}_1$, $\bar{\psi}(x)$. Poiché $\psi(x) \in C^{\circ}([0,x_0])$, esiste $A \geq 0$ tale che $|\psi(x)| \leq A$ per $0 \leq x \leq x_0$. Posto $z(x) = (z_1(x), z_2(x))$,

$\bar{z}(x) = (\bar{z}_1(x), \bar{z}_2(x))$ con $z_1(x) = u(x), z_2(x) = u'(x), \bar{z}_1(x) = \bar{u}(x)$,

$\bar{z}_2(x) = \bar{u}'(x)$,

tenendo presente le posizioni del paragrafo precedente, si ha

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + \int_0^{x_0} |F(x_0,t)|dt\} \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| +$$

$$+ \int_0^{x_0} |\Psi(t)|dt + \int_0^{x_0} dt \int_0^t |z_1(\xi)||\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + \int_0^{x_0} dt \int_t^{x_0} |\bar{z}_1(\xi)||\phi(\frac{t}{\xi})|d\xi\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_0 + R\int_0^{x_0} dt \int_0^t |\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + R\int_0^{x_0} dt \int_t^{x_0} |\phi(\frac{t}{\xi})|d\xi\} \quad .$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di inversione di Dirichlet e ponendo $\frac{\xi}{t} = s$, $\frac{t}{\xi} = s'$ e $B = \int_0^1 |\phi(s)|ds$, si ha

$$\lambda(\xi) \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_0 + R\int_0^{x_0} dt \int_0^t |\phi(\frac{\xi}{t})|d\xi + R\int_0^{x_0} d\xi \int_0^{\xi} |\phi(\frac{t}{\xi})|dt\} =$$

$$= \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_0 + R\int_0^{x_0} dt \int_0^1 |\phi(s)|t\,ds + R\int_0^{x} d\xi \int_0^1 |\phi(s')|\xi ds'\} =$$

$$= \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_0 + R\cdot B\,\frac{x_0^2}{2} + R\,B\,\frac{x_0^2}{2}\} = \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_0 + R\,B\,x_0^2\}.$$

Ne segue che

$$\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq \int_o^{x_o}\lambda(\xi)d\xi \leq \frac{x_o}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_o + R\,B\,x_o^2\}\;.$$

Posto $K = \frac{x_o}{|a_2|}\{|a_1| + A\,x_o + R\,B\,x_o^2\}$, la precedente disuguaglianza

diventa $\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq K$, e tenuto conto della (8), si ha

$$|z_2(x)-\bar{z}_2(x)| \leq \{|u_1-\bar{u}_1| + \int_o^x \frac{1}{|a_2|}\Big[|u_o-\bar{u}_o|\cdot|F(x,t)|+|\bar{z}_1(t)|\,|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|\Big]dt\}\cdot\exp K.$$

Da questa disuguaglianza e dalla prima delle (7) consegue la tesi del teorema.

3. TEOREMA DI ESISTENZA PER IL PROBLEMA (1), (2).

III) Se esiste $R > 0$ tale che, posto

$$H = \frac{1}{|a_2|}\{R\int_o^{x_o}|\psi(t)|dt+|a_1|\cdot R\cdot x_o + R^2\cdot\frac{x_o^2}{2}\int_o^1|\phi(s)|ds\}+|u_1|$$

si abbia:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_o\cdot R + |u_o| \leq R \\ H \leq R \end{cases}$$

allora il problema (1),(2), ha soluzione in $C^2([0,x_o])$.

Sia $||z||$ la norma di z nello spazio di Banach $C^\circ([0,x_o],R^2)$ (1). In tale spazio consideriamo l'insieme

(1) Esplicitamente $||z|| = \max\{||z_1||,||z_2||\}$ con $||z_1|| = \max_{x\in[0,x_o]}|z_1(x)|$ e $||z_2|| = \max_{x\in[0,x_o]}|z_2(x)|$

$$S = \{z = (z_1,z_2) \ni z_1(0) = u_\circ, z_2(0) = u_1, \ ||z|| \leq R' \} .$$

Tale insieme è chiuso, limitato, convesso.

Consideriamo la trasformazione

$$T : z \in C^\circ([0,x_\circ]) \rightarrow T z = v$$

con $v = (v_1,v_2)$ e

$$(10) \begin{cases} v_1(x) = \int_0^x z_2(t)dt + u_\circ \\ v_2(x) = -\frac{1}{a_2}\{ \int_0^x \psi(t)z_1(t)dt + a_1 \int_0^x z_2(t)dt + \int_0^x z_1(\xi)d\xi \int_0^\xi \phi(\frac{t}{\xi})\, z_1(t)dt\} + u_1 . \end{cases}$$

Dimostriamo che T trasforma S in sé, è continua e compatta. Da

$$||v_2|| \leq \frac{1}{|a_2|}\{R \int_0^{x_\circ} |\psi(t)|dt + |a_1| R\, x_\circ + R^2 \frac{x_\circ^2}{2} \int_0^1 |\phi(s)|ds\} + |u_1| = H \leq R,$$

$$||v_1|| \leq \int_0^x ||z_2||dt + |u_\circ| \leq \int_0^{x_\circ} R\, dt + |u_\circ| = R\, x_\circ + |u_\circ| \leq R,$$

$$v_1(0) = u_\circ \quad \text{e} \quad v_2(0) = u_1,$$

consegue che $v = (v_1,v_2) \in S$.

Per dimostrare la continuità della T, basta osservare che, posto $Tz = v$, $T\bar{z} = \bar{v}$, con il solito significato per $v,\bar{v},z,\bar{z}$, si ha

$$\begin{cases} v_1(x) - \bar{v}_1(x) = \int_0^x (z_2(t)-\bar{z}_2(t))dt \\ v_2(x)-\bar{v}_2(x) = -\frac{1}{a_2}\{ \int_0^x \psi(t)[z_1(t)-\bar{z}_1(t)]dt + a_1 \int_0^x [z_2(t)-\bar{z}_2(t)]dt + \end{cases}$$

$$+ \int_0^x [z_1(\xi)-\bar{z}_1(\xi)]d\xi \int_0^\xi z_1(t)\phi(\frac{t}{\xi})dt + \int_0^x \bar{z}_1(\xi)d\xi \int_0^\xi \phi(\frac{t}{\xi})[z_1(t)-\bar{z}_1(t)]dt.$$

Dimostriamo infine che T è compatta.

A tal fine sia U un insieme di funzioni $z(x)$ equilimitate, ossia tali che

$$||z|| \leq L.$$

Posto al solito $Tz = v = (v_1, v_2)$ si ha dalle (10)

$$||v_1|| \leq L \cdot x_o + |u_o|$$

$$||v_2|| \leq \frac{1}{|a_2|}\{L \cdot A + |a_1| \cdot L \cdot x_o + L^2 \cdot \frac{x_o^2}{2} \cdot B\} + |u_1| \cdot$$

Pertanto $T\,U$ è un insieme di funzioni equilimitate.

Si ha inoltre:

$$\left|v_1(x+\Delta x) - v_1(x)\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} z_2(t)dt\right| \leq L \cdot |\Delta x|$$

$$\left|v_2(x+\Delta x) - v_2(x)\right| \leq \frac{1}{|a_2|}\{|a_1| \cdot L \cdot |\Delta x| + A \cdot L \cdot |\Delta x| + \int_x^{x+|\Delta x|} L \cdot |z_1(\xi)| d\xi \int_o^1 |\phi(s)| \cdot \xi \cdot ds\} \leq$$

$$\leq \frac{L}{|a_2|}\{|a_1| + A + \frac{L \cdot A \cdot 3x_o}{2}\} \cdot |\Delta x| .$$

Pertanto $T\,U$ è un insieme di funzioni equicontinue.

In definitiva T trasforma insiemi di funzioni equilimitate in insiemi di funzioni equicontinue ed equilimitate; quindi T è compatta.

Per il teorema di Schauder esiste in S un punto unito per la T, ossia esiste $z \in S$, tale che

$$Tz = z.$$

Tale funzione $z(x) = (z_1(x), z_2(x))$ risolve il sistema(5) e, per quanto osservato precedentemente, la funzione $u(x) = z_1(x)$ è soluzione in $C^2([0,x_o])$ del problema (1),(2).

4. ESISTENZA DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA (1),(2), CON IL METODO DELLE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE.

Con le stesse ipotesi del teorema precedente e con il medesimo significato per T e per S, poniamo:

$$z_o = (z_{1,0}, z_{2,0}) = (u_o, u_1);$$

$$z_{n+1} = Tz_n = (z_{1,n+1}, z_{2,n+1}) \qquad \text{per } n = 0,1,2,\dots.$$

Tenendo presente il significato di T si ha:

$$(10) \quad \begin{cases} z_{1,1} = \int_o^x u_1 dt + u_o \\ z_{2,1} = -\frac{1}{a_2}\left\{ \int_o^x u_o \psi(t)dt + a_1 \int_o^x u_1 dt + \int_o^x u_o d\xi \int_o^\xi u_o \phi\left(\frac{t}{\xi}\right)dt \right\} + u_1, \end{cases}$$

e, in generale

$$(11) \quad \begin{cases} z_{1,n+1}(x) = \int_o^x z_{2,n}(t)dt + u_o \\ z_{2,n+1}(x) = -\frac{1}{a_2}\left\{ \int_o^x \psi(t)\cdot z_{1,n}(t)dt + a_1 \int_o^x z_{2,n}(t)dt + \int_o^x z_{1,n}(\xi)d\xi \int_o^\xi \phi\left(\frac{t}{\xi}\right) z_{1,n}(t)dt \right\} + u_1 \end{cases}$$

Dalle (10), (11), si ha

$$(12)\quad \begin{cases} z_{1,1}(x) - z_{1,0}(x) = \int_o^x u_1 dt \\ z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)= -\frac{1}{a_2}\left\{ \int_o^x u_o\psi(t)dt+a_1\int_o^x u_1 dt+ \int_o^x u_o d\xi\int_o^\xi u_o\phi\ (\frac{t}{\xi})dt \right\} \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)= \int_o^x\left[z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)\right]dt \\ z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)= -\frac{1}{a_2}\left\{ \int_o^x\left[z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)\right]\psi(t)dt+a_1 \int_o^x\left[z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)\right]d \right. \end{cases}$$

$$\left. +\int_o^x\left[z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)\right]d\xi\int_o^\xi \phi(\frac{t}{\xi})z_{1,n}(t)dt+\int_o^x z_{1,n-1}(\xi)d\xi\int_o^\xi\left[z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)\right]\cdot \phi(\frac{t}{\xi})dt\right\} .$$

Applicando all'ultimo integrale la formula di inversione di Dirichlet, le (13) diventano:

$$(14)\quad \begin{cases} z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)= \int_o^x [z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)]dt \\ z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x) = -\frac{1}{a_2}\left\{ \int_o^x [z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)]\psi(t)dt+a_1\int_o^x [z_{2,n}(t)- \right. \end{cases}$$

$$-z_{2,n-1}(t)]dt+\int_o^x [z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)]d\xi \int_o^\xi \phi(\frac{t}{\xi})z_{1,n}(t)dt+ \int_o^x [z_{1,n}(\xi) -$$

$$\left. - z_{1,n-1}(\xi)]d\xi \int_\xi^x \phi(\ \frac{\xi}{t}\ )z_{1,n-1}(t)dt\right\}$$

Pertanto, dalle (12) e dalle (14) si ha

$$(15)\quad \begin{cases} |z_{1,1}(x)-z_{1,0}(x)| \leq \int_0^x |u_1|dt \\ |z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)| \leq \frac{1}{|a_2|}\left\{\int_0^x |u_o|\cdot|\psi(t)|dt+|a_1| \int_0^x |u_1|dt+\right. \end{cases}$$

$$\left.+\int_0^x |u_o|d\xi \int_0^\xi |u_o|\cdot|\phi(\tfrac{t}{\xi})|dt\right\} ,$$

$$(16)\quad \begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq \int_0^x |z_{2,n}(t)-z_{2,n-1}(t)|dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \frac{1}{|a_2|}\left\{ \int_0^x |z_{1,n}(t)-z_{1,n-1}(t)|\cdot|\psi(t)|dt+|a_1| \int_0^x |z_{2,n}(t)-\right. \end{cases}$$

$$-z_{2,n-1}(t)|dt+ \int_0^x |z_{1,n}(\xi)-z_{1,n-1}(\xi)|d\xi \int_0^\xi |\phi(\tfrac{t}{\xi})|\cdot|z_{1,n}(t)|dt+\int_0^x |z_{1,n}(\xi) -$$

$$\left.-z_{1,n-1}(\xi)|d\xi \int_\xi^x |\phi(\tfrac{\xi}{t})|\cdot|z_{1,n-1}(t)|dt\right\}$$

e successivamente

$$(17)\quad \begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq \int_0^x \|z_n(t)-z_{n-1}(t)\|dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \int_0^x \left[\frac{1}{|a_2|}|\psi\ (\xi)|+ \frac{|a_1|}{|a_2|} + \frac{1}{|a_2|} \int_0^\xi |\phi(\tfrac{t}{\xi})|\cdot|z_{1,n}(t)|dt +\right. \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{|a_2|} \int_{\xi}^{x_0} |\phi(\tfrac{\xi}{t})| \cdot |z_{1,n-1}(t)| dt \Big] \cdot ||z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)|| d\xi$$

dove $\quad ||z_n(x)-z_{n-1}(x)|| = \max\left\{ |z_{1,n}(x)-z_{1,n-1})|, |z_{2,n}(x)-z_{2,n-1}(x)| \right\}.$

Sia $\quad a = \max\left\{ 1, \frac{1}{|a_2|}, \frac{|a_1|}{|a_2|} \right\}.$

Dalle (15) risulta

$$(18) \quad \begin{cases} |z_{1,1}(x)-z_{1,0}(x)| \leq a\cdot|u_1| \displaystyle\int_0^x dt \\ |z_{2,1}(x)-z_{2,0}(x)| \leq a\cdot|u_o| \displaystyle\int_0^x |\psi(t)| dt + a|u_1| \int_0^x dt + a|u_o|^2 \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} |\phi(\tfrac{t}{\xi})| dt \end{cases}$$

Analogamente, dalle (17) si ha

$$(19) \quad \begin{cases} |z_{1,n+1}(x)-z_{1,n}(x)| \leq a \displaystyle\int_0^x ||z_n(t)-z_{n-1}(t)|| dt \\ |z_{2,n+1}(x)-z_{2,n}(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \Big\{ a|\psi(\xi)| + a + a\,R \int_0^{\xi} |\phi(\tfrac{t}{\xi})| dt + \end{cases}$$

$$+ a\,R \int_{\xi}^{x_0} |\phi(\tfrac{\xi}{t})| dt \Big\} \cdot ||z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)|| \cdot d\xi$$

Poniamo:

$$h(x) = a\cdot|u_o| \int_0^x |\psi(t)|\,dt + a\cdot|u_1|\int_0^x dt + a\cdot|u_o|^2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi |\phi(\frac{t}{\xi})|\,dt,$$

$$g(x) = a|\psi(x)| + a + a\,R \int_0^x |\phi(\frac{t}{x})|\,dt + a\,R \int_x^{x_o} |\phi(\frac{x}{t})|\,dt$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

Dalle (18) e dalle (19) consegue

$$(20) \qquad ||z_1(x) - z_o(x)|| \leq h(x)$$

$$(21) \qquad ||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \int_0^x G'(\xi)\cdot||z_n(\xi)-z_{n-1}(\xi)||\,d\xi;\ n=1,2,3,\ldots$$

Dimostriamo che

$$(22)\ ||z_{n+1}(x)-z_n(x)|| \leq \frac{[G(x)]^n}{n!}\cdot h(x) - \int_0^x \frac{[G(\xi)]^n}{n!}\,h'(\xi)\,d\xi$$

La (22) è vera per $n=1$. Infatti per la (21) e la (20)

$$||z_2(x)-z_1(x)|| \leq \int_0^x G'(\xi)||\,z_1(\xi)-z_o(\xi)||\,d\xi \leq$$

$$\leq \int_0^x G'(\xi)\cdot h(\xi)\,d\xi = G(x)h(x) - \int_0^x G(\xi)\cdot h'(\xi)\,d\xi \quad .$$

Ammesso vero che

$$\|z_n(x)-z_{n-1}(x)\| \leq \frac{[G(x)]^{n-1}}{(n-1)!}\cdot h(x)-\int_0^x \frac{[G(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!}\cdot h'(\xi)d\xi \ ,$$

dalla (21), tenendo presente che $h'(x) > 0$, risulta

$$\|z_{n+1}(x)-z_n(x)\| \leq \int_0^x G'(\xi)\ \frac{[G(\xi)]^{n-1}}{(n-1)!}\cdot h(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{[G(x)]^n}{n!}\cdot h(x)-\int_0^x \frac{[G(\xi)]^n}{n!}\cdot h'(\xi)d\xi \ .$$

Indicati con L e M due numeri reali positivi tali che $G(x) \leq L$ e $h(x) \leq M$ per $0 \leq x \leq x_o$, dalla (22) risulta

$$\|z_{n+1}(x)-z_n(x)\| \leq \frac{L^n}{n!}\cdot M \ .$$

Pertanto la serie

$$z_o + \{z_1(x)-z_o\} + \{z_2(x)-z_1(x)\} + \ldots\ldots\ldots$$

la cui n+1-esima somma parziale è $z_n(x)$, è totalmente convergente in $[0,x_o]$.

Sia $z(x)$ la somma di tale serie.

Risulta $z \in S$.

Ripetendo il medesimo ragionamento fatto per pervenire alla (21), si ottiene:

$$||z_{n+1}(x)-Tz(x)|| \leq \int_0^x g(\xi)\cdot||z_n(\xi)-z(\xi)||d\xi$$

Pertanto $z_n \xrightarrow{n} Tz$ e quindi, poiché $z_n \xrightarrow{n} z$, si ha $Tz = z$, ossia z è soluzione del sistema (3),(4).

Infine, posto $z = (z_1,z_2)$, la funzione $u(x) = z_1(x)$ è soluzione del problema (1), (2).