

Il problema del rimbalzo unidimensionale e sue approssimazioni non convesse<sup>(\*)</sup>

Michele CARRIERO

Eduardo PASCALI<sup>(\*\*)</sup>

Summary.- *It is shown an approximation theorem via non convex penalized problems for the one dimensional bounce problem.*

*Then non uniqueness phenomenon and sufficient conditions for uniqueness are exhibited.*

Introduzione.- Recentemente è stato proposto lo studio della G-convergenza per i problemi di rimbalzo.

In questa nota, come primo avvio a tale studio, si dimostra un teorema di approssimazione tramite penalizzazioni non convesse per il problema del rimbalzo in una dimensione.

Si illustra poi il fenomeno di non unicità e si danno condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione.

Desideriamo ringraziare il Prof. E. De Giorgi per averci proposto questa ricerca e per le utili discussioni sull'argomento.

---

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR-Gnafa

(\*\*) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica, Via Arnesano

0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia  $\bar{\Omega} = [0, T]$  ,  $f \in L^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ .

Definizione.

Diremo che  $u$ , lipschitziana in  $\bar{\Omega}$ , è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

- (i)  $u \leq 0$  in  $\bar{\Omega}$  ;
- (ii)  $\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t) - f(t)] \phi(t) dt \leq 0$  per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; [0, +\infty[)$
- (iii) per  $u < 0$   
 $\ddot{u} - f = 0$  nel senso delle distribuzioni;
- (iv) per ogni  $t \in \Omega$  esistono  $\dot{u}^+(t)$  e  $\dot{u}^-(t)$ ; esistono  $\dot{u}^+(0)$ ,  $\dot{u}^-(T)$   
 e si ha:

$$\frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(0)]^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia) .

Osservazione I - L'esistenza per ogni  $t \in \Omega$  della derivata destra  $\dot{u}^+(t)$  e sinistra  $\dot{u}^-(t)$  segue dalla (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left( \int_0^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta \quad \text{è concava e}$$

$$F(t) = \int_0^t \left( \int_0^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta \quad \text{è derivabile.}$$

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(t_0) = s \quad , \quad \dot{u}^+(t_0) = b \quad ,$$

con  $0 \leq t_0 < T$  ,  $s < 0$  ,  $b \in \mathbb{R}$  oppure

$$0 \leq t_0 < T, \quad s = 0, \quad b \leq 0.$$

s 1. Approssimazioni non convesse per il pdr unidimensionale e teorema di esistenza.

Sia  $(u_h)$  una successione di funzioni per cui si abbia

$$u_h \in C^1(\bar{\Omega}; R), \quad \ddot{u}_h \in L^1(\bar{\Omega}; R) \quad e$$

$$\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t))] \phi(t) dt = \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; R).$$

Su  $f$  e  $\psi_h$  (termine di penalizzazione) facciamo le seguenti ipotesi:

(1)  $f \in L^1(\bar{\Omega}; R)$  ;

(2)  $\psi_h \in C^0(R; R)$

$$\psi_h(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{per } \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per } \xi > 0 \end{cases} ;$$

(3)<sub>1</sub> comunque si fissino  $\xi_1, \xi_2$  (con  $0 < \xi_1 < \xi_2$ )

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \psi_h(\xi) = +\infty, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2;$$

$$(3)_2 \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow +\infty}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta) d\eta} = +\infty. \quad (1)$$

(1) Per esempio si può prendere

$$\psi_h(\xi) = h(\xi^3 + |\xi|^3).$$

Altri esempi (comprendenti  $\psi_h$  non convesse) verranno dati alla fine di questo paragrafo.

Sussiste il seguente

Lemma 1 - Comunque si fissi una condizione iniziale (s,b) ammissibile per il pdr, ogni successione (u<sub>h</sub>) di soluzioni dei problemi

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t))] \phi(t) dt = \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; R) \\ u_h(0) = s \\ \dot{u}_h^+(0) = b \end{array} \right.$$

verifica le seguenti condizioni

[A] (u<sub>h</sub>) è equilipschitziana (quindi equicontinua) ed equilimitata;

[B] posto

$$\alpha_h(u_h(t)) = \int_0^t \psi_h(u_h(\eta)) \dot{u}_h(\eta) d\eta ,$$

esiste  $c > 0$  per cui

$$0 \leq \alpha_h(u_h(t)) \leq c \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N} \text{ e } t \in \bar{\Omega} ;$$

[C] per ogni  $t \in \bar{\Omega}$  risulta

$$\max_{h \rightarrow +\infty} \lim u_h(t) \leq 0 .$$

Dimostrazione.

[A] Da (P<sub>h</sub>) si ottiene l'identità dell'energia

$$(\dot{u}_h(t) \ddot{u}_h(t) + \dot{u}_h(t) \psi_h(u_h(t))) = \dot{u}_h(t) f(t) \quad \text{q.o. in } \bar{\Omega} ;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{u}_h^2(t) + \dot{u}_h(t) \psi_h(u_h(t)) = \dot{u}_h(t) f(t) \quad \text{q.o. in } \bar{\Omega} \text{ e quindi)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) = \frac{1}{2} b^{2-\alpha_h}(u_h(t)) + \int_0^t \dot{u}_h(n) f(n) dn \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Allora

$$0 \leq \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) \leq \frac{1}{2} b^{2+} \int_0^t |f(n)| |\dot{u}_h(n)| dn \leq \frac{1}{2} b^{2+} \|f\|_{L^1(\bar{\Omega}; R)} \cdot \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)}$$

per ogni  $t \in \bar{\Omega}$  e per ogni  $h \in \mathbb{N}$ .

Quindi

$$\|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)}^2 \leq b^{2+2} \|f\|_{L^1(\bar{\Omega}; R)} \cdot \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}, \text{ pertanto}$$

$$(5) \quad \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)} \leq \text{costante (indipendente da } h).$$

Da (5) segue [A].

[B] Segue da (4) e (5), tenuto conto dell'ipotesi su  $f$ .

[C] Supponiamo che per  $\bar{t}$  e  $\bar{\Omega}$  si abbia

$$\max_{h \rightarrow +\infty} \lim u_h(\bar{t}) > \sigma > 0;$$

ne segue che per una opportuna estratta di  $(u_h(\bar{t}))$ ,  $(u_{h(k)}(\bar{t}))$ , riesce

$$u_{h(k)}(\bar{t}) > \sigma > 0.$$

Allora

$$\int_{\sigma/2}^{\sigma} \psi_{h(k)}(\xi) d\xi \leq \int_s^{u_{h(k)}(\bar{t})} \psi_{h(k)}(\xi) d\xi = \alpha_{h(k)}(u_{h(k)}(\bar{t})) \leq c,$$

contro l'ipotesi (3)<sub>1</sub>. ■

Teorema 1 - Se  $(u_h)$  (con  $u_h$  soluzione del problema  $(P_h)$  ) converge  
uniformemente in  $\bar{\Omega}$  ad una funzione  $u$ , allora  $u$  è solu-  
zione del pdr.

La dimostrazione si articola in diversi punti. Intanto  $u$  è lipschitziana in  $\bar{\Omega}$  (per [A]) ed è non positiva (per [C]).

Proviamo (ii).

Sia  $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; [0, +\infty[)$ ; per ogni  $h \in \mathbb{N}$  si ha

$$\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) - f(t)] \phi(t) dt = - \int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t)) \phi(t) dt \leq 0,$$

quindi

$$\int_{\bar{\Omega}} u_h(t) \ddot{\phi}(t) dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \leq 0 \quad ;$$

allora, per  $h \rightarrow +\infty$ , riesce

$$\int_{\bar{\Omega}} u(t) \ddot{\phi}(t) dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \leq 0, \quad \text{cioè} \quad \int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t) - f(t)] \phi(t) dt \leq 0.$$

Dimostriamo, ora, la condizione (iii).

Per  $u(t) < 0$ ,  $u_h(t)$  è non positiva definitivamente; allora, da  $(P_h)$ ,  $\ddot{u}_h - f = 0$  (definitivamente) nel senso delle distribuzioni e quindi, per l'ipotesi,  $\ddot{u} - f = 0$  nel senso delle distribuzioni.

Osservazione II - Per  $u(t) < 0$  si ha q.o.

$$\ddot{u}_h(t) = f(t) \quad \text{definitivamente,}$$

quindi la successione  $(\dot{u}_h)$  è equicontinua; poiché  $(\dot{u}_h)$  è anche equi-limitata (cfr. (5)), la successione  $(\dot{u}_h)$  ha una estratta che converge uniformemente.

E' così provata l'esistenza di  $\dot{u}$  per  $u(t) < 0$  e la sua continuità. Resta da provare la conservazione dell'energia.

A tale scopo premettiamo alcune proposizioni.

[D] Esiste una opportuna estratta di  $(u_h)$ , indicata ancora con  $(u_h)$ , ed esiste una funzione non negativa, uniformemente continua,  $\phi$  per cui, posto  $\phi_h(t) = \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) + \alpha_h(u_h(t))$ , risulta  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \phi_h(t) = \phi(t)$  uniformemente in  $\bar{\Omega}$ .

Dall'identità dell'energia (4) e dalla (5), segue che  $\|\phi_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} \leq \text{costante}$ ; inoltre da

$$\phi_h(t) = \dot{u}_h(t) \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) \dot{u}_h(t) = f(t) \dot{u}_h(t)$$

segue che  $(\phi_h)$  è equicontinua.

La tesi segue dal teorema di Ascoli-Arzelà.

Osserviamo che per  $u(t) < 0$  risulta

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t).$$

[E] Sia  $\tau \in \Omega$  zero isolato di  $u$ , allora

$$\dot{u}^+(\tau) = -\dot{u}^-(\tau).$$

Infatti, essendo

$$\dot{u}^-(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}(t) [= \lambda_1] \quad \text{e}$$

$$\dot{u}^+(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} \dot{u}(t) [= \lambda_2], \quad \text{per } t_1 < \tau < t_2 \text{ si ha}$$

$$|\lambda_1^2 - \lambda_2^2| \leq |\lambda_1^2 - \dot{u}^2(t_1)| + |\dot{u}^2(t_1) - \dot{u}^2(t_2)| + |\dot{u}^2(t_2) - \lambda_2^2|$$

e per  $t_1 \rightarrow \tau^-$  e  $t_2 \rightarrow \tau^+$ , dalla continuità di  $\phi$ , si ha

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

Ne segue che  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ .

E' facile riconoscere (tenuto conto del fatto che  $u$  è non positiva) che non può essere  $\lambda_1 = \lambda_2$  se non per  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Osservazione III - Nelle ipotesi del teorema I, per ogni  $\tau \in \Omega$  si ha  
 (6)  $\dot{u}^-(\tau) \geq \max_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) \geq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) \geq \dot{u}^+(\tau)$ .

Dim.

Sia  $t > \tau$

da  $\ddot{u}_h(t) = f(t) - \psi_h(u_h(t))$  q.o. si ha

$$\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau) = \int_{\tau}^t f(\eta) d\eta - \int_{\tau}^t \psi_h(u_h(\eta)) d\eta \leq \int_{\tau}^t f(\eta) d\eta;$$

quindi

$$u_h(t) - u_h(\tau) \leq (t - \tau) \dot{u}_h(\tau) + \int_{\tau}^t \left( \int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta.$$

Pertanto

$$u(t) - u(\tau) \leq (t - \tau) \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) + \int_{\tau}^t \left( \int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta$$

da cui

$$\frac{u(t) - u(\tau)}{t - \tau} \leq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) + \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \left( \int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta;$$

per  $t \rightarrow \tau^+$  si ha

$$(7) \quad \dot{u}^+(\tau) \leq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau).$$

Sia ora  $t < \tau$ ; con procedimento analogo al precedente si ottiene

$$(8) \quad \dot{u}^-(\tau) \geq \max_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau)$$

Da (7) e (8) segue la (6).

[F] Se  $\tau$  è uno zero interno agli zeri di  $u$ , risulta  $\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(\tau) = 0$   
e  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(\tau) = \dot{u}(\tau)$ .

(cfr. osservazione III).

[G] Se  $u(\tau) = 0$  ed esiste un intorno  $I$  di  $\tau$  per cui:

$$u(t) < 0 \quad \text{per } t < \tau \quad (\text{per } t > \tau), \text{ teI}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{per } t \geq \tau \quad (\text{per } t \leq \tau), \text{ teI},$$

allora  $\dot{u}(\tau) = 0$

Dim. Intanto nelle ipotesi di [G] è  $\phi(\tau) = 0$ .

Se ciò non fosse vero, sarebbe in un opportuno intorno  $I^\circ(\underline{c} I)$   
 $\phi(t) > \sigma > 0$ . Detto  $I_+^\circ = \{teI^\circ | t > \tau\}$ , si avrebbe  $u(t) = \dot{u}(t) = 0$   
 ed anche, per l'osservazione III,  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(t) = 0$  in  $I_+^\circ$ .

Allora per ogni  $teI_+^\circ$ , risulta  $\alpha_h(u_h(t)) > \sigma$  definitivamente e, per  
 l'ipotesi (3)<sub>2</sub>,  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \psi_h(u_h(t)) = +\infty$ .

Inoltre è facile provare che esiste una costante  $c^\circ > 0$  (indipenden  
 te da  $h$ ) per cui

$$0 \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(\eta)) d\eta \leq c^\circ \quad \text{per ogni } t_1, t_2 \in \bar{\Omega}.$$

Sia, ora,  $m$  il più piccolo intero positivo maggiore di  $\frac{2c^\circ}{t_2 - t_1}$ ,  
 essendo  $[t_1, t_2] \subset I_+^\circ$ .

Consideriamo la successione di funzioni, misurabili e limitate,

$$\{\psi_h(u_h(t))\}^m = \begin{cases} \psi_h(u_h(t)) & \text{se } \psi_h(u_h(t)) \leq m \\ m & \text{se } \psi_h(u_h(t)) > m \end{cases} ;$$

tale successione converge puntualmente alla funzione costante  $m$ .

Riesce inoltre 
$$\int_{t_1}^{t_2} \{\psi_h(u_h(t))\}^m dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(t)) dt \leq c^\circ \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}.$$

Per il Lemma di Fatou si ha  $m(t_2 - t_1) \leq c^\circ$ ; quindi un assurdo.

Ora, da  $\phi(\tau) = 0$  segue che  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}^2(t) = 0$  e perciò  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}(t) = 0$

Ne deduciamo così l'esistenza di  $\dot{u}^-(\tau) = 0 = \dot{u}^+(\tau)$ .

Osserviamo esplicitamente che è anche  $\phi(t) = 0$  per  $t \in I$ ,  $t > \tau$ .

[H] Se  $u(\tau) = 0$  e  $\tau$  è d'accumulazione di zeri di  $u$ , allora  $\dot{u}(\tau) = 0$ .

In questo caso esiste una successione di punti  $(\xi_h)$  per cui

$$u(\xi_h) < 0, \quad \dot{u}(\xi_h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \xi_h = \tau.$$

Ne segue che 
$$\lim_{t \rightarrow \tau} \phi(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \tau} [\dot{u}^-(t)]^2 = \lim_{t \rightarrow \tau} [\dot{u}^+(t)]^2.$$

Osservazione IV.

Da quanto provato in [D]-[H] segue che:

$$\phi(t) = \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 \quad \text{in} \quad \bar{\Omega},$$

e

$\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h = \dot{u}$  q.o. in  $\bar{\Omega}$  ( $(\dot{u}_h)$  non convergendo, eventualmente,

negli zeri isolati di  $u$ ).

Dall'osservazione precedente segue la condizione (iv). Infatti, per il Teorema di Lebesgue, dalla (4) (passando al limite, per  $h \rightarrow +\infty$ , per una opportuna estratta, cfr. [D]) si ottiene

$$\frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Da quanto provato segue il teorema 1. ■

Osservazione V -

Da quanto dimostrato risulta che se sopprimiamo l'ipotesi  $(3)_2$ , la (iv) può essere formulata solo in questi termini:

"esiste una funzione  $\phi(t) \geq 0$ , uniformemente continua, per cui

$$\frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta = \phi(t) \quad \text{con}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) \quad \text{per } u(t) < 0.$$

Corollario.

Nelle ipotesi poste, per ogni dato iniziale  $(s,b)$  ammissibile per il pdr esiste almeno una soluzione del pdr in  $\bar{\Omega}$  con dati iniziali  $(s,b)$ ; essa è limite uniforme in  $\bar{\Omega}$  di una successione  $(u_h)$  di soluzioni del problema  $(P_h)$ .

Dim.

Per la [A] del Lemma 1, fissata una qualsiasi successione  $(u_h)$  (di soluzione di  $(P_h)$ ) esiste una estratta uniformemente convergente in  $\bar{\Omega}$  ad una funzione  $u$ , soluzione del pdr in  $\bar{\Omega}$  (per il Teorema 1). ■

Osservazione VI - Si riconosce facilmente che l'ipotesi  $(3)_2$  può essere sostituita dalla seguente

$(3)_2$ , Esiste  $\theta_h(n)$ , crescente in  $n$ , tale che

$$\theta_h(\alpha_h(\xi)) \leq \psi_h(\xi) \quad \text{e per } n > 0 \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \theta_h(n) = +\infty.$$

Diamo alcuni esempi per la scelta dei termini di penalizzazione  $\psi_h$  verificanti  $(3)_1$  e  $(3)_2$ .

1) Sia, per ogni  $h \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq 0 \\ h \left( \sum_{i=1}^n a_i \xi^i \right) & \text{per } \xi > 0 \end{cases}$$

con  $a_i > 0$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2) Sia, per ogni  $h \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq 0 \\ h \xi^{1/2} & 0 < \xi < 1 \\ h \xi & 1 \leq \xi \end{cases}.$$

Illustriamo, infine, un caso per cui si verifica  $(3)_1$  e  $(3)_2$ .

3) Sia  $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  con  $v(\xi) = 0$  per  $\xi \leq 0$ .

Supponiamo che  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = +\infty$  e  $v(\xi) \leq \dot{v}(\xi)$  per ogni  $\xi$ .

Allora  $\psi_h(\xi) = h \dot{v}(h\xi)$  verifica  $(3)_1$  e la  $(3)_2$ , con  $\theta_h(n) = hn$ .

§ 2. Ulteriori proprietà delle soluzioni del pdr.

Nella ipotesi  $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$  per le soluzioni del pdr di cui al teorema 1, sussistono i seguenti fatti:

[I] Se per  $\tau \in \Omega$  si ha  $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$  ed  $f(\tau) < 0$ , allora  $\tau$  è uno zero isolato di  $u$  ed inoltre  $\ddot{u}(\tau) = f(\tau)$ .

Dim.

Per la continuità di  $f$  e l'ipotesi  $f(\tau) < 0$  si ha che esistono  $\eta < 0$ ,  $\delta > 0$  tali che per ogni  $h \in N$  e  $t \in ]\tau - \delta, \tau + \delta[$  si ha  $\ddot{u}_h(t) \leq \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) < \eta < 0$ ; in definitiva, per  $h \in N$  e  $t \in ]\tau, \tau + \delta[$ ,  $\ddot{u}_h(t) < \eta < 0$ . Allora per  $t \in ]\tau, \tau + \delta[$ , risulta

$$\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau) < \eta (t - \tau) \quad \text{e quindi}$$

$$(9) \quad u_h(t) - u_h(\tau) - (t - \tau)\dot{u}_h(\tau) < \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} .$$

Essendo  $\dot{u}(\tau) = 0$ , è anche  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(\tau) = 0$ ; pertanto da (9), per  $h \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$(10) \quad u(t) \leq \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} < 0 \quad \text{per} \quad t \in ]\tau, \tau + \delta[ .$$

Analogamente si ha

$$(11) \quad u(t) \leq \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} < 0 \quad \text{per} \quad t \in ]\tau - \delta, \tau[ .$$

Da (10) e (11) segue la tesi, tenendo anche conto della continuità di  $f$ .

[L] Sia  $\tau \in \Omega$  tale che  $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$ ;

(j) Se  $f(\tau) > 0$  allora  $\tau$  è zero interno agli zeri di  $u$ .

(jj) Se  $f(\tau) = 0$   $\tau$  può non essere zero isolato.

In ogni caso risulta  $\ddot{u}(\tau) = 0$

Dim.

(j) Non può esistere un intorno  $\tau$  in cui  $u(t) \neq 0$ ; in questo caso, si otterrebbe, per un opportuno intorno di  $\tau$ ,  $u(t) > 0$ .

In base a ciò, per provare quanto asserito, basta riconoscere che  $\tau$  non può essere uno zero di accumulazione per zeri isolati di  $u$ . Se, allora,  $\tau$  fosse di accumulazione per zeri isolati di  $u$ , esisterebbe una successione  $(\xi_h)$  con  $\dot{u}(\xi_h) = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \xi_h = \tau$ ; siccome in un opportuno intorno di  $\tau$  è  $\ddot{u}(t) = f(t)$ , ne segue che  $f(\tau) = \ddot{u}(\tau) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\dot{u}(\xi_h) - \dot{u}(\tau)}{\xi_h - \tau} = 0$ .

Pertanto  $\tau$  è zero interno agli zeri di  $u$ .

(jj) E' sufficiente provare che sono vere le seguenti asserzioni:

- Se  $\tau$  è minimo relativo per  $f$ , allora  $\tau$  non è zero isolato per  $u$ .

= Se  $\tau$  è massimo relativo proprio per  $f$ , allora  $\tau$  è zero isolato per  $u$ .

- Se lo fosse in un opportuno intorno  $J$  di  $\tau$ , si avrebbe  $\ddot{u}(t) = f(t) \geq 0$ ; integrando si ottiene  $u(t) \geq 0$  in  $J$ .

= Per l'ipotesi su  $f$ , esiste un intorno  $J$  di  $\tau$ , per cui

(12)  $f(t) < 0$  per  $t \in J \setminus \{\tau\}$ .

Se esistesse un intorno  $J_1 \subset J$  in cui  $u(t) = 0$ , si otterrebbe, per [I], che tali punti sono zeri isolati di  $u$ . Ne segue che per provare l'asserzione basta provare che  $\tau$  non è punto di accumulazione per zeri

isolati. Se lo fosse, dovendo essere  $\ddot{u}(t) = f(t)$  in un opportuno intorno di  $\tau$ , si otterrebbe  $f(t) \geq 0$  per qualche punto in  $J$ .

Si riconosce che, comunque, è  $\ddot{u}(\tau) = 0$ . ■

§ 3. Problema dell'unicità.

Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con  $f$  di classe  $C^{\infty(2)}$ .

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

Sia  $h \in C_0^{\infty}(R; [0, +\infty[)$ , soddisfacente le condizioni

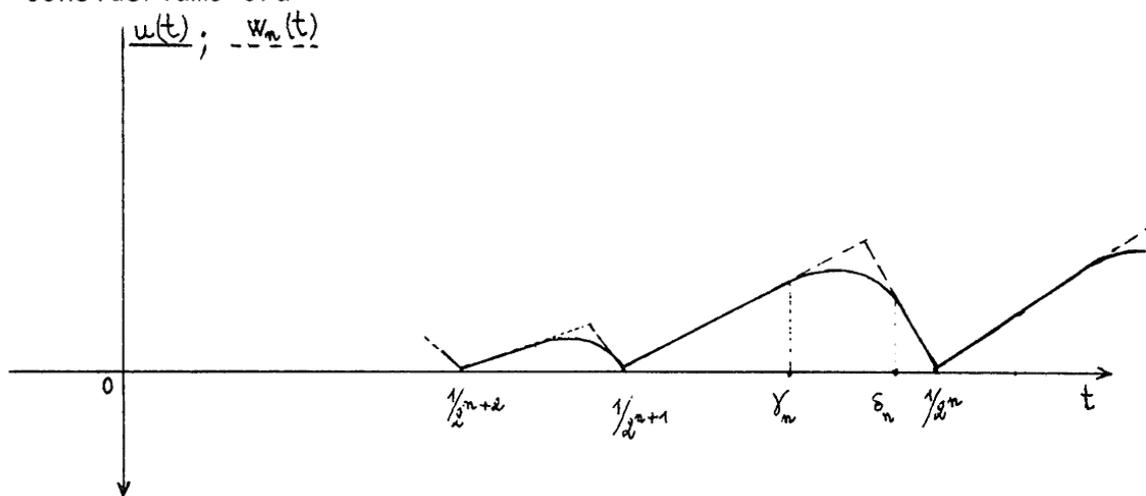
$$\int_R h(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_R t \cdot h(t) dt = 0, \quad \text{allora posto}$$

$$(h*v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy, \quad \text{si ha}$$

(a)  $h*v$  è convessa se  $v$  è convessa,

(b)  $h*v = v$  se  $v(t) = a t + b$ .

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal prof. L. Amerio.

$$W_n(t) = \max\{2^{-(n+1)^2} (2^{-(n+1)} - t); 2^{-n^2} (t - 2^{-n})\} \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}.$$

Sia  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, +\infty[)$  con  $h(t) = 0$  per  $|t| \geq 1$ ,  $\int_{-1}^1 h(t) dt = 1$   
 e  $\int_{-1}^1 t \cdot h(t) dt = 0$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  poniamo  $h_n(t) = \alpha_n h(\beta_n t)$  dove è

$$0 < \beta_n \leq 5^{-1} \cdot 2^{-(n+1)} \cdot (1 + 2^{2n+1})^{-1} \quad \text{ed } \alpha_n \text{ tale che } \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = 1.$$

Posto  $u(t) = (h_n * W_n)(t)$  per  $2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$ , risulta  $u(t) \leq 0$ .

Inoltre esistono  $(\gamma_n)$ ,  $(\delta_n)$  con  $2^{-(n+1)} < \gamma_n < \delta_n < 2^{-n}$

per cui  $2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n$  e  $\text{yesupp } h_n : W_n(t-y) = a_n(t-y) + b_n$ ,

$$\delta_n \leq t \leq 2^{-n} \quad \text{e} \quad \text{yesupp } h_n : W_n(t-y) = a'_n(t-y) + b'_n.$$

Ne segue, cfr. (b),

$$u(t) = W_n(t) \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n \quad \text{o} \quad \delta_n \leq t \leq 2^{-n}.$$

Inoltre per la (a)  $\ddot{u}(t) \geq 0$ . E' altresì evidente che  $u(0) = \dot{u}^+(0) = 0$ .

Posto, in  $[0, 1]$ ,  $f(t) = \ddot{u}(t)$ ,  $f$  risulta traccia di una funzione di classe  $C^\infty$ . Consideriamo il pdr in  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  col dato  $f$  e condizione iniziale ammissibile  $(0, 0)$  nello zero.

E' evidente che la funzione  $u(t)$  precedentemente costruita è soluzione di questo pdr con le condizioni iniziali assegnate. E' facile altresì provare che la funzione identicamente nulla è anche soluzione dello stesso pdr.

§ 4. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2. Se  $f$  è costante a tratti in  $\bar{\Omega}$ , allora il pdr ammette una unica soluzione in  $\bar{\Omega}$  verificante un assegnato dato iniziale ammissibile  $(s,b)$ .

Dim.

E' sufficiente provare il teorema per  $f(t) = c$  in  $\bar{\Omega}$ . Per  $c = 0$  l'unicità è ovvia; sia allora  $c \neq 0$ . Se  $u$  è soluzione del pdr verificante le condizioni  $u(0) = s$ ,  $\dot{u}^+(0) = b$ , si ha (dalla (iv))

$$(13) \quad \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} b^2 - s c + c u(t) \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Da (13) ricaviamo, per  $u(t) = 0$ ,

$$(14) \quad [u^\pm(t)]^2 = b^2 - 2 s c .$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è  $b^2 - 2 s c > 0$ , tutti gli eventuali zeri di  $u$  sono isolati; inoltre se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono due zeri consecutivi ( $\tau_2 > \tau_1$ ) si ha:

$$(15) \quad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2 s c};$$

da cui

$$(16) \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c} \sqrt{b^2 - 2 s c} .$$

Da (15) segue che (c) per  $c < 0$   $u$  ammette al più uno zero, (d) per  $c > 0$  gli zeri consecutivi di  $u$  sono equidistanti (e quindi sono in numero finito).

2. Se è  $b^2 - 2sc = 0$  si ha

(e)  $c > 0$  :  $u(t) \geq 0$  e quindi  $u(t) = 0$  (per (13));

(f)  $c < 0$  :  $u$  ammette al più uno zero.

Per provare che (f) è vera, basta tenere conto che si ha:

$u$  ha solo zeri isolati e non può avere più di uno zero isolato;

che  $u$  non possa avere più di uno zero isolato segue da (15); che ab-

bia solo zeri isolati segue dal fatto che negli zeri  $\tau$  di  $u$  è  $\dot{u}(\tau) = 0$  ed  $f(\tau) < 0$ . Evidentemente  $u$  non ha zeri se  $b^2 - 2sc < 0$ . ■

La dimostrazione del teorema 2 suggerisce il seguente risultato.

Teorema 3. Se  $u_1$  ed  $u_2$  hanno entrambe un numero finito di zeri e sono soluzioni in  $\bar{\Omega}$  del pdr con dato  $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$  e stesse condizioni iniziali ammissibili  $(s, b)$ , allora coincidono in  $\bar{\Omega}$ .

Dim.

Basta tenere conto del fatto che per i problemi di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(0) = s \\ \dot{u}^+(0) = b \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(\tau) = 0 \\ \dot{u}(\tau) = -\dot{u}^-(\tau) \end{cases}$$

c'è unicità locale. ■ Sussiste inoltre il seguente

Teorema 4.

Se  $u$  è soluzione del pdr in  $\bar{\Omega}$  con  $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$  e verifica la condizione

"esiste  $p > 0$  tale che  $[u^\pm(\tau)]^2 \geq p$ , per  $u(\tau) = 0$ ,"

allora  $u$  è l'unica soluzione del pdr.

Dim.

La condizione posta assicura che gli eventuali zeri di  $u$  sono isolati. Inoltre, per  $f > 0$ ,<sup>(3)</sup> considerando due zeri isolati consecutivi  $\tau_1, \tau_2$ , si ha

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\xi)(\tau_2 - \tau_1) &= f(\xi)(\tau_2 - \tau_1) = \dot{u}^-(\tau_2) - \dot{u}^+(\tau_1) = \\ &= |\dot{u}^-(\tau_2)| + |\dot{u}^+(\tau_1)| \geq 2\sqrt{p} > 0 . \end{aligned}$$

Da ciò

$$(17) \quad \tau_2 - \tau_1 \geq \frac{2\sqrt{p}}{f(\xi)} \geq \frac{2\sqrt{p}}{M}$$

dove  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)$ .

La (17) assicura che siamo nelle ipotesi del teorema 3. ■

Concludiamo col

Teorema 5. Sia  $f \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$  con  $\dot{f} \in L^1(\bar{\Omega}; [0, +\infty[)$ ;

(g) Se  $f(0) > 0$ , per ogni condizione iniziale ammissibile  $(s, b) \neq (0, 0)$ , esiste una unica soluzione del pdr in  $\bar{\Omega}$ .

(h) Per ogni condizione iniziale ammissibile  $(s, b)$  verificante la disuguaglianza  $b^2 - 2sf(0) > 0$  il pdr ammette una unica soluzione in  $\bar{\Omega}$ .

Dim.

Dalla conservazione dell'energia segue

$$(18) \quad \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(\tau)]^2 \geq \frac{1}{2} b^2 - s f(0). \quad \text{per } u(\tau) = 0.$$

(g) Dalla (18) segue l'unicità in virtù del Teorema 4.

---

<sup>(3)</sup> Osserviamo esplicitamente che se  $f \leq 0$ , c'è unicità per la soluzione del pdr, essendoci al più uno zero per  $u$ .

(h) Intanto è  $(s,b) \neq (0,0)$  .

Se  $f(0) > 0$  si ricade nel caso (g); se  $f(0) < 0$ , si ha che per  $f(t) \leq 0$  u ha al più uno zero e per  $f(t) > 0$  valgono le considerazioni di (g) . ■

Per il Teorema 5 si può prendere ad esempio

$$f(t) = a t \pm 1 \quad \text{con } a \geq 0, t \in [0, T] , \quad \text{oppure}$$
$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad a_i \geq 0 (i=0,1,\dots,n), t \in [0, T] .$$

B I B L I O G R A F I A

- [1] E. DE GIORGI  *$\Gamma$ -convergenza e  $G$ -convergenza,*  
BUMI (5) 14-A(1977),213-220 .
- [2] E. DE GIORGI *Convergence problems for functionals  
and operators, Proceedings of the In  
ternational meeting on Recent Methods  
in non linear analysis; Roma may 8/12-1978  
(Edts.E.De Giorgi; E.Magenes; U. Mosco);*
- [3] M.SCHATZMAN *Sur une classe de problèmes hyperboliques  
non linéaires, C.R. Acad.Sc.Paris, t.277  
(8 octobre 1973) Série A,pp.671-674.*
- [4] M.SCHATZMAN *Le système différentiel  $(d^2u/dt^2) + \partial\Phi(u) \ni f$   
avec conditions initiales, C.R. Acad.Sc.  
Paris t. 284 (14 mars 1977) Série A,  
pp. 603-606.*
- [5] A.SIGNORINI *Meccanica Razionale, vol. II,cap.XVII,n.14.*
- [6] S. SPAGNOLO *Problemi di  $G$ -convergenza,relazione per  
il convegno GNAFA 1976.*

Accettato per la pubblicazione su  
proposta del Prof. E. DE GIORGI